## Determinanty, regulární matice, inverzní matice

**Definice** Determinant čtvercové matice $n \times n$ je číslo značené det $A$, definované takto:
1. Je-li $A = (a)$ čtvercová matice $1 \times 1$, pak det $A = a$.
2. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice $n \times n$, pak vybereme libovolný $i$-tý řádek matice $A$ a číslo det $A$ vypočteme takto:

$$\det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}},$$

kde $A_{ij}$je tzv. doplněk prvku $\boldsymbol{a_{ij}}$ v matici $A$.

Jeho hodnota je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij}$,
kde $A^*_{ij}$ je determinant matice, která vznikne z původní matice $A$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.

Poznámka. Mluvíme o rozvoji determinantu podle (libovolného ) i-tého řádku. Stejný výsledek dostaneme rozvojem podle libovolného sloupce.

## I.27 Vlastnosti det$A$

1. Při výměně dvou řádků je det nové matice roven (-det$A$)

2. Při násobení řádku číslem $\alpha$ je det nové matice roven $\alpha \cdot \det A$.

3. det$A$ se nezmění, když k některému řádku přičteme násobek jiného řádku.

4. $\det A = 0$, jestliže $A$ obsahuje nulový řádek nebo některý řádek je násobkem jiného

### Další vlastnosti det$A$

det $A$ =det $A^T$, det $(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$,

det $(A \cdot B)$ =det $A\cdot$ det $B$, kde $A, B$ jsou téhož typu.

## Determinant $3 \times 3$, výpočet

1. VŽDY lze Sarussovo pravidlo

2. VŽDY lze rozvoj dle řádku nebo sloupce

NĚKDY nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

## Výpočet determinantu pro $n > 3$

Nelze pravidlo Sarussova typu

Lze podle definice, tj. rozvojem

ČASTO nejprve vytvoříme nuly na vhodných místech

**Definice** Čtvercovou matici $n \times n$, která má hodnost $n$ nazýváme regulární maticí.

Poznámka:

Co to znamená pro skupinu řádkových (sloupcových) vektorů v $\mathbb{R}^n$ ?

**Definice** Matici $A^{-1}$ typu $n \times n$ nazýváme inverzní maticí k matici $A$ (téhož typu), jestliže $A \cdot A^{-1} = E$.

Poznámka: Matice inverzní nemusí existovat !

**Věta I.31.**

Nechť $A$ je čtvercová matice typu $n \times n$.
Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. $A$ je regulární (tj. hodnost $h(A) = n$.)

2. det $A \neq 0$,

3. K matici $A$ existuje inverzní matice $A^{-1}$.

**Věta I.32, I.33**

Jsou-li $A,\ B$ regulární matice, pak $A^{-1}$ a $A \cdot B$ jsou též regulární a platí:
a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, b) $(A^{-1})^{-1} = A$

c) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, d) det $A^{-1} = 1/\det A$

Poznámka. Inverzní matice je určena jednoznačně (pokud existuje).

## **Výpočet inverzní matice,** dvě možnosti

I. Gaussův algoritmus

1. krok: Sestavíme matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$.

2. Pomocí ekvivalentních úprav ji upravíme na matici ve tvaru $(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{B})$.

3. Pak platí, že $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

II. Výpočet pomocí determinantů podle vztahu

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\det \boldsymbol{A}} \left(\boldsymbol{A}_{ij}\right)^{\boldsymbol{T}},$$

$(A_{ij})^T$ je transponovaná matice k matici, jejíž prvek

$A_{ij}$ je doplněk prvku $a_{ij}$ z matice $A$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Příklad

## Rovnice s maticemi

Příklad.

Z dané maticové rovnice vyjádřete matici $X$.

a) $X \cdot A = C$, b) $A \cdot X + B = C$, c) $A \cdot X \cdot B = C$.