Dvojný integrál $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Předpokládané znalosti:

1. křivky v $\mathbb{E}_2$: kuželosečky, grafy základních funkcí,
2. určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
3. "parciální"integrování, tj. $\displaystyle\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x$, resp. $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}y$

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_2$ je omezená množina, funkce $f(x,y)$ je omezená na M

Příklad

$$\int\int_M \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ M : x^2+y^2 \le 4$$

neexistuje, neboť daná fce není omezená na M.

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní desky, $f(x,y)$ je hustota

Geometrická aplikace: objem ”válcového”tělesa

$Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : [x,y] \in M, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

Důsledek: Je-li $f(x,y) = 1$ pak objem $V = \int\int_M \mathbf{1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$
je roven obsahu podstavy M.

Definice. Množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá měřitelná,
je-li omezená a existuje integrál $\int\int_{\boldsymbol{M}} \mathbf{1}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$.

Jeho hodnotu značíme $\boldsymbol{\mu_2(M)}$ a nazýváme
dvourozměrnou mírou množiny M (v Jordanově smyslu)

Věta.
Množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{M}$ je omezená a $\boldsymbol{\mu_2(\partial M) = 0}$.

Příklady Měřitelná je libovolná množina $\boldsymbol{M} \subset \mathbb{E}_2$, jejíž hranice $\boldsymbol{\partial M}$ je omezená a (po částech) hladká křivka, neboť $\boldsymbol{\mu_2(\partial M) = 0}$.

Příklad množiny, která není měřitelná

Zavedení dvojného integrálu(Riemannův postup)

I. (Speciální případ)
Dvojný integrál na obdélníku $\boldsymbol{O = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle}$

a) dělení $D = \{O_1, ..., O_n\}$, mn. obdélníků,
norma dělení $\|D\| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_i\}$

b) volba bodů $\boldsymbol{V} = \{Z_1, ..., Z_n,\ Z_i \in O_i\}$

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V:

$\boldsymbol{s(f, D,} V\boldsymbol{)} = \sum_i f(Z_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i$

to je přibližně objem tělesa Q

Definice.

Říkáme, že funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na obdélníku O, jestliže existuje vlastní limita Riemann. součtů pro $\|\|D\| \to 0_+$.
Hodnota limity se pak nazývá dvojný integrál fce f na obd. O, zapisujeme $\int\int_O \boldsymbol{f(x,y)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$

Výpočet podle Věty

Věta (Dvojný integrál pro OBDÉLNÍK)

Př. 1.

$$\int\int_M (3x^2 + y^2 + 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 3\rangle$
$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3\}$

Př. 2.

$$\int\!\!\int_M y\, \mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

Napište obě pořadí integrování.

Vyberte vhodnější z nich a integrál vypočítejte.

Výsledek: $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + \dfrac{1}{2} \doteq 1.5$

II. Dvojný integrál na obecné množině M

Definice

Výpočet $\int\!\int_M f\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$: Fubiniova věta

převod integrálu dvojného na dvojnásobný,

Věta Fubiniova (II.3.2.).

Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace vzhledem k ose x.

Pak existuje

$$\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Je-li M je elementární obor integrace vzhledem k ose y, pak

$$\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Postup při výpočtu dvojného integrálu

1. Pokud lze, pak obrázek

2. Volba vhodného pořadí integrování,
vniřní podle x, vnější dle y, resp. naopak,
pak zápis $\boldsymbol{M}$ ve tvaru elementárního oboru integrace

3. Převod integrálu dvojného na dvojnásobný
(Fubiniova věta)

4. Výpočet (integrování ve 4 krocích)

Existence dvojného integrálu $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Nutná podmínka pro existenci:
M je omezená množina, fce f je omezená na M.

Postačující podmínka pro existenci
1. varianta: Funkce $f(x,y)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace - viz Fubiniova věta

2. Obecnější podm.
Věta II.2.1. (PP pro existenci)
Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$ a fce f je spojitá na M.
Pak existuje $\displaystyle\int\int_M f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

V odst. II.2.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.
fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_2(D) = 0$

II.2 Některé vlastnosti dvojného integrálu

(za předpokladu existence integrálů)

a) $$\iint_M \mathbf{konst} \cdot f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{konst} \cdot \iint_M f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) $$\iint_M (f+g) = \iint_M f + \iint_M g.$$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak
$$\iint_{M_1 \cup M_2} f = \iint_{M_1} f + \iint_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x, y) \geq 0$ na M, pak $\iint_M f \geq 0$.

e) Je-li f omezená fce na mn. M a $\mu_2(M) = 0$, pak $\iint_M f = 0$.

Další aplikace - mechanické charakteristiky desky

Aplikace integrálů (přehled obecně) viz Trojný integrál

Symbol $\int_M f \, \mathrm{d}X$

v tomto přehledu znamená integrál

a) dvojný

b) trojný

c) křivkový

d) plošný

Dvojný integrál $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

kde množina M je omezena kružnicí, resp. elipsou

Př. 1. $\int\int_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Př. 2. $\int\int_M y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

Co by tento integrál mohl vyjadřovat ?

Polární souřadnice

$x = \mathbf{r}\,\cos\varphi$

$\mathbf{y} = \mathbf{r}\,\sin\varphi$

Jacobiho determinant (jakobián) $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}$

Zobecněné polární souřadnice

$x = \mathbf{a}\,\mathbf{r}\,\cos\varphi + \mathbf{x_0}$

$\mathbf{y} = \mathbf{b}\,\mathbf{r}\,\sin\varphi + \mathbf{y_0}$

Jacobiho determinant (jakobián) $\mathbf{J} = \mathbf{abr}$

Př. 3. Výpočet objemu válce, koule, kužele pomocí dvojného integrálu.

Př. 4. $\int\int_M xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4x, \ y \geq 0\}$

3 možnosti výpočtu

Př. 5. $\int\int_M |x| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,