

Diferenciální počet - průběh funkce

Monotonie a extrémny funkce

Věta o střední hodnotě (Lagrange)

Nechť je funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v (a, b) .

Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricky

Věta 6.16 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť existují $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

nebo jsou obě nevlastní.

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita vpravo existuje.

Příklady.

Příklad. limita typu $0 \cdot \infty$

Příklad. limita typu $\infty - \infty$

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum** (resp. lokální minimum), jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí, že **$f(x) \leq f(x_0)$** (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Platí-li nerovnosti ostré, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in M \subset D(f)$ svého **maxima na množině M** (resp. svého minima na M), jestliže pro všechna $x \in M$ platí, že **$f(x) \leq f(x_0)$** (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

V těchto případech mluvíme o absolutním (též globálním) maximu, resp. minimu.

Věta 6.4 (postač. podm. pro monotónii funkce)

Nechť f je spojitá funkce v intervalu I . Pak platí

- a) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I^\circ$, pak je f rostoucí na I .
- b) Je-li $f'(x) < 0$, pak je f klesající na I .
- c) Je-li $f'(x) \geq 0$, pak je f neklesající na I .
- d) Je-li $f'(x) \leq 0$, pak je f nerostoucí na I .
- e) Je-li $f'(x) = 0$, pak je f konstantní na I .

Věta (postač. podm. pro lokální extrém pomocí monotónie)

Nechť je funkce f je **spojitá** v bodě x_0 .

Je-li f **rostoucí** v levém okolí $P_-(x_0)$ a **klesající** v $P_+(x_0)$,
pak má funkce f v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.

Analogicky pro lokální minimum.

Poznámka: Monotónii vyšetříme pomocí derivace.

Příklad. Fce není spojitá v bodě x_0 .

Věta 7.3 (nutná podm. pro lokální extrém)

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak je $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Není to však podmínka postačující !!!

Příklady

Věta 7.9 (postač. podm. pro lokální extrém pomocí 2. derivace))

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Analogicky pro lokální maximum.

Věta 4.29 (o existenci absolutních extrémů)

Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá v něm svého maxima i minima (tj. své největší i nejmenší hodnoty).

Dodatek.

Absolutních extrémů může funkce f nabývat pouze

- 1) ve vnitřních bodech, ve kterých je splněna NP pro lokální extrém, tj. derivace $f'(x_0) = 0$ nebo neexistuje
- 2) v krajních bodech intervalu.

Postup při hledání absolutních extrémů

1. Zdůvodníme existenci abs. extrémů (Věta 4.29).
2. Najdeme všechny "podezřelé" body
3. Vypočítáme hodnoty dané funkce v těchto bodech. Z nich určíme maximum, resp. minimum funkce f v daném intervalu.

Otázka: Co když interval není uzavřený nebo není omezený ?

Příklad: Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy funkce

$$f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

a) v intervalu $I = \langle -1, 8 \rangle$

b) v intervalu $J = \langle -27, -1 \rangle$

Věta 6.11

postačující podm. pro konvexnost, konkávnost

Nechť f je spojitá funkce v intervalu I . Pak platí

- a) Je-li $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I^\circ$, pak je f ryze konvexní na I .
- b) Je-li $f''(x) < 0$, pak je f ryze konkávní na I .
- e) Je-li $f''(x) = 0$, pak je f lineární na I .

Věta

(postačující podm. pro inflexi pomocí konkávnosti)

Nechť funkce f má 1. derivaci v bodě x_0 . Má-li 2. derivace f'' opačná znaménka v $P_-(x_0)$, $P_+(x_0)$, pak je x_0 inflexním bodem funkce f .

Příklad:

Určete intervaly, na kterých je funkce

$$f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

konvexní, resp. konkávní.

Rozhodněte o inflexních bodech.

Vyšetřete derivaci v bodě $x = 0$.

Věta 7.15

(nutná podm. pro inflexi)

Je-li x_0 inflexním bodem funkce f ,
pak je $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Není to však podmínka postačující !!!

Věta 7.17 (postačující podm. pro inflexní bod pomocí 3. derivace)

Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak je x_0 inflexním bodem funkce f .

Příklad: Určete inflexní body funkce

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12.$$

Výsledek:

Inflexní body jsou $x = 1/3$, $x = 1$.

Věta 7.17

(Zobecněná PP pro lokální extrém
a inflexi pomocí derivací)

Nechť $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Je-li n liché, pak je x_0 inflexním bodem funkce f .

Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Je-li n liché, pak x_0 je inflexním bodem funkce f .

Asymptoty

Říkáme, že **přímka $x = x_0$ je svislou asymptotou** grafu funkce f v bodě x_0 , jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 je nevlastní.

Přímka $y = kx + q$ se nazývá šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \rightarrow +\infty$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$$

Věta 8.2 Přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \rightarrow +\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}$$

Taylorův polynom n -tého stupně funkce f o středu v bodě x_0 :

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0 .

Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost),

které se dopustíme při nahrazení (při aproximaci)

hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$

Věta Taylorova Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n + 1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 .

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Odhad této chyby shora:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x \rangle$, resp. $\langle x, x_0 \rangle$.

Příklad. a) Pro $f(x) = \sin x$ napište $T_3(x)$ o středu $x_0 = 0$.

b) Určete $\sin(3/4)$ přibližně pomocí $T_3(x)$.

c) Lagrangeův tvar zbytku a odhad chyby při aproximaci z a).

d) Odhad chyby při aproximaci polynomem $T_7(x)$.

Příklad. a) Pro $f(x) = x + 1 + \sqrt{2x - 1}$ napište $T_2(x)$ o středu $x_0 = 1$.

b) Určete $f(3/2)$ přibližně pomocí $T_2(x)$.

c) Lagrangeův tvar zbytku a odhad chyby při aproximaci z a).

Příklad. a) Napište $T_4(x)$, $x_0 = 0$ pro $f(x) = \cos x$.

b) Vypočítejte přibližně $\cos 0,4$ pomocí $T_4(x)$.

b) Odhadněte chybu při této aproximaci.

Oskulační kružnice.

v bodě $[x_0, y_0]$ dotyk řádu 2 s grafem dané funkce

$1/r$ je křivost funkce f v bodě $[x_0, y_0]$