

Determinanty, regulární matice, inverzní matice

Definice Determinant čtvercové matice $n \times n$ je číslo značené $\det A$, definované takto:

1. Je-li $A = (a)$ čtvercová matice 1×1 , pak $\det A = a$.
2. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice $n \times n$, pak vybereme libovolný i -tý řádek matice A a číslo $\det A$ vypočteme takto:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. **doplňěk prvku a_{ij}** v matici A .

Jeho hodnota je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}^*$,

kde A_{ij}^* je determinant matice, která vznikne z původní matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Poznámka. Mluvíme o rozvoji determinantu podle (libovolného) i -tého řádku. Stejný výsledek dostaneme rozvojem podle libovolného sloupce.

I.27 Vlastnosti $\det A$

1. Při výměně dvou řádků je \det nové matice roven $(-\det A)$
2. Při násobení řádku číslem α je \det nové matice roven $\alpha \cdot \det A$.
3. $\det A$ se nezmění, když k některému řádku přičteme násobek jiného řádku.
4. $\det A = 0$, jestliže A obsahuje nulový řádek nebo některý řádek je násobkem jiného

Další vlastnosti $\det A$

$$\det A = \det A^T, \quad \det (\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A,$$

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B, \quad \text{kde } A, B \text{ jsou téhož typu.}$$

Determinant 3×3 , výpočet

1. **VŽDY** lze Sarussovo pravidlo
 2. **VŽDY** lze rozvoj dle řádku nebo sloupce
- NĚKDY** nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

Výpočet determinantu pro $n > 3$

Nelze pravidlo Sarussova typu

Lze podle definice, tj. rozvojem

ČASTO nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

Definice Čtvercovou matici $n \times n$, která má hodnost n nazýváme regulární maticí.

Poznámka:

Co to znamená pro skupinu řádkových (sloupcových) vektorů v \mathbb{R}^n ?

Definice Matici A^{-1} typu $n \times n$ nazýváme inverzní maticí k matici A (téhož typu), jestliže $A \cdot A^{-1} = E$.

Poznámka: Matice inverzní nemusí existovat !

Věta I.31.

Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$.

Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. A je regulární (tj. hodnost $h(A) = n$.)
2. $\det A \neq 0$,
3. K matici A existuje inverzní matice A^{-1} .

Věta I.32, I.33

Jsou-li A , B regulární matice, pak A^{-1} a $A \cdot B$ jsou též regulární a platí:

- a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, b) $(A^{-1})^{-1} = A$
c) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, d) $\det A^{-1} = 1/\det A$

Poznámka. Inverzní matice je určena jednoznačně (pokud existuje).

Výpočet inverzní matice, dvě možnosti

I. Gaussův algoritmus

1. krok: Sestavíme matici $(A|E)$.
2. Pomocí ekvivalentních úprav ji upravíme na matici ve tvaru $(E|B)$.
3. Pak platí, že $A^{-1} = B$.

II. Výpočet pomocí determinantů podle vztahu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T,$$

$(A_{ij})^T$ je transponovaná matice k matici, jejíž prvek

A_{ij} je **doplněk prvku** a_{ij} z matice A , $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Příklad

Rovnice s maticemi

Příklad.

Z dané maticové rovnice vyjádřete matici X pomocí inverzní matice.

$$\text{a) } X \cdot A = C, \quad \text{b) } A \cdot X + B = C, \quad \text{c) } A \cdot X \cdot B = C.$$

Výsledek: a) $X = C \cdot A^{-1}$, pokud matice A je regulární.

b) $X = A^{-1}(C - B)$, pokud matice A je regulární.

c) $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, pokud matice A, B jsou regulární.

Příklad.* V předchozím příkladu předpokládejme, že matice A je typu $n \times n$.

V úlohách a), b) určete typ matice C , resp. matic B a C , aby dané rovnice měly smysl.

Předpokládejme naopak, že matice A v úlohách a), b) není čtvercová. Mohou mít rovnice

a), b) s neznámou maticí X řešení? Pokud ano, jak ho lze nalézt?

Výsledek: a) C je typu $m \times n$, kde $m \in \mathbb{N}$ je libovolné.

b) B, C jsou typu $n \times p$, kde $p \in \mathbb{N}$ je libovolné.