

## Výpočet druhé derivace implicitně zadané funkce jedné proměnné (pracovní text)

*Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )*

Následující stručný přehled popisuje tři možnosti výpočtu druhé derivace funkce jedné proměnné  $y = f(x)$ , která je implicitně určena zadanou rovnicí  $F(x, y) = 0$  v okolí daného bodu  $A = [x_0, y_0]$  (při splnění postačujících podmínek pro existenci podle Věty I.7.2. ze skriptu [1]).

**Upozornění:** Výpočet podle 1. nebo 2. možnosti vyžaduje znalost (a správné použití) toho, že  $y = y(x)$  je funkce jedné proměnné  $x$ . Výpočet podle 3. možnosti (podle vzorce) vyžaduje jenom parciální derivace zadané funkce  $F(x, y)$ . Použití u zkoušky proto předpokládá dokonalou znalost vzorce a bezchybný výpočet parciálních derivací.

**Postup č. 1:** Druhou derivaci  $y'' = f''(x)$  počítáme derivováním první derivace s využitím vztahu pro

$$1. \text{ derivaci ze zmíněné Věty I.7.2: } y' = f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \text{ kde } y = f(x) \quad (1)$$

$$\text{Pak pro druhou derivaci platí: } y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\right), \quad (2)$$

kde  $y = f(x)$ .

Při výpočtu je nutno dávat pozor mimo jiné na to, že proměnnou  $x$  v zápise  $y(x)$  z důvodu přehlednosti zpravidla nezapisujeme. V následujících dvou příkladech derivování je zadání i výsledek zapsán právě v tomto stručném tvaru, mezivýsledky v podrobném tvaru s  $y(x)$ .

**Př.**  $\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(e^{y(x)}) = e^{y(x)} \cdot y'(x) = e^y \cdot y'$ , neboť se jedná o derivaci složené funkce.

**Př.**  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} y) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x} y(x)) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} y(x) + \sqrt{x} y'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} y + \sqrt{x} y'$ , zde se jedná o derivaci součinu.

**Výpočet je ukázán** v řešených příkladech 166 a 168 ve Sbírce [2].

**Postup č. 2:** Nahlížíme na  $y$  opět jako na funkci proměnné  $x$ . Je tedy  $F(x, y(x)) = 0$  pro všechna  $x$  z nějakého okolí  $U(x_0)$ .

$$\text{Derivace podle } x \text{ je proto též nulová v } U(x_0): \quad \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0 \quad (3)$$

Pokud potřebujeme, pak z této rovnice můžeme vyjádřit  $y' = f'(x)$ , čímž získáme vztah (1). Po dosazení  $x = x_0, y = y_0$  pak lze vypočítat  $f'(x_0)$ . Jestli nás zajímá pouze hodnota  $f'(x_0)$ , můžeme dosadit přímo do (3), aniž bychom obecně vyjádřili  $y'$ .

Druhou derivaci  $y'' = f''(x)$  vypočítáme po derivování rovnice (3), přičemž  $y'$  je funkce proměnné  $x$ .

**Příklad** je vypočten níže spolu s poznámkou o ještě jiné možnosti, totiž kombinaci obou postupů: nejprve výpočet 1. derivace podle vzorce z Postupu č. 1 a pak výpočet 2. derivace podle Postupu č. 2.

**Postup č. 3:** Předpokládejme opět splnění postačujících podmínek ( předpokladů) Věty I.7.2, tj. též spojitost parciálních derivací 2. řádu dané funkce  $F$ . Ve skriptu [1] v odst. I.7.3 je odvozen vzorec pro přímý výpočet druhé derivace

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3} \quad (4)$$

Všechny derivace funkce  $F$  jsou v bodě  $[x, f(x)]$ . Dosadíme-li  $x = x_0, y = y_0$ , vypočítáme hodnotu 2. derivace  $f''(x_0)$ .

Lze dokázat ( a můžete si sami ověřit), že vzorec lze zapsat pomocí determinantu:

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{(F_y)^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \quad (5)$$

**Příklad** výpočtu podle Postupu č.2.

Dána rovnice  $F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$  a bod  $A = [x_0, y_0] = [2, -1]$ . Určete hodnoty 1. a 2. derivace v bodě  $x_0 = 2$  funkce  $y = f(x)$ , která je implicitně určena rovnicí  $F(x, y) = 0$ .

