

Dvojný integrál $\int \int_M f(x, y) \, dx dy$

Základem je znát:

1. křivky v \mathbb{E}_2 : kuželosečky, grafy základních funkcí
2. určitý integrál $\int_a^b f(x) \, dx$
geometrický význam (Riemannův postup)

Zavedení dvojného integrálu

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_2$ je omezená množina, funkce $f(x, y)$ je omezená na M

Příklad

$$\int \int_M \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad M : x^2 + y^2 \leq 4$$

neexistuje, neboť daná fce není omezená na M .

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní desky, $f(x, y)$ je hustota

Geometrická aplikace: objem "válcového" tělesa

$$Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

I. (Speciální případ)

Dvojný integrál na obdélníku $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

a) dělení $D = \{O_1, \dots, O_n\}$, mn. obdélníků,
norma dělení $\|D\| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_i\}$

b) volba bodů $V = \{Z_1, \dots, Z_n, Z_i \in O_i\}$

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V :

$$s(f, D, V) = \sum_i f(Z_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

to je přibližně objem tělesa Q

Definice.

Říkáme, že funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na obdélníku O , jestliže existuje vlastní limita Riemann. součtů pro $\|D\| \rightarrow 0_+$.

Hodnota limity se pak nazývá dvojný integrál fce f na obd. O , zapisujeme $\int \int_O f(x, y) dx dy$

Výpočet podle Věty

Věta (Dvojný integrál pro **OBDÉLNÍK**)

Př. 1.

$$\int \int_M (3x^2 + y^2 + 2) dx dy,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$$

Př. 2.

$$\iint_M y e^{xy} dx dy,$$

kde $M = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

Napište obě pořadí integrování.

Vyberte vhodnější z nich a integrál vypočítejte.

Výsledek: $\frac{1}{2} e^2 - e + \frac{1}{2} \doteq 1.5$

II. Dvojný integrál na obecné množině M

Definice

Výpočet $\iint_M f dx dy$: **Fubiniova věta**
převod integrálu dvojného na dvojnásobný,

Věta Fubiniova (II.3.2.).

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na M , kde M je elementární obor integrace vzhledem k ose x .

Pak existuje

$$\int \int_M f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Je-li M je elementární obor integrace vzhledem k ose y , pak

$$\int \int_M f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Postup při výpočtu dvojného integrálu

1. Pokud lze, pak obrázek
2. Volba vhodného pořadí integrování, vnitřní podle x , vnější dle y , resp. naopak, pak zápis M ve tvaru elementárního oboru integrace
3. Převod integrálu dvojného na dvojnásobný (Fubiniova věta)
4. Výpočet (integrování ve 4 krocích)

Existence dvojného integrálu $\int \int_M f(x, y) \, dx dy$

Nutná podmínka pro existenci:

M je omezená množina, fce f je omezená na M .

Postačující podmínka pro existenci

1. varianta

Funkce $f(x, y)$ je **spojitá** na M , kde M je **elementární obor** integrace - viz Fubiniova věta

2. Pro obecnější podm. potřebujeme nový pojem:

Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **měřitelná**,

je-li omezená a existuje integrál $\int \int_M 1 \, dx dy$.

Jeho hodnotu značíme $\mu_2(M)$ a nazýváme

dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M

Věta.

Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná $\iff M$ je omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.

Příklady

Měřitelná je libovolná množina M v \mathbb{E}_2 , jejíž hranice ∂M je omezená a (po částech) hladká křivka, neboť $\mu_2(\partial M) = 0$.

Příklad množiny, která není měřitelná

Věta II.2.1. (Postačující podmínka pro existenci)

Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v \mathbb{E}_2 a fce f je spojitá na M .

Pak existuje $\int \int_M f \, dx dy$.

V odst. II.2.1 jsou uvedeny **další varianty** postačující podmínky, např.

fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_2(D) = 0$

II.2 Některé **vlastnosti** dvojného integrálu (za předpokladu existence integrálů)

a)
$$\int \int_M \mathbf{konst} \cdot f \, dx dy = \mathbf{konst} \cdot \int \int_M f \, dx dy.$$

b)
$$\int \int_M (f + g) = \int \int_M f + \int \int_M g.$$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\int \int_{M_1 \cup M_2} f = \int \int_{M_1} f + \int \int_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x, y) \geq 0$ na M , pak
$$\int \int_M f \geq 0.$$

e) Je-li f omezená fce na mn. M a $\mu_2(M) = 0$, pak
$$\int \int_M f = 0.$$

Další aplikace - mechanické charakteristiky desky

Aplikace integrálů (přehled obecně) viz Trojný integrál

Symbol $\int_M f dX$

v tomto přehledu znamená integrál

- a) dvojný
- b) trojný
- c) křivkový
- d) plošný

Dvojný integrál $\int \int_M f(x, y) \, dx dy$,

kde množina M je omezena kružnicí, resp. elipsou

Př. 1. $\int \int_M x^2 y \, dx dy$,

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Př. 2. $\int \int_M y^2 \, dx dy$,

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Polární souřadnice

$$x = \mathbf{r} \cos \varphi$$

$$y = \mathbf{r} \sin \varphi$$

Jacobiho determinant (jakobián) $\mathbf{J} = r$

Zobecněné polární souřadnice

$$x = \mathbf{a} \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{x}_0$$

$$y = \mathbf{b} \mathbf{r} \sin \varphi + \mathbf{y}_0$$

Jacobiho determinant (jakobián) $\mathbf{J} = \mathbf{a} \mathbf{b} r$

Př. 3. Výpočet objemu válce, koule, kužele pomocí dvojného integrálu.

Př. 4. $\int \int_M xy \, dx dy,$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0\}$$

3 možnosti výpočtu

Př. 5. $\int \int_M |x| \, dx dy,$