# III. Dvojný a trojný integrál

## III.1. Existence

**Věta (postačující podmínky pro existenci).** *Nechť $D$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v $\mathbb{E}_2$ (resp. $\mathbb{E}_3$) a funkce $f$ je omezená na $D$. Nechť množina bodů nespojitosti funkce $f$ v $D$ má míru 0. Potom $f$ je integrovatelná v $D$, tj. integrál*

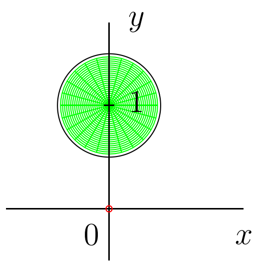
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(resp. } \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\text{)} \qquad \textit{existuje.}$$

POZNÁMKA : Další podrobnosti najdete ve skriptech J.Neustupa: *Matematika II.*

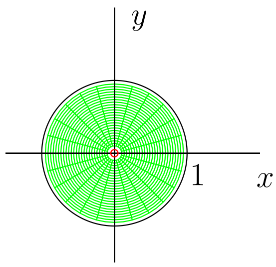
***Příklad* 237**. Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le \frac{1}{4}\}$;
b) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 1\}$;
c) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le 2\}$.

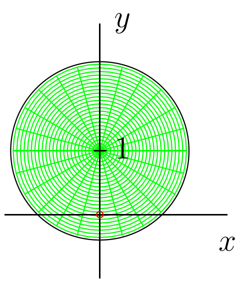
*Řešení :* Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál (vlastní) je definován pouze pro funkce omezené na omezené množině $D$ a dále budeme používat větu o existenci.




Množina $D$ je měřitelná v $\mathbb{E}_2$, neboť $D$ je omezená a její hranice má v $\mathbb{E}_2$ míru 0 a $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na $D$. Integrál existuje.




Množina $D$ je měřitelná, ale $f(x,y)$ není omezená v $D$, protože $[0,0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.




$f(x,y)$ opět není omezená na $D$ $\quad ([0,0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

***Příklad* 238**. Je dána množina $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 4\}$. Vyšetřete, zda existují dvojné integrály :

a) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, b) $\displaystyle\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, c) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$,

d) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+xy}\,dx\,dy$, e) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$.

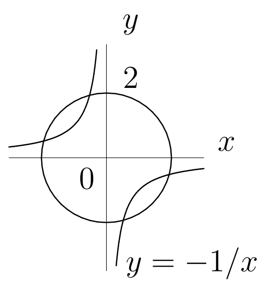
*Řešení :* Množina $D$ je omezená a $\mu_2(\partial D) = 0$, tedy $D$ je měřitelná množina.

a) existuje, neboť $f$ je spojitá v $\mathbb{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 < \infty$,
$\Rightarrow$ funkce je omezená,

b) neexistuje, neboť vzhledem k množině $M = \{[x,y] \in D;\ y = 0, x > 0\}$ je
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{funkce je neomezená,}$$

c) existuje, neboť funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ je spojitá v $D \subset \mathbb{E}_2$,

d) neexistuje, protože vzhledem k množině
$M = \{[x,y] \in D;\ y = -x\}$ je
$$\lim_{[x,y]\to[-1,1]} \left|\frac{1}{1+xy}\right| = \infty,$$




e) neexistuje, protože vzhledem k množině $M = \{[x,y] \in D;\ y = 2x - 3\}$ je
$$\lim_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{1}{(x+y)^2} = \infty.$$

■

***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2\}$,

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3\}$,

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$.

*Řešení :*

a) neexistuje, protože funkce $\dfrac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená na $W$, $\{1+x+z = 0\} \cap W \ne \emptyset$,

b) neexistuje, protože množina $W$ není omezená v $\mathbb{E}_3$,

c) existuje; $W$ je měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$; $x^2+y^2+z^2-9 \ne 0$ ve $W$, tedy integrovaná funkce je spojitá na $W$; $\dfrac{1}{8} < \left|\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\right| < \dfrac{1}{5}$ pro každý bod $[x,y,z] \in W$, tedy funkce je omezená na $W$.

■

## III.2. Fubiniova (Fubiniho) věta pro dvojný integrál

*Množinu* $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, *kde funkce* $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ *jsou spojité na* $< a, b >$ *a* $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$, *nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose* $x$.

*Nechť* $M$ *je elementární obor integrace vzhledem k ose* $x$. *Nechť funkce* $f(x,y)$ *je spojitá v* $M$. *Pak*

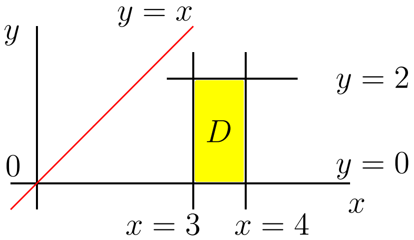
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

POZNÁMKA: Analogicky pro elementární obor vzhledem k ose $y$

- Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách. Zdůvodněte existenci integrálů.

