Tečná (nad)rovina, diferenciál, derivace ve směru

Motivace: Řešení úloh přibližně (počítač) Př. 1. Rovnice $f(x) = 0$
Př. 2. Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
V obou případech stačí nahradit graf funkce tečnou (opakovaně)

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Definice. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n]$, jestliže existuje lineární funkce $L(X)$ taková, že

$$\lim_{\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{X})}{\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\|} = \boldsymbol{0}.$$

Funkce f je diferencovatelná v množině M, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Poznámka. Funkce L ve tvaru: $L(X) = f(A)+k_1\,(x_1-a_1)+\ldots+k_n\,(x_n-a_n)$

Nutné podmínky pro diferencovatelnost

Věta 4.11 a 4.12.

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$, pak

1. f je v bodě $\boldsymbol{A}$ spojitá,
2. f má v bodě $\boldsymbol{A}$ parc. derivace podle všech proměnných. Pro každé $i = 1, 2, ..., n$ platí: $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{k}_i$.

Důkaz (J. Neustupa):

1. Postupujeme podobně jako v analogické větě pro funkci jedné proměnné.
2. Vyjdeme z definice diferencovatelné funkce a upravíme tak, aby limita obsahovala výraz pro parc. derivaci.

Použití věty: Jestliže funkce f není spojitá v daném bodě A nebo parciální derivace podle některé prom. v bodě A neexistuje, pak funkce f není diferencovatelná v bodě A.

Tečnou rovinou ke grafu funkce v bodě $T = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2]$ nazýváme rovinu o rovnici

$$\boxed{\boldsymbol{z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).}}$$

(Totálním) diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě A nazýváme lineární funkci proměnných x, y, kterou značíme $df(A)$:

$$\boldsymbol{df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).}$$

Označíme-li přírůstky $\boldsymbol{dx = x - a_1}$, $\boldsymbol{dy = y - a_2}$, pak

$$\boldsymbol{df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\, dy.}$$

Pro $X = A + \Delta X$ z okolí $U(A)$ přibližně platí $\boldsymbol{f(X) \doteq f(A) + df(A)}$.

Geometrický význam diferenciálu $df(A)$: přírůstek na tečné rovině, což je přibližně přírůstek funkce (při přírůstku ΔX).

V případě funkce obecně n proměnných mluvíme zpravidla o *tečné nadrovině*. Jedná se o množinu v prostoru $\mathbb{E}_{\boldsymbol{n+1}}$.

Poznámka. Uvedené dvě věty a následující Věta 4.16: žádná z nich neplatí ve tvaru věty obrácené.

Příklad 1.
Funkce $z = f(x, y) = |\mathrm{sign}(xy)|$ má parciální derivace podle obou proměnných v bodě $P = [0, 0]$, a to rovné nule. Není však spojitá v bodě P. Tato funkce tedy není v bodě P diferencovatelná. Rovina $z = 0$ sice prochází bodem P i částí grafu (osy x, y), ale ”nepřimyká se”ke grafu dané funkce v prstencovém okolí bodu P.

Postačující podmínka pro diferencovatelnost

Věta 4.16. Má-li funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) spojité parc. derivace podle všech prom. v bodě $\boldsymbol{A}$, pak je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$.
Má-li $\boldsymbol{f}$ spojité parc. derivace podle všech proměnných v množině $\boldsymbol{M}$, která je otevřená, pak je $\boldsymbol{f}$ diferencovatelná v $\boldsymbol{M}$.

Příklad 2. Uvažujme funkci $z = f(x, y)$ definovanou předpisem

$$\boldsymbol{z = f(x, y) = (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}} \quad \text{pro } [x, y] \neq [0, 0],\ \boldsymbol{f(0, 0) = 0}.$$

Tato funkce má parciální derivace podle obou proměnných ve všech bodech $D(f) = \mathbb{E}_2$. V bodě $P = [0, 0]$ jsou obě rovné nule (ověřte si podle definice). Daná funkce je diferencovatelná v bodě P.
V tomto bodě však nejsou tyto parc. derivace spojité. Ověřit to lze např. na posloupnosti bodů $\boldsymbol{X_n = [1/\sqrt{2\pi\, n},\ 0]}$, která konverguje k bodu P, ale posloupnost hodnot parciálních derivací podle x, tj. $\boldsymbol{f_x(X_n)}$ diverguje.

