Výpočet druhé derivace implicitně zadané funkce jedné proměnné (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Následující stručný přehled popisuje tři možnosti výpočtu druhé derivace funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která je implicitně určena zadanou rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí daného bodu $A = [x_0, y_0]$ (při splnění postačujících podmínek pro existenci podle Věty I.7.2. ze skripta [1]).

Upozornění: Výpočet podle 1. nebo 2. možnosti vyžaduje znalost (a správné použití) toho, že $y = y(x)$ je funkce jedné proměnné x. Výpočet podle 3. možnosti (podle vzorce) vyžaduje jenom parciální derivace zadané funkce $F(x, y)$. Použití u zkoušky proto předpokládá dokonalou znalost vzorce a bezchybný výpočet parciálních derivací.

Postup č. 1: Druhou derivaci $y'' = f''(x)$ počítáme derivováním první derivace s využitím vztahu pro 1. derivaci ze zmíněné Věty I.7.2:

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}), \text{ kde } y = f(x) \qquad (1)$$

Pak pro druhou derivaci platí:

$$y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f'(x)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\right), \qquad (2)$$

kde $y = f(x)$.

Při výpočtu je nutno dávat pozor mimo jiné na to, že proměnnou x v zápise $y(x)$ z důvodu přehlednosti zpravidla nezapisujeme. V následujících dvou příkladech derivování je zadání i výsledek zapsán právě v tomto stručném tvaru, mezivýsledky v podrobném tvaru s $y(x)$.

Př. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{y(x)}\right) = \mathrm{e}^{y(x)} \cdot y'(x) = \mathrm{e}^{y} \cdot y'$, neboť se jedná o derivaci složené funkce.

Př. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\, y\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\, y(x)\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\, y(x) + \sqrt{x}\, y'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\, y + \sqrt{x}\, y'$, zde se jedná o derivaci součinu.

Výpočet je ukázán v řešených příkladech 166 a 168 ve Sbírce [2].

Postup č. 2: Nahlížíme na y opět jako na funkci proměnné x. Je tedy $F(x, y(x)) = 0$ pro všechna x z nějakého okolí $U(x_0)$.

Derivace podle x je proto též nulová v $U(x_0)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y(x)) = 0 \qquad (3)$$

Pokud potřebujeme, pak z této rovnice můžeme vyjádřit $y' = f'(x)$, čímž získáme vztah (1). Po dosazení $x = x_0$, $y = y_0$ pak lze vypočítat $f'(x_0)$. Jestli nás zajímá pouze hodnota $f'(x_0)$, můžeme dosadit přímo do (3), aniž bychom obecně vyjádřili y'.

Druhou derivaci $y'' = f''(x)$ vypočítáme derivováním rovnice (3), přičemž y' je funkce proměnné x.

Příklad je vypočten níže spolu s poznámkou o ještě jiné možnosti, totiž kombinaci obou postupů: nejprve výpočet 1. derivace podle vzorce z Postupu č. 1 a pak výpočet 2. derivace podle Postupu č. 2.

Postup č. 3: Předpokládejme opět splnění postačujících podmínek (předpokladů) Věty I.7.2, tj. též spojitost parciálních derivací 2. řádu dané funkce F. Ve skriptu [1] v odst. I.7.3 je odvozen vzorec pro přímý výpočet druhé derivace

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}\,(F_y)^2 - 2F_{xy}\,F_x\,F_y + F_{yy}\,(F_x)^2}{(F_y)^3} \qquad (4)$$

Všechny derivace funkce F jsou v bodě $[x, f(x)]$. Dosadíme-li $x = x_0$, $y = y_0$, vypočítáme hodnotu 2. derivace $f''(x_0)$.

Lze dokázat (a můžete si sami ověřit), že vzorec lze zapsat pomocí determinantu:

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{(F_y)^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Příklad výpočtu podle Postupu č.2.
Dána rovnice $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$ a bod $A = [x_0, y_0] = [2, -1]$. Určete hodnoty 1. a 2. derivace v bodě $x_0 = 2$ funkce $y = f(x)$, která je implicitně určena rovnicí $F(x,y) = 0$.