***Příklad* 240**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2 - 2xy + y^2}, \qquad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\}$

*Řešení :*

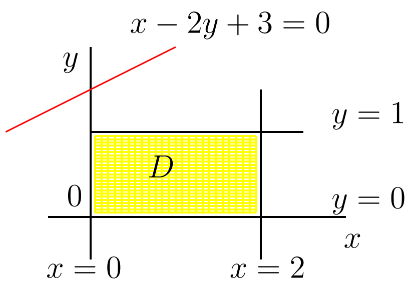



Množina $D$ je ohraničena křivkami $x = 3,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 2$. Je to elementární obor (vzhledem k oběma osám). Daná funkce je na $D$ spojitá, integrál existuje.

$$I = \int_0^2 \Big( \int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2} \Big)\,dy = \int_0^2 \Big[ \frac{-1}{x-y} \Big]_3^4 dy = \int_0^2 \Big( \frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y} \Big)\,dy =$$
$$= \int_0^2 \Big( \frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3} \Big)\,dy = \Big[ \ln|y-4| - \ln|y-3| \Big]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 =$$
$$= \ln \frac{2 \cdot 3}{4} = \ln \frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 241**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x - 2y + 3)^2}, \qquad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

*Řešení :*




Obdélníková množina $D$ je elementární obor, funkce je na $D$ spojitá, integrál existuje.

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^2 \frac{1}{(x-2y+3)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x-2y+3} \right]_0^2 dy =$$
$$= \int_0^1 \left( \frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y} \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3} \right) dy =$$
$$= \left[ \frac{1}{2} \ln|2y-5| - \frac{1}{2} \ln|2y-3| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$ ■

POZNÁMKA: Je-li funkce typu $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ a množina $D$ je obdélník

$$D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle, \text{ pak } \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx \cdot \int_c^d h(y)\, dy.$$

***Příklad* 242.** $I = \displaystyle\iint_D y^2 \sin^2 x\, dx\, dy, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2\}$

*Řešení :* Daná funkce je spojitá na $D$, integrál existuje a lze ho podle poznámky zapsat jako součin jednoduchých integrálů.

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx \cdot \int_1^2 y^2\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}.$$ ■

***Příklad* 243.** $I = \displaystyle\iint_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3}\, dx\, dy, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$

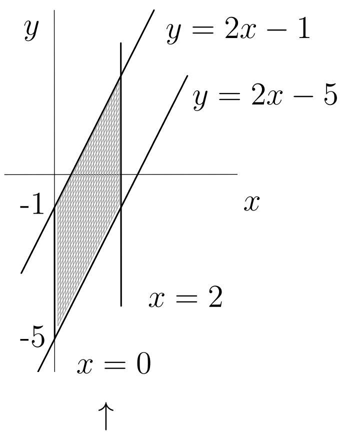
*Řešení :* Na celém $\mathbb{E}_2$ je $y^2 + 3 > 0$ (tedy i na dané množině $D$), proto integrál existuje.

$$I = \int_0^2 x e^{x^2}\, dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3}\, dy = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^4 e^t\, dt \cdot \frac{1}{2} \left[ \ln|y^2+3| \right]_0^3 =$$
$$= \frac{1}{2} \left[ e^t \right]_0^4 \cdot \frac{1}{2} \Big( \ln 12 - \ln 3 \Big) = \frac{1}{2}(e^4-1) \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{12}{3} = \frac{1}{4}(e^4-1) \ln 4 = \frac{1}{2}(e^4-1) \ln 2.$$ ■

• Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a vyjádřete jako elementární obor integrace.

***Příklad* 244.** $2x - y = 1,\ 2x - y = 5,\ x = 0,\ x = 2$

*Řešení :*




$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2x - 5 \le y \le 2x - 1 \end{cases}$$

↑ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na $D$ pomocí Fubiniovy věty.

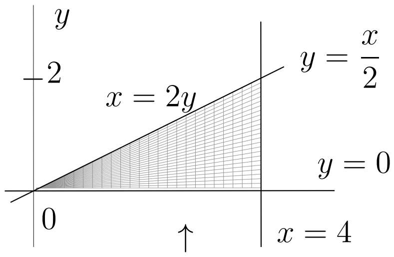
Množina $D$ je elementárním oborem integrace vzhledem k ose $x$.

