Výpočet druhé derivace implicitně zadané funkce jedné proměnné (přehled - pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Následující stručný přehled popisuje tři možnosti výpočtu druhé derivace funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která je implicitně určena zadanou rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí daného bodu $A = [x_0, y_0]$. To za předpokladu, že jsou splněny postačující podmínky pro existenci podle Věty I.7.2. ze skripta [1]).

Upozornění.

Výpočet podle 1. nebo 2. možnosti vyžaduje znalost (a správné použití) toho, že $y = y(x)$ je funkce jedné proměnné x. Při výpočtu je proto nutné dávat pozor mimo jiné na to, že proměnnou x v zápise $y(x)$ z důvodu přehlednosti zpravidla nezapisujeme. V následujících dvou průpravných příkladech derivování je zadání i výsledek zapsán právě v tomto stručném tvaru, mezivýsledky v podrobném tvaru s $y(x)$.

Př. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\mathrm{e}^{y}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\mathrm{e}^{y(x)}) = \mathrm{e}^{y(x)} \cdot y'(x) = \mathrm{e}^{y} \cdot y'$, neboť se jedná o derivaci složené funkce.

Př. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\sqrt{x}\; y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\sqrt{x}\; y(x)) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\; y(x) + \sqrt{x}\; y'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\; y + \sqrt{x}\; y'$, zde se jedná o derivaci součinu.

Výpočet podle 3. možnosti (podle vzorce) vyžaduje jenom parciální derivace zadané funkce $F(x, y)$. Použití u zkoušky proto předpokládá dokonalou znalost vzorce a bezchybný výpočet parciálních derivací.

Postup č. 1: Druhou derivaci $y'' = f''(x)$ počítáme derivováním první derivace s využitím vztahu pro 1. derivaci ze zmíněné Věty I.7.2:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}), \text{ kde } y = f(x). \tag{1}$$

Pak pro druhou derivaci platí:

$$y'' = f''(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\right), \text{ kde } y = f(x). \tag{2}$$

Výpočet je ukázán v řešeném příkladu 166 ve Sbírce [2].

Postup č. 2: Nahlížíme na y opět jako na funkci proměnné x. Je tedy $F(x, y(x)) = 0$ pro všechna x z nějakého okolí $U(x_0)$.

Derivace podle x je proto též nulová v $U(x_0)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,F(x, y(x)) = 0 \tag{3}$$

Pokud potřebujeme, pak z takto získané rovnice můžeme vyjádřit $y' = f'(x)$, čímž získáme vztah (1). Jestli nás zajímá pouze hodnota $f'(x_0)$, můžeme dosadit $x = x_0$, $y = y_0$ přímo do (3), aniž bychom obecně vyjádřili y'.

Druhou derivaci $y'' = f''(x)$ vypočítáme po dalším derivování rovnice (3), přičemž y' je funkce proměnné x.

Popsaný výpočet je použit v řešeném příkladu 168 ve Sbírce [2]. Další **Příklad** je vypočten níže spolu s poznámkou o ještě jiné možnosti, totiž kombinaci obou postupů: nejprve výpočet 1. derivace podle vzorce z Postupu č. 1 a pak výpočet 2. derivace podle Postupu č. 2.

Postup č. 3: Předpokládejme opět splnění postačujících podmínek (předpokladů) Věty I.7.2, tj. též spojitost parciálních derivací 2. řádu dané funkce F. Ve skriptu [1] v odst. I.7.3 je odvozen vzorec pro přímý výpočet druhé derivace

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}\,(F_y)^2 - 2F_{xy}\,F_x\,F_y + F_{yy}\,(F_x)^2}{(F_y)^3} \tag{4}$$

Všechny parciální derivace funkce F jsou v bodě $[x, y]$, kde $y = f(x)$. Dosadíme-li $x = x_0$, $y = y_0$, vypočítáme hodnotu 2. derivace implicitně zadané funkce, tj. $f''(x_0)$.