Příklad 3

a) **Určete a načrtněte množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = \ln\left(6 - x^2 - y^2\right)$. Zdůvodněte.**

b) **Napište rovnici tečné roviny, kolmý vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, -2, ?]$.**

c) **Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [1, -2]$. Určete přibližně hodnotu funkce f v bodě $[0.9; -2.1]$.**

d) **Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0$, $k = \ln 2$. Izokřivky načrtněte.**

Derivace v daném směru - výpočet

Věta 5.5. Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ (n prom.) diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{A}$, pak existuje derivace fce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{A}$ ve směru $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{o}}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|}$$

Poznámka. "Vážený průměr" parc. derivací, váhy jsou složky vektoru $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Důležité směry v bodě $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$

1. Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$, je-li nenulový, udává směr maximálního růstu funkce f v bodě A, derivace v tomto směru je $\|\mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})\|$.

2. Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = -\mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$, je-li nenulový, udává směr maximálního poklesu funkce f v bodě A, derivace v tomto směru je $-\|\mathrm{grad}\, f(A)\|$.

3. Libovolný nenulový vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \perp \mathbf{grad}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$, udává směr, ve kterém je derivace nulová (pohyb po izokřivce v $\mathbb{E}_2$, resp. po izoploše v $\mathbb{E}_3$).

Příklad 4

Je dána funkce
$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{x - y^2 + 2}}$**, bod** $A = [3, -1]$**.**

a) Množina $D \subseteq \mathbb{E}_2$**, ve které je tato funkce diferencovatelná.**

b) Gradient a diferenciál funkce f **v bodě** A**.**

c) Derivace funkce f **v bodě** A **ve směru** $\vec{u} = (2,\ -2)$**.**
Je to směr nejrychlejšího poklesu fce f **v bodě** A **?**

d) Směr $\vec{s}$**, ve kterém je derivace funkce** f **v bodě** A **nulová. Ověřte výpočtem nebo dokažte obecně.**

e) (Jednotkový) směr $\vec{v}$**, ve kterém funkce** f **v bodě** A **nejrychleji roste. Derivace funkce** f **v bodě** A **v tomto směru.**

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 4.16. Má-li funkce f (n prom.) na mn. M spojité všechny parc. derivace až do řádu k, pak tyto parciální derivace nezávisí na pořadí proměnných při derivování, ale pouze na tom, kolikrát derivujeme podle jednotlivých prom.

Příklad 4. a) Určete a načrtněte množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $\boldsymbol{f(x, y) = y \ln (xy)}$. Zdůvodněte.

b) Ověřte rovnost smíšených PD 2. řádu v D.

c) Dokažte, že daná funkce vyhovuje pro všechna $[x, y] \in D$ diferenciální rovnici

$$\text{(c1)} \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = 0, \qquad \text{(c2)} \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

d) Určete a načrtněte izokřivku pro $\boldsymbol{k = 0}$ [Výsl. $\boldsymbol{y = 1/x}$]

Příklad 2*.
Zdůvodněte, zda se rovnají funkce $f(x,y) = \ln(xy)$, $g(x,y) = \ln x + \ln y$.

Příklad 3*. Pro níže zadané funkce určete a načrtněte definiční obor. Určete jeho vlastnosti (množina otevřená, uzavřená, (ne)omezená,...). Určete a načrtněte izokřivky pro dané hodnoty k:

a) $f(x,y) = \ln(xy^2), \quad k = 0, k = 1, k = 2, k = -1.$

b) $f(x,y) = x\sqrt{y} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \quad k = 0.$

c) $f(x,y) = \arccos(x-y), \quad k = 0, k = \pi/2, k = \pi.$

d) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y}, \quad k = 1/\mathrm{e}, k = 1, k = \mathrm{e}.$