■

***Příklad* 245**. $y = 0,\ x = 2y,\ x = 4$

*Řešení :*

$\rightarrow$




1) $\uparrow$
$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

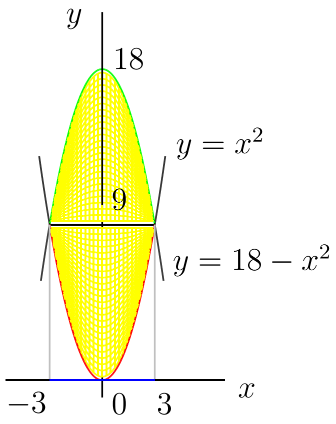
nebo

2) $\rightarrow$
$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 2y \le x \le 4 \end{cases}$$

$D$ je elementární oblast integrace vzhledem k ose $x$ 1) $\uparrow$ i k ose $y$ 2) $\rightarrow$

■

***Příklad* 246**. $y = 18 - x^2,\ y = x^2$




$\uparrow$

$$18 - x^2 = x^2 \implies x^2 = 9 \implies x_{1,2} = \pm 3$$

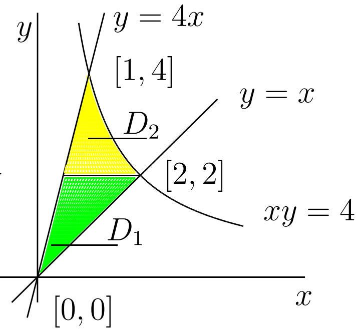
$\uparrow$
$$D : \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x^2 \le y \le 18 - x^2 \end{cases}$$

■

***Příklad* 247**. $xy = 4,\ y = x,\ y = 4x,\ (x \ge 0)$

*Řešení :*

$\rightarrow$




$D = D_1 \cup D_2$, elementární obor vzhledem k ose $y$

$\rightarrow$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \dfrac{y}{4} \le x \le y \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ \dfrac{y}{4} \le x \le \dfrac{4}{y} \end{cases}$$

■

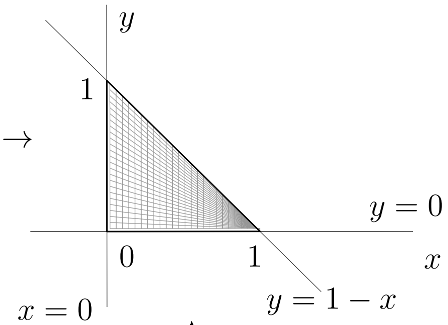
• Zaměňte pořadí integrace :

***Příklad* 248**. $I = \int_0^1 \Big( \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

*Řešení :*

1) $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$ $\rightarrow$

$\uparrow$




$\uparrow$

2) $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases}$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big( \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

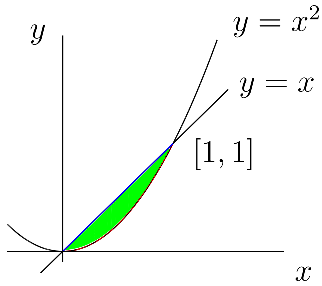
■

***Příklad* 249**. $I = \int_0^1 \Big( \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

*Řešení :*

1) $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$ $\rightarrow$

$\uparrow$




$\uparrow$

2) $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big( \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 250**. $I = \int_0^4 \Big( \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

*Řešení :* Ze zadání plyne, že množina $D$ je elementární obor vzhledem k ose $x$.

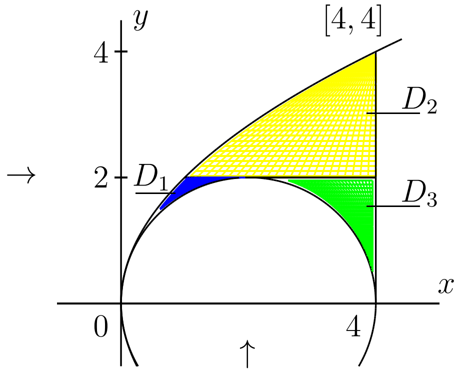
1) $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x} \end{cases}$

$\uparrow$

Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :
$y = \sqrt{4x-x^2}$ , což je rovnice "horní" poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
$y = \sqrt{4x}$ , což je rovnice "horní" větve paraboly $y^2 = 4x$,
$x = 4, \quad x = 0.$

2) Vzhledem k ose $y$ rozdělíme množinu $D$ na tři části tak, aby tyto části byly elementárními obory integrace.