Lze dokázat (a můžete si sami ověřit), že vzorec lze zapsat pomocí determinantu:

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{(F_y)^3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Příklad výpočtu podle Postupu č.2. (neřešený příklad 183 ze Sbírky [2]).
Dána rovnice $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$ a bod $A = [x_0, y_0] = [2, -1]$. Určete hodnoty 1. a 2. derivace v bodě $x_0 = 2$ funkce $y = f(x)$, která je implicitně určena rovnicí $F(x,y) = 0$.

Řešení. Ověřte si splnění postačujících podmínek, tj. předpokladů Věty 7.2 pro existenci a jednoznačnost funkce $y = f(x)$ se spojitými derivacemi. Při jejich výpočtu máme na paměti, že y je funkce proměnné x. Je tedy výraz $x^2y = x^2y(x)$ součinem funkcí jedné proměnné x. Podobně $y^4 = y^4(x)$ je složená funkce proměnné x, vnější funkce je 4. mocnina.

V rovnici $\quad F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$

derivujeme F jako funkci jedné proměnné x. Z důvodu přehlednosti píšeme y místo $y(x)$, podobně stručně y' místo $y'(x)$.

$$3x^2 + 4xy + 2x^2\, y' + 4y^3\, y' = 0 \tag{6}$$

Dosadíme $x = 2, y = -1$ a vypočítáme $y'(2) = -1$.

Před výpočtem 2. derivace je výhodné v rovnici (6) vytknout y'.

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 4y^3)\, y' = 0 \tag{6a}$$

Nezapomeneme, že y' je funkce proměnné x a rovnici (6a) derivujeme

$$6x + 4y + 4x\, y' + (4x + 12y^2\, y')\, y' + (2x^2 + 4y^3)\, y'' = 0 \tag{7}$$

Dosadíme $x = 2, y = -1, y' = -1$ a vypočítáme, že $y''(2) = -1$.

Poznámka.
V případě potřeby můžeme z rovnice (6a) získat derivaci $f'(x)$: $\quad y' = f'(x) = -\dfrac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 4y^3}. \qquad (8)$

Podobně lze z rovnice (7) vyjádřit druhou derivaci $f''(x)$.

Trochu rychlejší výpočet nabízí **kombinace obou postupů**. Podle vzorce (1), v našem příkladu to je vztah (8), máme vyjádření pro y'. Můžeme z něho vypočítat derivaci $f'(2) = -1$, pokud je požadována. Vynásobíme-li rovnici (8) výrazem ve jmenovateli (což je F_y), získáme vztah (6a) ve tvaru rovnice

$$(2x^2 + 4y^3)\, y' = -(3x^2 + 4xy) \tag{9}$$

Odtud pokračujeme výše uvedeným derivováním a získáme rovnici pro druhou derivaci $y'' = f''(x)$ ve tvaru

$$(4x + 12y^2\, y')\, y' + (2x^2 + 4y^3)\, y'' = -(6x + 4y + 4x\, y') \tag{10}$$

Tím máme i rovnici, ze které po dosazení $x = 2, y = -1, y' = -1$ vypočítáme hodnotu $f''(2) = -1$.

Poznámka.
Ze znalosti hodnoty derivace $f'(x_0)$ a hodnoty 2. derivace $f''(x_0)$ lze už rychle řešit **další dílčí úlohy**:

a) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$.

Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(\bar{x})$, kde $\bar{x}$ leží "blízko"bodu x_0.
Popište chování funkce f v okolí bodu x_0, tj. rostoucí, resp. klesající a jak rychle (sklon tečny).

b) Je funkce f ryze konvexní, resp. konkávní v okolí bodu x_0 ?

Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce f se středem v bodě x_0. Užitím tohoto polynomu vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $\bar{x}$.

Má funkce f lokální extrém v bodě x_0? Pokud ano, jaký ?

Literatura k tomuto tématu:

[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2018.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová, F. Mráz: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Webové stránky Ústavu technické matematiky, FS ČVUT v Praze, předmět Matematika II, vlákno Doporučená literatura.