

Diferenciální počet (doporučené příklady a průpravné úlohy)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Většina úloh diferenciálního počtu vyžaduje dokonalou znalost derivování. K procvičení lze použít Sbíрку příkladů z Matematiky I ze seznamu literatury.

I. Příklady doporučené k samostanému počítání

1. Vybrané úlohy ze zkouškových testů, a to podle úrovně zkoušky. Jsou obsaženy v poslední kapitole zmíněné sbírky.

2. Další příklady z této Sbířky, kapitola II (Diferenciální počet), a to:

a) Ke zkoušce Alfa (podle času) spočítat napříč kapitolou co nejvíce příkladů, jejichž čísla jsou podtržena.

b) Ke zkoušce Beta následující příklady ze Sbířky (je to minimální výčet napříč kapitolou)

Limita posloupnosti a limita funkce: 218, 223-225, 236, 347, 351, 352, 355, 365, 376, 387, 393, 394, 399, 407, 412. Tečna ke grafu, diferenciál: 520 - 523, 526, 527.

Průběh funkce (nebo části této úlohy, bez asymptot): 553-558, 564, 565, 568, 570, 572, 575, 606, 621, 625, 626, 628, 631.

Taylorův polynom (bez odhadu chyby): 645, 648, 652, 654, 657, 658, 660-662.

II. Průpravné úlohy (většinou ke zkoušce Beta)

Určete definiční obor a najděte průsečíky grafu dané funkce s osami

1. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 1}$ $D(f) = (-\infty, +\infty)$, průsečíky: $[0, -6]$, $[-2, 0]$, $[3, 0]$
2. $f(x) = (x + 2)e^x$ $D(f) = (-\infty, +\infty)$, průsečíky: $[0, 2]$, $[-2, 0]$
3. $f(x) = (x - 5)\sqrt{x}$ $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle$, průsečíky: $[0, 0]$, $[5, 0]$
4. $f(x) = \sqrt{2x + 3} - x$ $D(f) = \langle -3/2, +\infty \rangle$, průsečíky: $[0, \sqrt{3}]$, $[3, 0]$, pozor: $[-1, 0]$ není průsečík
5. $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x + 2}}$ $D(f) = (-2, +\infty)$, průsečíky: $[0, -1/\sqrt{2}]$, $[1, 0]$

Pomocí l'Hospitalova pravidla určete limity (ověřte, že tento postup lze použít)

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/2 + 2 \sin x}{\cos 2x - e^{3x}}$ výsl.: $-2/3$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x/3 + \operatorname{tg} x}$ výsl.: $-3/2$

Určete definiční obor a vypočítejte limity v jeho krajních bodech

8. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ výsl.: $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$
9. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x}$ výsl.: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$
10. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ výsl.: $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$

Určete derivaci a najděte body, ve kterých je tato derivace nulová.

11. $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ výsl.: $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$, $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x = 2$
12. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x}$ výsl.: $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x = -2, x = 2$
13. $f(x) = (x + 1)e^x$ výsl.: $f'(x) = (x + 2)e^x$, $D(f') = (-\infty, +\infty)$, $x = -2$
14. $f(x) = \sqrt{2x - 3} - x$ výsl.: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}} - 1$, $D(f') = (3/2, +\infty)$, $x = 2$
15. $f(x) = x \ln x$ výsl.: $f'(x) = \ln x + 1$, $D(f') = (0, +\infty)$, $x = 1/e$
16. $f(x) = x^2 \sqrt{x + 2}$ výsl.: $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x + 2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x + 2}}$, $D(f') = (-2, +\infty)$, $x = 0, x = -8/5$
17. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$ výsl.: $f'(x) = x - \frac{1}{x}$, $D(f') = (0, +\infty)$, $x = 1$
18. $f(x) = e^{3x - x^2}$ výsl.: $f'(x) = e^{3x - x^2} \cdot (3 - 2x)$, $D(f') = (-\infty, +\infty)$, $x = 3/2$

Literatura:

- [1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (též 2008, 2010).
- [2] S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: Sběrka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
- [3] E. Brožíková, M. Kittlerová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.