Dvojný integrál $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Předpokládané znalosti:

1. křivky v $\mathbb{E}_2$: kuželosečky, grafy základních funkcí,
2. určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
3. "parciální"integrování, tj. $\displaystyle\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x$, resp. $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}y$

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_2$ je omezená množina, funkce $f(x,y)$ je omezená na M

Příklad

$$\int\int_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ M: x^2+y^2 \le 4$$

neexistuje, neboť daná fce není omezená na M.

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní desky, $f(x,y)$ je hustota

Geometrická aplikace: objem ”válcového”tělesa

$Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$

Důsledek: Je-li $f(x, y) = 1$ pak objem $V = \int\int_{\boldsymbol{M}} \mathbf{1}\, \mathbf{d}\boldsymbol{x}\mathbf{d}\boldsymbol{y}$
je roven obsahu podstavy M.

Definice. Množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá měřitelná,
je-li omezená a existuje integrál $\int\int_{\boldsymbol{M}} \mathbf{1}\ \ \mathbf{d}\boldsymbol{x}\mathbf{d}\boldsymbol{y}$.

Jeho hodnotu značíme $\boldsymbol{\mu_2(M)}$ a nazýváme
dvourozměrnou mírou množiny M (v Jordanově smyslu)

Věta.
Množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{M}$ je omezená a $\boldsymbol{\mu_2(\partial M) = 0}$.

Příklady Měřitelná je libovolná množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$, jejíž hranice $\boldsymbol{\partial M}$ je omezená a (po částech) hladká křivka, neboť $\boldsymbol{\mu_2(\partial M) = 0}$.

Příklad množiny, která není měřitelná

Zavedení dvojného integrálu(Riemannův postup)

I. (Speciální případ)
Dvojný integrál na obdélníku $\boldsymbol{O = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle}$

a) dělení $D = \{O_1, ..., O_n\}$, mn. obdélníků,
norma dělení $\||D\| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_i\}$

b) volba bodů $\boldsymbol{V} = \{Z_1, ..., Z_n,\ Z_i \in O_i\}$

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V:

$\boldsymbol{s(f, D, V)} = \sum_i f(Z_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_i$

to je přibližně objem tělesa Q

Definice.
Říkáme, že funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na obdélníku O, jestliže existuje vlastní limita Riemann. součtů pro $\|\|D\| \to 0_+$.
Hodnota limity se pak nazývá dvojný integrál fce f na obd. O, zapisujeme $\int\int_O \boldsymbol{f(x,y)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}\mathbf{d}\boldsymbol{y}$

Výpočet podle Věty

Věta (Dvojný integrál pro OBDÉLNÍK)

Př. 1.

$$\int\int_M (3x^2 + y^2 + 2)\,dx dy,$$

kde $\boldsymbol{M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,3\rangle}$

$$\boldsymbol{M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3\}}$$

Př. 2.

$$\int\int_M \boldsymbol{y}\ \mathrm{e}^{\boldsymbol{xy}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}\mathbf{d}\boldsymbol{y},$$

kde $\boldsymbol{M} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{2}\rangle \times \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$

Napište obě pořadí integrování.

Vyberte vhodnější z nich a integrál vypočítejte.

Výsledek: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{2}} - \mathrm{e} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \doteq \mathbf{1.5}$

II. Dvojný integrál na obecné množině M

Definice

Výpočet $\int\int_M \boldsymbol{f}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}\mathbf{d}\boldsymbol{y}$: Fubiniova věta

převod integrálu dvojného na dvojnásobný,

Věta Fubiniova (II.3.2.).

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace vzhledem k ose x.

Pak existuje

$$\int\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Je-li M je elementární obor integrace vzhledem k ose y, pak

$$\int\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Postup při výpočtu dvojného integrálu

1. Pokud lze, pak obrázek

2. Volba vhodného pořadí integrování,
vniřní podle x, vnější dle y, resp. naopak,
pak zápis M ve tvaru elementárního oboru integrace

3. Převod integrálu dvojného na dvojnásobný
(Fubiniova věta)

4. Výpočet (integrování ve 4 krocích)

Existence dvojného integrálu $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Nutná podmínka pro existenci:
M je omezená množina, fce f je omezená na M.

