

Derivace funkce

popisuje chování dané funkce, tj. růst nebo pokles, ale navíc i rychlost (tempo, míru) růstu, resp. poklesu

Geometrický význam: směrnice tečny ke grafu funkce

Poznámka. Hodnoty funkce tangens

Definice. Derivací funkce f v bodě x_0 nazýváme **číslo**

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pokud limita existuje a **je konečná**.

Poznámka. Je-li limita $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o **nevlastní derivaci**.

Poznámka. Jiný zápis limity v definici:

Fyzikální aplikace: okamžitá rychlost přímočarého pohybu

Funkce zvaná derivace funkce f :

Značíme ji f' , její definiční obor $D(f') \subset D(f)$.

Tato fce přiřazuje bodu $x \in D(f)$ derivaci $f'(x)$, pokud tato existuje.

Jiné značení derivace:

Je-li $y = f(x)$, pak kromě f' používáme též značení y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$

$f'_-(x_0)$ značí derivaci funkce f v bodě x_0 zleva,

$f'_+(x_0)$ značí derivaci funkce f v bodě x_0 zprava,

Věta 5.7. $f'(x_0) = k$ právě tehdy, když $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = k$.

Tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je **přímka** daná rovnicí

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \doteq f(x) \text{ v okolí } U(x_0).$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 .

Normála ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je **přímka** o rovnici:

Spojitosť a derivace funkce

Věta 5.8 Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak je f v bodě x_0 spojitá.

Věta obrácená neplatí !

Derivace některých elementárních funkcí

Tabulka

Příklad. $f(x) = \sqrt{x}$, pak $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

$f'_+(0) = +\infty$, **nevlastní derivace**

Další vzorce (věty) pro výpočet derivací

Věta 5.10 Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x .

Pak existují derivace:

$$(konst \cdot f)'(x) = konst \cdot f'(x) \quad !!!$$

Pro kratší zápis vynecháváme v dalších vzorcích (x) :

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Věta 5.14 Nechť existují derivace $f'(g(x))$ a $g'(x)$.

Pak existuje derivace složené funkce $f(g(x))$ v bodě x a platí:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivace vyšších řádů

derivace 2. řádu funkce f je $f'' = (f')'$

derivace n -tého řádu funkce f je $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Pro def. obory platí:

$$\dots D(f'') \subset D(f') \subset D(f)$$

Příklad. $f(x) = e^x$, pak $f^{(n)}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $f(x) = \sin x$,

pak v derivacích se periodicky opakují funkce:

$\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ $x \in \mathbb{R}$.

Analogicky pro $f(x) = \cos x$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x}$,

pak $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{x^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Příklad. $f(x) = \sqrt{x}$,

pak $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n \cdot \sqrt{x^{2n-1}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Leibnizův vzorec

pro výpočet derivace n-tého řádu součinu $f \cdot g$:

pak $[f \cdot g]^{(n)} = \dots$

Platí na průniku def. oborů $D(f^{(n)})$ a $D(g^{(n)})$