$\rightarrow \qquad D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$




$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \dfrac{y^2}{4} \le x \le 2 - \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ \dfrac{y^2}{4} \le x \le 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 2 + \sqrt{4 - y^2} \le x \le 4 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \Big( \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_2^4 \Big( \int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_0^2 \Big( \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

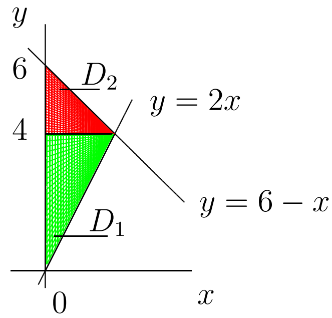
■

***Příklad* 251**. $I = \displaystyle\int_0^4 \Big( \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_4^6 \Big( \int_0^{6-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

*Řešení :* Množina $D$ je sjednocení množin $D_1 \cup D_2$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 4 \le y \le 6 \\ 0 \le x \le 6 \end{cases}$$




Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu $D$ bez předcházejícího dělení :

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2x \le y \le 6 - x \end{cases}$$

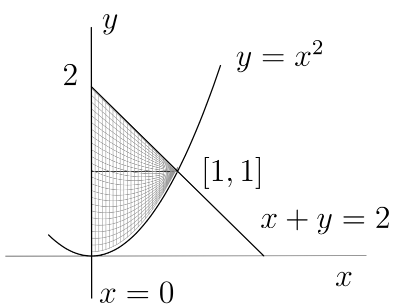
$$I = \int_0^2 \Big( \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Pomocí Fubiniho věty převeďte dvojný integrál $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na dvojnásobné integrály pro oba směry integrace, jestliže množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :

***Příklad* 252**. $x = 0,\ y = x^2,\ x + y = 2\ (x \ge 0)$

*Řešení :*



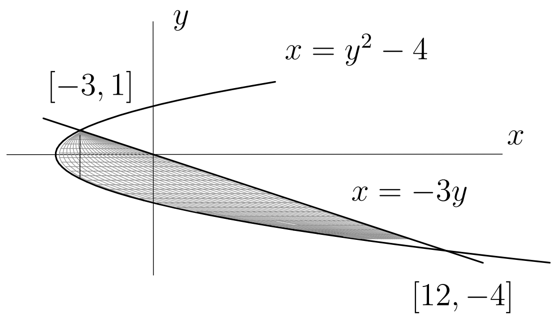

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big( \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Big( \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_1^2 \Big( \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 253**. $x = y^2 - 4,\ x = -3y$

*Řešení :* Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.



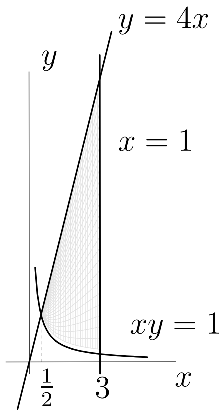

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-4}^{1}\Big(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy =$$
$$= \int_{-4}^{-3}\Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-3}^{12}\Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

■

• Načrtněte zadanou množinu $D \subset \mathbb{E}_2$ a vypočítejte dané integrály :

***Příklad* 254**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \quad D : xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3$

*Řešení :*

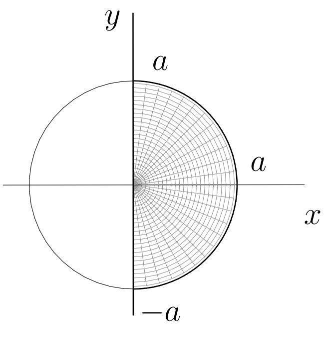



$$I = \int_{1/2}^{3}\Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_{1/2}^{3} x^2\Big[-\frac{1}{y}\Big]_{1/x}^{4x}\,dx =$$
$$= \int_{1/2}^{3} x^2\Big(-\frac{1}{4x} + x\Big)\,dx = \int_{1/2}^{3}\Big(x^3 - \frac{x}{4}\Big)\,dx =$$
$$= \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8}\Big]_{1/2}^{3} = \frac{1225}{64}$$

■

***Příklad* 255**. $I = \displaystyle\iint_D x^3y^2\,dx\,dy, \quad D : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0$

*Řešení :*




$$I = \int_{-a}^{a}\Big(\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3y^2\,dx\Big)\,dy = \int_{-a}^{a} y^2\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy =$$
$$= \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{4}(a^2-y^2)^2\,dy = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a y^2(a^4 - 2a^2y^2 + y^4)\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[a^4\frac{y^3}{3} - 2a^2\frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7}\Big]_0^a = \frac{1}{2}a^7\Big(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\Big) = \frac{4}{105}a^7$$

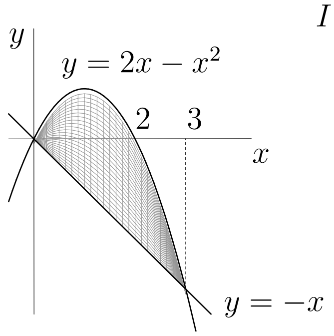
■

***Příklad* 256**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+1}, \quad D : y = 2x - x^2,\ y = -x$

*Řešení :* $y = 2x - x^2$ neboli $\quad y - 1 = -(x-1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1,1]$.

