Diferenciální počet - průběh funkce

Monotónie a extrémy funkce

Věta o střední hodnotě (Lagrange)

Nechť je funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v (a, b).

Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricky

Věta 6.16 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť existují $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

nebo jsou obě nevlastní.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita vpravo existuje.

Příklady.

Příklad. limita typu $0 \cdot \infty$

Příklad. limita typu $\infty - \infty$

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum (resp. lokální minimum), jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí, že $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_0)}$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Platí-li nerovnosti ostré, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in M \subset D(f)$ svého maxima na množině M (resp. svého minima na M), jestliže pro všechna $x \in M$ platí, že $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_0)}$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
V těchto případech mluvíme o absolutním (též globálním) maximu, resp. minimu.

Věta 6.4 (postač. podm. pro monotónii funkce)

Nechť f je spojitá funkce v intervalu I. Pak platí

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I^o$, pak je f rostoucí na I.

b) Je-li $f'(x) < 0$ ... ..., pak je f klesající na I.

c) Je-li $f'(x) \geq 0$ ... ..., pak je f neklesající na I.

d) Je-li $f'(x) \leq 0$ ... ..., pak je f nerostoucí na I.

e) Je-li $f'(x) = 0$ ... ..., pak je f konstantní na I.

Věta (postač. podm. pro lokální extrém pomocí monotónie)

Nechť je funkce f je spojitá v bodě x_0.
Je-li f rostoucí v levém okolí $P_-(x_0)$ a klesající v $P_+(x_0)$,
pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Analogicky pro lokální minimum.

Poznámka: Monotónii vyšetříme pomocí derivace.

Příklad. Fce není spojitá v bodě x_0.

Věta 7.3 (nutná podm. pro lokální extrém)

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak je $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Není to však podmínka postačující !!!

Příklady

Věta 7.9 (postač. podm. pro lokální extrém pomocí 2. derivace)

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Analogicky pro lokální maximum.

Věta 4.29 (o existenci absolutních extrémů)

Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá v něm svého maxima i minima (tj. své největší i nejmenší hodnoty).

Dodatek.

Absolutních extrémů může funkce f nabývat pouze

1) ve vnitřních bodech, ve kterých je splněna NP pro lokální extrém, tj. derivace $f'(x_0) = 0$ nebo neexistuje

2) v krajních bodech intervalu.

Postup při hledání absolutních extrémů

1. Zdůvodníme existenci abs. extrémů (Věta 4.29).

2. Najdeme všechny ”podezřelé”body

3. Vypočítáme hodnoty dané funkce v těchto bodech. Z nich určíme maximum, resp. minimum funkce f v daném intervalu.

Otázka: Co když interval není uzavřený nebo není omezený ?

Příklad: Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy funkce

$$\boldsymbol{f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

a) v intervalu $\boldsymbol{I = \langle -1, 8 \rangle}$

b) v intervalu $\boldsymbol{J = \langle -27, -1 \rangle}$

Věta 6.11

postačující podm. pro konvexnost, konkávnost

Nechť f je spojitá funkce v intervalu I. Pak platí

a) Je-li $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I^o$, pak je f ryze konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) < 0$ ... ..., pak je f ryze konkávní na I.

e) Je-li $f''(x) = 0$ ... ..., pak je f lineární na I.

Věta

(postačující podm. pro inflexi pomocí 2. derivace)

Nechť funkce f má 1. derivaci v bodě x_0. Má-li 2. derivace f'' opačná znaménka v $P_-(x_0)$, $P_+(x_0)$, pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Příklad:

Určete intervaly, na kterých je funkce

$$f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

konvexní, resp. konkávní.

Rozhodněte o inflexních bodech.

Vyšetřete derivaci v bodě $x = 0$.

Věta 7.15

(nutná podm. pro inflexi)

Je-li x_0 inflexním bodem funkce f,
pak je $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Není to však podmínka postačující !!!

Věta 7.17 (postačující podm. pro inflexní bod pomocí 3. derivace)

Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Příklad: Určete inflexní body funkce
$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Výsledek:
Inflexní body jsou $x = 1/3$, $x = 1$.

Věta 7.17

(Zobecněná PP pro lokální extrém
a inflexi pomocí derivací)

Nechť $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Je-li n liché, pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Asymptoty

Říkáme, že přímka $x = x_0$ je svislou asymptotou grafu funkce f v bodě x_0, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 je nevlastní.

Přímka $y = kx + q$ se nazývá šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Podobně definujeme šikmou asymptotu grafu funkce f pro $x \to -\infty$.

Věta 8.2 Přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}.$$

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0.

Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** n-tého stupně funkce f o středu v bodě x_0.

Pak platí: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \ldots, n.$

Chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení (při aproximaci) hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$ označme $R_{n+1}(x)$, tj.

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$

Věta Taylorova Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n+1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Uvedený vztah se nazývá Lagrangeův tvar zbytku (po n-té mocnině)

Přesnou polohu bodu ξ zpravidla neznáme, proto se spokojíme s odhadem shora:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1},$$

kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x \rangle$, resp. $\langle x, x_0 \rangle$.

Příklad. a) Pro $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ napište $\boldsymbol{T_3(x)}$ o středu $x_0 = 0$.

b) Určete $\boldsymbol{\sin(3/4)}$ přibližně pomocí $\boldsymbol{T_3(x)}$.

c) Lagrangeův tvar zbytku a odhad chyby při aproximaci z b).

d) Odhad chyby při aproximaci polynomem $\boldsymbol{T_7(x)}$.

Příklad. a) Pro $\boldsymbol{f(x) = x+1+\sqrt{2x-1}}$ napište $\boldsymbol{T_2(x)}$ o středu $\boldsymbol{x_0 = 1}$.

b) Určete $\boldsymbol{f(5/4)}$ přibližně pomocí $\boldsymbol{T_2(x)}$.

c) Lagrangeův tvar zbytku a odhad chyby při aproximaci z b).

Příklad. a) Napište $T_4(x),\ x_0 = 0$ pro $f(x) = \cos x$.

b) Vypočítejte přibližně $\cos 0,4$ pomocí $T_4(x)$.

c) Odhadněte chybu při této aproximaci.

Oskulační kružnice.

v bodě $[x_0, y_0]$ dotyk řádu 2 s grafem dané funkce

$1/r$ je křivost funkce f v bodě $[x_0, y_0]$