Je to příklad 183 ze Sbírky [2], kde jsou uvedeny dílčí výsledky.

**Řešení.** Ověřte si splnění postačujících podmínek, tj. předpokladů Věty 7.2 pro existenci a jednoznačnost funkce  $y = f(x)$  se spojitými derivacemi. Při jejich výpočtu máme na paměti, že  $y$  je funkce proměnné  $x$ . Je tedy výraz  $x^2y = x^2y(x)$  součinem funkcí jedné proměnné  $x$ . Podobně  $y^4 = y^4(x)$  je složená funkce proměnné  $x$ , vnější funkce je 4. mocnina.

V rovnici  $F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$

derivujeme  $F$  jako funkci jedné proměnné  $x$ . Z důvodu přehlednosti píšeme  $y$  místo  $y(x)$ , podobně stručně  $y'$  místo  $y'(x)$ .

$$3x^2 + 4xy + 2x^2y' + 4y^3y' = 0 \quad (6)$$

Dosadíme  $x = 2, y = -1$  a vypočítáme  $y'(2) = -1$ .

Před výpočtem 2. derivace je výhodné v rovnici (6) vytknout  $y'$ .

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 4y^3)y' = 0 \quad (6a)$$

Nezapomeneme, že  $y'$  je funkce proměnné  $x$  a rovnici (6a) derivujeme

$$6x + 4y + 4xy' + (4x + 12y^2y')y' + (2x^2 + 4y^3)y'' = 0 \quad (7)$$

Dosadíme  $x = 2, y = -1, y' = -1$  (hodnotu  $y'$  jsme získali z rovnice (6)) a vypočítáme, že  $y''(2) = -1$ .

**Poznámka.**

V případě potřeby můžeme z rovnice (6a) získat derivaci  $f'(x)$ :  $y' = f'(x) = -\frac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 4y^3}$ . (8)

Podobně lze z rovnice (7) vyjádřit druhou derivaci  $f''(x)$ .

Trochu rychlejší výpočet nabízí **kombinace obou postupů**. Podle vzorce (1), v našem příkladu to je vztah (8), máme vyjádření pro  $y'$ . Můžeme z něho vypočítat derivaci  $f'(2) = -1$ , pokud je požadována. Vynásobíme-li rovnici (8) výrazem ve jmenovateli (což je  $F_y$ ), získáme vztah (6a) ve tvaru rovnice

$$(2x^2 + 4y^3)y' = -(3x^2 + 4xy) \quad (9)$$

Odtud pokračujeme výše uvedeným derivováním a získáme rovnici pro druhou derivaci  $y'' = f''(x)$  ve tvaru

$$(4x + 12y^2y')y' + (2x^2 + 4y^3)y'' = -(6x + 4y + 4xy') \quad (10)$$

Tím máme i rovnici, ze které po dosazení  $x = 2, y = -1, y' = -1$  vypočítáme hodnotu  $f''(2) = -1$ .

**Poznámka.**

Ze znalosti hodnoty derivace  $f'(x_0)$  a hodnoty 2. derivace  $f''(x_0)$  lze už rychle řešit **další dílčí úlohy**:

a) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce  $f$  v bodě dotyku  $[x_0, y_0]$ .

Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně funkční hodnotu  $f(\bar{x})$ , kde  $\bar{x}$  leží "blízko" bodu  $x_0$ .

Popište chování funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$ , tj. rostoucí, resp. klesající a jak rychle (sklon tečny).

b) Je funkce  $f$  ryze konvexní, resp. konkávní v okolí bodu  $x_0$  ?

Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce  $f$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ .

Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce  $f$  se středem v bodě  $x_0$ . Užitím tohoto polynomu vypočítejte přibližně hodnotu funkce  $f$  v bodě  $\bar{x}$ .

Má funkce  $f$  lokální extrém v bodě  $x_0$ ? Pokud ano, jaký ?

Literatura k tomuto tématu:

[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2018.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová, F. Mráz: **Sbírka příkladů z Matematiky II.** Webové stránky Ústavu technické matematiky, FS ČVUT v Praze, předmět Matematika II, vlákno Doporučená literatura.