Průsečíky paraboly s přímkou $y = -x$ najdeme tak, že zjistíme jejich $x$-ové souřadnice :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{array} \right. \quad \text{po dosazení} \quad \begin{array}{l} -x = 2x - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x(x-3) = 0 \\ \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3 \end{array}$$




$$I = \int_0^3 \Big( \int_{-x}^{2x-x^2} \frac{dy}{x^2+1} \Big)\, dx = \int_0^3 \frac{1}{x^2+1}(2x - x^2 + x)\, dx =$$

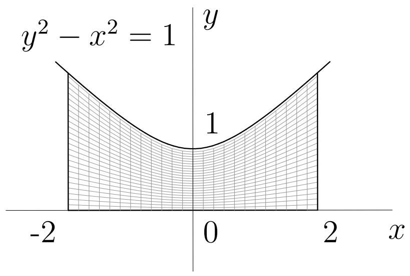
$$= \int_0^3 \frac{-x^2+3x}{x^2+1}\, dx = -\int_0^3 \frac{x^2+1-3x-1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= -\int_0^3 \Big( 1 - 3\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \Big)\, dx = -\Big[ x - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x \Big]_0^3 = \frac{3}{2}\ln 10 + \operatorname{arctg} 3 - 3$$

■

***Příklad* 257**. $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\, dx\, dy, \quad D : y^2 - x^2 \le 1,\ y \ge 0,\ x \in \langle -2, 2 \rangle$

*Řešení :* $y^2 - x^2 = 1$ je rovnice hyperboly .




$$I = \int_{-2}^2 \Big( \int_0^{\sqrt{1+x^2}} (x+y)\, dy \Big)\, dx = \int_{-2}^2 \Big[ xy + \frac{y^2}{2} \Big]_0^{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \int_{-2}^2 \Big( x\sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2} \Big)\, dx = \underbrace{\int_{-2}^2 x\sqrt{1+x^2}\, dx}_{=\ 0\ (\text{lichá funkce})} +$$

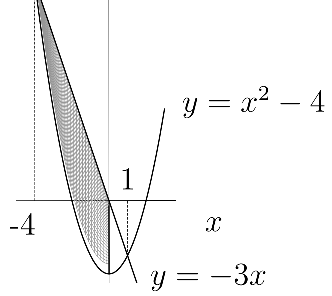
$$+ \frac{2}{2}\int_0^2 \underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}}\, dx = \Big[ x + \frac{x^3}{3} \Big]_0^2 = \frac{14}{3}$$

■

***Příklad* 258**. $I = \displaystyle\iint_D (1+x)\, y\, dx\, dy, \quad D : y \ge x^2 - 4,\ y \le -3x,\ x \le 0$

*Řešení :* Stanovíme $x$-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{array} \right. . \quad \text{Po dosazení} \quad \begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = -4 \end{array}$$




$$I = \int_{-4}^0 \Big( \int_{x^2-4}^{-3x} (1+x) y\, dy \Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^0 (1+x) \Big[ y^2 \Big]_{x^2-4}^{-3x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^0 (1+x)(9x^2 - (x^2-4)^2)\, dx =$$

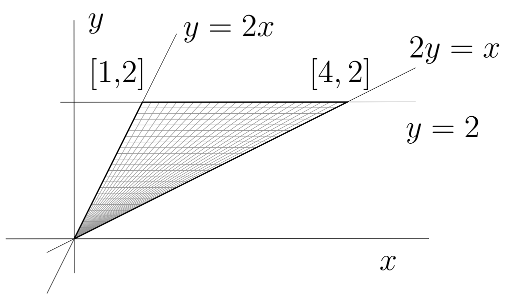
$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^0 (-x^5 - x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 16x - 16)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[ -\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{17x^4}{4} + \frac{17x^3}{3} - 8x^2 - 16x \Big]_{-4}^0 = \frac{-1376}{15}$$

■

***Příklad* 259**. $\displaystyle\iint_D (x+1)\,dx\,dy, \quad D: y=2x,\ 2y=x,\ y=2$

*Řešení :*

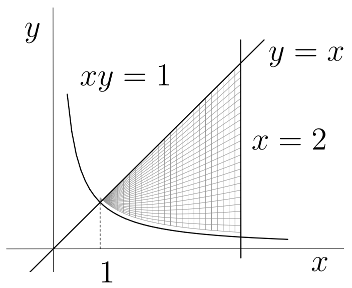



$$\iint_D (x+1)\,dx\,dy = \int_0^2 \Big(\int_{y/2}^{2y} (x+1)\,dx\Big)\,dy =$$
$$\int_0^2 \Big[\frac{x^2}{2}+x\Big]\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{4y^2}{2}+2y-\frac{y^2}{8}-\frac{y}{2}\Big]\,dy =$$
$$\int_0^2 \Big[\frac{15}{8}y^2+\frac{3}{2}y\Big]\,dy \cdots = 8$$