Postačující podmínka pro existenci
1. varianta: Funkce $f(x,y)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace - viz Fubiniova věta

2. Obecnější podm.
Věta II.2.1. (PP pro existenci)
Nechť fce f je spojitá na M, kde M je uzavřená a měřitelná mn. v $\mathbb{E}_2$.
Pak existuje $\displaystyle\int\int_M f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

V odst. II.2.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.
fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_2(D) = 0$

II.2 Některé vlastnosti dvojného integrálu

(za předpokladu existence integrálů)

a) $\displaystyle \int\!\!\int_M \mathbf{konst} \cdot f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{konst} \cdot \int\!\!\int_M f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

b) $\displaystyle \int\!\!\int_M (f + g) = \int\!\!\int_M f + \int\!\!\int_M g.$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\int\!\!\int_{M_1 \cup M_2} f = \int\!\!\int_{M_1} f + \int\!\!\int_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x, y) \geq 0$ na M, pak $\displaystyle \int\!\!\int_M f \geq 0.$

e) Je-li f omezená fce na mn. M a $\mu_2(M) = 0$, pak $\displaystyle \int\!\!\int_M f = 0.$

Další aplikace - mechanické charakteristiky desky

Aplikace integrálů (přehled obecně) viz Trojný integrál

Symbol $\int_M \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{X}$

v tomto přehledu znamená integrál

a) dvojný

b) trojný

c) křivkový

d) plošný

Připomenutí z MAT I

V následujících úlohách jsou často integrály $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$

Typ I. Aspoň jedno z čísel n, m je liché

Řešíme substitucí:

a) když m je liché, položíme $\{\sin x = t\}$, pak $\{\cos x \, dx = dt\}$,

b) když n je liché, položíme $\{\cos x = t\}$, pak $\{-\sin x dx = dt\}$.

Někdy tomu předchází úprava využitím vztahu

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Typ II. Obě čísla n, m jsou sudá

Exponent n, resp. m snížíme pomocí vztahů (s dvojnásobným úhlem)

$$\boxed{\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$$

Dvojný integrál $\int\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde množina M je omezena kružnicí, resp. elipsou

Polární souřadnice $[r,\ \varphi]$

$x = r\ \cos\varphi$

$y = r\ \sin\varphi$

Jacobiho determinant (jakobián) $J = r$

Př. 1. $\int\int_M\ y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\ x^2 + y^2 \leq 16,\ x \geq 0\}$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Zobecněné polární souřadnice $[r,\ \varphi]$

$$x = a\,r\ \cos\varphi + x_0$$

$$y = b\,r\ \sin\varphi + y_0$$

Jacobiho determinant (jakobián) $\mathbf{J} = \mathbf{abr}$

Př. 2. $\int\int_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\ 4x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0 \qquad [8/15]$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Př. 3. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\ \dfrac{x^2}{9} + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\,x/3\}.$

Určete hmotnost, je-li $\varrho(x, y) = x, \quad [m = 3\sqrt{3}/2]$

Př. 4. (př. 15., určete extrémy) $\boldsymbol{f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}$
[lok. min. v $[0,0]$, neostré lok. max v bodech $[x,y]:\ x^2+y^2=1$ (jednotková kružnice). *Nápověda:* použijte polární souřadnice]

Př. 5. $\int\int_M \boldsymbol{xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$,
$\boldsymbol{M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 :\ x^2+y^2 \le 4x,\ y \ge 0\}}$, $\quad$ $\boldsymbol{[32/3]}$
možnosti výpočtu

Př. 6. Výpočet objemu válce, koule, kužele pomocí dvojného integrálu.

Př. 7. $\int\int_M \boldsymbol{|x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$,