Je to příklad 183 ze Sbírky [2], kde jsou uvedeny dílčí výsledky.

Řešení. Ověřte si splnění postačujících podmínek, tj. předpokladů Věty 7.2 pro existenci a jednoznačnost funkce $y = f(x)$ se spojitými derivacemi. Při jejich výpočtu máme na paměti, že y je funkce proměnné x. Je tedy výraz $x^2y = x^2y(x)$ součinem funkcí jedné proměnné x. Podobně $y^4 = y^4(x)$ je složená funkce proměnné x, vnější funkce je 4. mocnina.

V rovnici $\quad F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$

derivujeme F jako funkci jedné proměnné x. Z důvodu přehlednosti píšeme y místo $y(x)$, podobně stručně y' místo $y'(x)$.

$$3x^2 + 4xy + 2x^2\,y' + 4y^3\,y' = 0 \tag{6}$$

Dosadíme $x = 2, y = -1$ a vypočítáme $y'(2) = -1$.

Před výpočtem 2. derivace je výhodné v rovnici (6) vytknout y'.

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 4y^3)\,y' = 0 \tag{6a}$$

Nezapomeneme, že y' je funkce proměnné x a rovnici (6a) derivujeme

$$6x + 4y + 4x\,y' + (4x + 12y^2\,y')\,y' + (2x^2 + 4y^3)\,y'' = 0 \tag{7}$$

Dosadíme $x = 2, y = -1, y' = -1$ (hodnotu y' jsme získali z rovnice (6)) a vypočítáme, že $y''(2) = -1$.

Poznámka.
V případě potřeby můžeme z rovnice (6a) získat derivaci $f'(x)$: $\quad y' = f'(x) = -\dfrac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 4y^3}.\qquad (8)$

Podobně lze z rovnice (7) vyjádřit druhou derivaci $f''(x)$.

Trochu rychlejší výpočet nabízí **kombinace obou postupů**. Podle vzorce (1), v našem příkladu to je vztah (8), máme vyjádření pro y'. Můžeme z něho vypočítat derivaci $f'(2) = -1$, pokud je požadována. Vynásobíme-li rovnici (8) výrazem ve jmenovateli (což je F_y), získáme vztah (6a) ve tvaru rovnice

$$(2x^2 + 4y^3)\,y' = -(3x^2 + 4xy) \tag{9}$$

Odtud pokračujeme výše uvedeným derivováním a získáme rovnici pro druhou derivaci $y'' = f''(x)$ ve tvaru

$$(4x + 12y^2\,y')\,y' + (2x^2 + 4y^3)\,y'' = -(6x + 4y + 4x\,y') \tag{10}$$

Tím máme i rovnici, ze které po dosazení $x = 2, y = -1, y' = -1$ vypočítáme hodnotu $f''(2) = -1$.

Poznámka.
Ze znalosti hodnoty derivace $f'(x_0)$ a hodnoty 2. derivace $f''(x_0)$ lze už rychle řešit **další dílčí úlohy**:

a) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$.

Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(\bar{x})$, kde $\bar{x}$ leží "blízko" bodu x_0.
Popište chování funkce f v okolí bodu x_0, tj. rostoucí, resp. klesající a jak rychle (sklon tečny).

b) Je funkce f ryze konvexní, resp. konkávní v okolí bodu x_0 ?

Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce f se středem v bodě x_0. Užitím tohoto polynomu vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $\bar{x}$.

Má funkce f lokální extrém v bodě x_0? Pokud ano, jaký ?

Literatura k tomuto tématu:

[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2018.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová, F. Mráz: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Webové stránky Ústavu technické matematiky, FS ČVUT v Praze, předmět Matematika II, vlákno Doporučená literatura.