■

***Příklad* 260**. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy, \quad D: xy\ge 1,\ y\le x,\ x\le 4,\ x\ge 0$

*Řešení :*




$$\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_1^4 \Big(\int_{1/x}^{x} \frac{1}{y}\,dy\Big)\,dx = \int_1^4 \Big[\ln|y|\Big]_{1/x}^{x}\,dx =$$
$$= \int_1^4 \Big(\ln x - \ln\frac{1}{x}\Big)\,dx = 2\int_1^4 \ln x\,dx = \text{(per partes)}$$
$$= \begin{vmatrix} u=\ln x, & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x}, & v=x \end{vmatrix} = 2\Big[x\ln x - x\Big]_1^4 = 8\ln 4 - 6$$

■

**261**. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}, \quad D: x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2$ $\Big[\ln\frac{25}{24}\Big]$

**262**. $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ [-2]

**263**. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D: y=0,\ y=1-x,\ y=1+x$ $\Big[\frac{1}{3}\Big]$

**264**. $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy, \quad D: x=y^2-4,\ x=5$ [50,4]

**265**. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D: y=x-4,\ y^2=2x$ [90]

**266**. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y+1}\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=2,\ y=4,\ y^2=x$ $\Big[4+\ln\frac{5}{3}\Big]$

**267**. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: y^2=x,\ y^2=4x,\ y=2$ $\Big[\frac{5}{4}\Big]$

**268**. $\displaystyle\iint_D (xy+y)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ x=2,\ xy=4,\ y=0$ $\Big[4+8\ln 2\Big]$

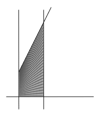
**269**. Převeďte dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace) a integrál vypočítejte.

a) $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y\ge\ln x,\ x\ge 1,\ y\le 1\}, f(x,y)=1/x$ [1/2]

b) $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\le 0\}, f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ [2/3]

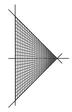
- Omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami a je dána funkce $f(x, y)$
  a) Načrtněte množinu $D$ s popisem os, křivek a důležitých bodů.
  b) Množinu $D$ vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace vzhledem ke vhodně zvolené ose.
  c) Ověřte splnění předpokladů Fubiniho věty. Vypočítejte $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

**270**. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le\ 2x + 1\}, \quad f(x, y) = x^2 y$



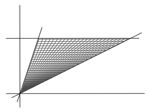
$\left[\ b)\ x \in \langle 0, 1\rangle \quad y \in \langle 0, 2x + 1\rangle \quad c)\ \dfrac{16}{15}\ \right]$

**271**. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x + y \le \pi,\ x - y \le \pi,\ x \ge 0\} \quad f(x, y) = \sin(x + y)$ $[\pi]$



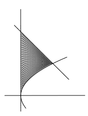
$\left[\ b)\ x \in \langle 0, 1\rangle \quad y \in \langle x - \pi, -x + \pi\rangle \quad c)\ \pi\ \right]$

**272**. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x/2$, $y = 3x$, $y = 2 \quad f(x, y) = x\sqrt{y}$



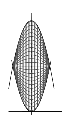
$\left[\ b)\ y \in \langle 0, 2\rangle \quad x \in \langle y/3, 2y\rangle \quad c)\ \dfrac{40\sqrt{2}}{9}\ \right]$

**273**. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x \ge 0,\ x + y \le\ 2,\ x \le y^2\} \quad f(x, y) = xy$



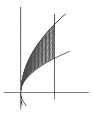
$\left[\ b)\ x \in \langle 0, 1\rangle \quad y \in \langle \sqrt{x}, 2 - x\rangle \quad c)\ \dfrac{7}{24}\ \right]$

**274**. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ y \ge x^2,\ y \le 12 - x^2\} \quad f(x, y) = |x|$



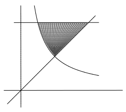
$\left[\ b)\ -\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6} \quad x^2 \le y \le 12 - x^2 \quad c)\ 36\ \right]$

**275**. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1 \quad f(x, y) = 2xy$



$\left[\ b)\ 0 \le x \le 1 \quad \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x} \quad c)\ 1\ \right]$

