

Tečná (nad)rovina, diferenciál, derivace ve směru

Motivace: Řešení úloh přibližně (počítač) **Př. 1.** Rovnice $f(x) = 0$

Př. 2. Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

V obou případech stačí nahradit graf funkce tečnou (opakovaně)

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Definice. Říkáme, že funkce f (n prom.) je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$, jestliže existuje lineární funkce $L(X)$ taková, že

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

Funkce f je diferencovatelná v množině M , je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M .

Poznámka. Funkce L ve tvaru: $L(X) = f(A) + k_1(x_1 - a_1) + \dots + k_n(x_n - a_n)$

Nutné podmínky pro diferencovatelnost

Věta 4.11 a 4.12.

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A , pak

1. f je v bodě A spojitá,
2. f má v bodě A parc. derivace podle všech proměnných. Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = k_i$.

Důkaz (J. Neustupa):

1. Postupujeme podobně jako v analogické větě pro funkci jedné proměnné.
2. Vyjdeme z definice diferencovatelné funkce a upravíme tak, aby limita obsahovala výraz pro parc. derivaci.

Použití věty: Jestliže funkce f není spojitá v daném bodě A nebo parciální derivace podle některé prom. v bodě A neexistuje, pak funkce f není diferencovatelná v bodě A .

Tečnou rovinou ke grafu funkce v bodě $T = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2]$ nazýváme rovinu o rovnici

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).$$

(Totálním) diferenciálem funkce $f(x, y)$ v bodě A nazýváme **lineární funkci proměnných** x, y , kterou značíme $df(A)$:

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2).$$

Označíme-li přírůstky $dx = x - a_1$, $dy = y - a_2$, pak

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy.$$

Pro $X = A + \Delta X$ z okolí $U(A)$ přibližně platí $f(X) \doteq f(A) + df(A)$.

Geometrický význam diferenciálu $df(A)$: přírůstek na tečné rovině, což je přibližně přírůstek funkce (při přírůstku ΔX).

V případě **funkce obecně n proměnných** mluvíme zpravidla o *tečné nadrovině*. Jedná se o množinu v prostoru \mathbb{E}_{n+1} .

Poznámka. Uvedené dvě věty a následující Věta 4.16: žádná z nich neplatí ve tvaru věty obrácené.

Příklad 1.

Funkce $z = f(x, y) = |\text{sign}(xy)|$ má parciální derivace podle obou proměnných v bodě $P = [0, 0]$, a to rovné nule. Není však spojitá v bodě P . Tato funkce tedy není v bodě P diferencovatelná. Rovina $z = 0$ sice prochází bodem P i částí grafu (osy x, y), ale "nepřimyká se" ke grafu dané funkce v prsten-covém okolí bodu P .

Postačující podmínka pro diferencovatelnost

Věta 4.16. Má-li funkce f (n prom.) spojité parc. derivace podle všech prom. v bodě A , pak je diferencovatelná v bodě A .

Má-li f spojité parc. derivace podle všech proměnných v množině M , která je otevřená, pak je f diferencovatelná v M .

Příklad 2. Uvažujme funkci $z = f(x, y)$ definovanou předpisem

$$z = f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0], \quad f(0, 0) = 0.$$

Tato funkce má parciální derivace podle obou proměnných ve všech bodech $D(f) = \mathbb{E}_2$. V bodě $P = [0, 0]$ jsou obě rovné nule (ověřte si podle definice). Daná funkce je diferencovatelná v bodě P .

V tomto bodě však nejsou tyto parc. derivace spojité. Ověřit to lze např. na posloupnosti bodů $X_n = [1/\sqrt{2\pi n}, 0]$, která konverguje k bodu P , ale posloupnost hodnot parciálních derivací podle x , tj. $f_x(X_n)$ diverguje.

Příklad 3

- a) Určete a načrtněte množinu D , ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = \ln(6 - x^2 - y^2)$. Zdůvodněte.
- b) Napište rovnici tečné roviny, kolmý vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, -2, ?]$.
- c) Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [1, -2]$. Určete přibližně hodnotu funkce f v bodě $[0.9; -2.1]$.
- d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0, k = \ln 2$. Izokřivky načrtněte.

Derivace v daném směru - výpočet

Věta 5.5. Je-li funkce f (n prom.) diferencovatelná v bodě A , pak existuje derivace fce f v bodě A ve směru $\vec{u} \neq \vec{o}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(A) = \frac{\text{grad} f(A) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Poznámka. "Vážený průměr" parc. derivací, váhy jsou složky vektoru \vec{u} .
Důležité směry v bodě $A \in D(f)$

1. Vektor $\vec{v} = \text{grad} f(A)$, je-li nenulový, udává **směr maximálního růstu** funkce f v bodě A , derivace v tomto směru je $\|\text{grad} f(A)\|$.
2. Vektor $\vec{w} = -\text{grad} f(A)$, je-li nenulový, udává **směr maximálního poklesu** funkce f v bodě A , derivace v tomto směru je $-\|\text{grad} f(A)\|$.
3. Libovolný nenulový vektor $\vec{s} \perp \text{grad} f(A)$, udává **směr, ve kterém je derivace nulová** (pohyb po izokřivce v \mathbb{E}_2 , resp. po izoploše v \mathbb{E}_3).

Příklad 4

Je dána funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2 + 2}, \quad \text{bod } A = [3, -1].$$

- a) **Množina $D \subseteq \mathbb{E}_2$, ve které je tato funkce diferencovatelná.**
- b) **Gradient a diferenciál funkce f v bodě A .**
- c) **Derivace funkce f v bodě A ve směru $\vec{u} = (2, -2)$.
Je to směr nejrychlejšího poklesu fce f v bodě A ?**
- d) **Směr \vec{s} , ve kterém je derivace funkce f v bodě A nulová. Ověřte výpočtem nebo dokažte obecně.**
- e) **(Jednotkový) směr \vec{v} , ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji roste. Derivace funkce f v bodě A v tomto směru.**

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 4.16. Má-li funkce f (n prom.) na mn. M spojité všechny parc. derivace až do řádu k , pak tyto parciální derivace nezávisí na pořadí proměnných při derivování, ale pouze na tom, kolikrát derivujeme podle jednotlivých prom.

Příklad 4. a) Určete a načrtněte množinu D , ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = y \ln(xy)$. Zdůvodněte.

b) Ověřte rovnost smíšených PD 2. řádu v D .

c) Dokažte, že daná funkce vyhovuje pro všechna $[x, y] \in D$ diferenciální rovnici

$$(c1) \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad (c2) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

d) Určete a načrtněte izokřivku pro $k = 0$ [Výsl. $y = 1/x$]

Příklad 2*.

Zdůvodněte, zda se rovnají funkce $f(x, y) = \ln(xy)$, $g(x, y) = \ln x + \ln y$.

Příklad 3*.

Pro níže zadané funkce určete a načrtněte definiční obor.

Určete jeho vlastnosti (množina otevřená, uzavřená, (ne)omezená,...).

Určete a načrtněte izokřivky pro dané hodnoty k :

a) $f(x, y) = \ln(xy^2)$, $k = 0, k = 1, k = 2, k = -1$.

b) $f(x, y) = x\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}$, $k = 0$.

c) $f(x, y) = \arccos(x - y)$, $k = 0, k = \pi/2, k = \pi$.