**276**. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $y = 2$ $\quad f(x, y) = xy^2$



$\left[\begin{array}{l} b) \quad 1 \le y \le 2 \\ \quad 1/y \le x \le y \\ c)\ 13/5 \end{array}\right]$

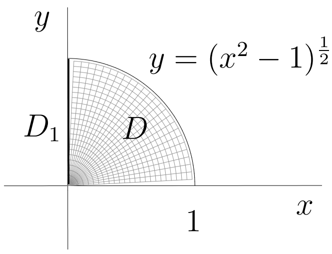
## III.3. Substituční metoda pro dvojný integrál

*Nechť existuje vzájemně jednoznačné regulární zobrazení oblasti $B \subset \mathbb{E}_2$ na oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ definované rovnicemi $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$. Pak*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_B f\Big(\phi_1(u, v),\ \phi_2(u, v)\Big)|J|\,du\,dv, \text{ kde } J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

***Příklad* 277**. Rozhodněte, zda existuje integrál $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$ $x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0,\ x \ge 0\}$. Pokud ano, spočítejte jej.

*Řešení :*




Množina $D$ je měřitelná v $\mathbb{E}_2$.
Funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ není definována na množině $D^* = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x = 0\}$. Množina bodů nespojitosti funkce $f$ v $D$, tj. $D_1 = \{[x, y] \in D : x = 0, y \in < 0, 1 >\}$ je množina míry nula v $\mathbb{E}_2$.
Dále platí, že funkce $f$ je omezená na množině $D \setminus D_1$, proto daný integrál existuje.

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ J = r & & \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 \varphi \cdot r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

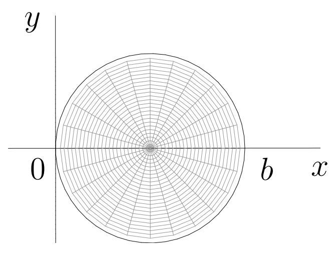
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 r\,dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}.$$ ■

• Vypočítejte integrály :

***Příklad* 278**. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 - bx \le 0\}$, $b > 0$

*Řešení :*

$$D : \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} x^2+y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big( \int_0^{b\cos\varphi} r\cdot r\,dr \Big)\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{b\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}b^3\cdot\frac{2}{3\cdot 1}\cdot 1 = \frac{4}{9}b^3.$$ ■

***Příklad* 279**. $\displaystyle\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D = \{[x,y]\in\mathbb{E}^2 : x^2+y^2 \le a^2,\ x \le 0\}$

*Řešení :*

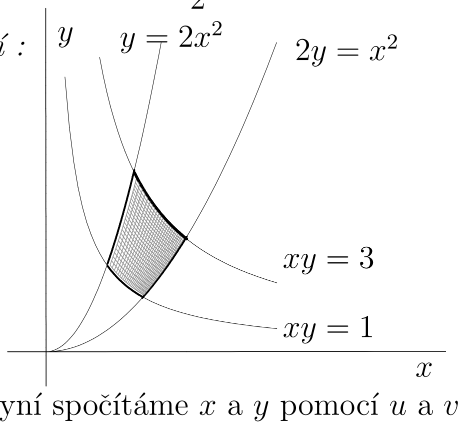
$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} 0 \le r \le a \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\,dr = \left[ \begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{array} \right] =$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_1^{1+a^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\Big((1+a^2)\ln(1+a^2) - a^2\Big).$$ ■

***Příklad* 280**.* $\displaystyle\iint_D x^3\,dx\,dy$, kde $D \subset \mathbb{E}_2$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1,\ xy = 3,$ $y = \dfrac{x^2}{2},\ y = 2x^2.$

*Řešení :*




Použijeme transformaci $\left\{ \begin{array}{l} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{array} \right.$

$D \implies D^*$, kde

$D^* = \{[u,v]\in\mathbb{E}_2 : 1 \le u \le 3,\ \ \frac{1}{2} \le v \le 2\}.$

Nyní spočítáme $x$ a $y$ pomocí $u$ a $v$ a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2,\quad \frac{u}{x} = vx^2 \Longrightarrow x^3 = \frac{u}{v},\quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \Longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{array} \right| = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \ne 0.$$

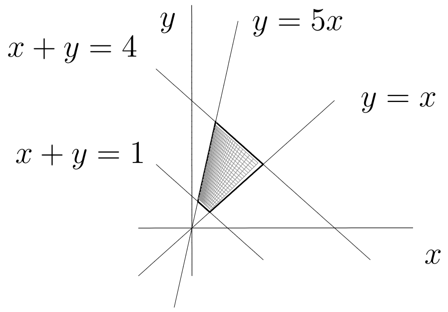
Užitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \iint_{D^*} \frac{u}{v}\cdot J\,du\,dv = \int_{1/2}^2 \Big(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\Big)\,dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2}\,dv\cdot\int_1^3 u\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{v}\Big]_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2.$$ ■

***Příklad* 281**.* $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy,\ D\subset\mathbb{E}_2$ je omezená přímkami $x+y=1,\ x+y=4,$ $y=x,\ y=5x$

*Řešení :*




Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left.\begin{aligned} x+y&=u\\ \frac{y}{x}&=v\end{aligned}\right\},\quad D\quad\Longrightarrow\quad D^*,\quad \text{kde}$$

$$D^*=\{[u,v]\in\mathbb{E}_2: 1\le u\le 4,\quad 1\le v\le 5\}.$$

Potom $\left.\begin{aligned} x&=\frac{u}{1+v}\\ y&=\frac{uv}{1+v}\end{aligned}\right\}$ ; $J=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2}\\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^3}+\frac{uv}{(1+v)^3}=\frac{u}{(1+v)^2}\neq 0;$

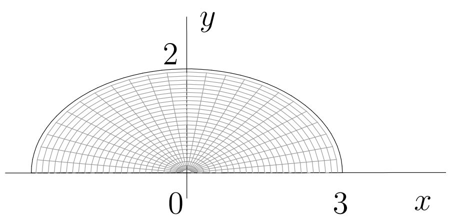
$$\iint_D (2x-y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}\Big(\frac{2u}{1+v}-\frac{uv}{1+v}\Big)\cdot J\,du\,dv=\int_1^5\Big(\int_1^4\Big(\frac{2u}{1+v}-\frac{uv}{1+v}\Big)\frac{u}{(1+v)^2}\,du\Big)\,dv=$$

$$=\int_1^4 u^2\,du\cdot\int_1^5\frac{2-v}{(1+v)^3}\,dv=\Big[\frac{u^3}{3}\Big]_1^4\cdot\int_1^5-\frac{v+1-3}{(1+v)^3}\,dv=21\cdot\int_1^5\Big(-\frac{1}{(1+v)^2}+\frac{3}{(1+v)^3}\Big)\,dv=$$

$$=21\cdot\Big[\frac{1}{1+v}-\frac{3}{2(1+v)^2}\Big]_1^5=21\Big(\frac{1}{6}-\frac{3}{2\cdot 36}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2\cdot 4}\Big)=0.\qquad\blacksquare$$

***Příklad* 282**. $\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2: 4x^2+9y^2\le 36,\ y\ge 0\}$

*Řešení :*




Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\left.\begin{aligned} x&=3r\cos\varphi\\ y&=2r\sin\varphi\end{aligned}\right\},\quad J=3\cdot 2\cdot r,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi.$$

$$\iint_D\sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy=\int_0^\pi\Big(\int_0^1\sqrt{1+4\cdot 9r^2\cos^2\varphi+9\cdot 4r^2\sin^2\varphi}\cdot 6r\,dr\Big)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^\pi d\varphi\cdot\int_0^1\sqrt{1+36r^2}\cdot 6r\,dr=\pi\cdot\frac{1}{12}\left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{18}(37\sqrt{37}-1).\qquad\blacksquare$$

**283**. $\iint_D (x-2y+3)\,dx\,dy,\quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2\ : x^2+y^2\le a^2\}$ $\qquad[3\pi a^2]$

**284**. $\iint_D x\,dx\,dy,\quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2\ : (x-2)^2+\frac{(y-1)^2}{4}\le 1\}$
(Použijte souřadnice $x=2+r\cos\varphi, y=1+2r\sin\varphi$.) $\qquad[4\pi]$

**285**. $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2\ : x^2+y^2\le 2x\}$ $\qquad\left[\frac{32}{9}\right]$

**286**. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{20}\, xy^2\, dx\, dy, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \le 1, y \ge \frac{2}{5}\, x, x \ge 0\}$ $\left[(4-\sqrt{2})/6\right]$

• Vypočtěte integrály $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ , je-li dána množina $D$ a funkce $f(x,y)$

**287**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\}\quad f(x,y) = xy^2$ $\left[\frac{48}{5}\right]$

**288**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + 9y^2 \le 9,\ x \ge 0\},\quad f(x,y) = y^2$ $\left[\frac{3\pi}{8}\right]$

**289**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 0\},\quad f(x,y) = y\,\sqrt{x^2 + 4y^2}$ $[2]$

**290**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ 36x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},\quad f(x,y) = xy$ $\left[\frac{9}{32}\right]$

**291**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \le 4x,\ y \ge 0\},\quad f(x,y) = xy$ $\left[\frac{32}{3}\right]$

**292**. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0, y \le x\},\quad f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ $[\pi(1-\mathrm{e}^{-4})/8]$