

III. Dvojný a trojný integrál

III.1. Existence

Nechť D je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v \mathbb{E}_2 (resp. \mathbb{E}_3) a funkce f je omezená na D . Nechť množina bodů nespojitosti funkce f v D má míru 0. Potom f je integrovatelná v D , tj. integrál

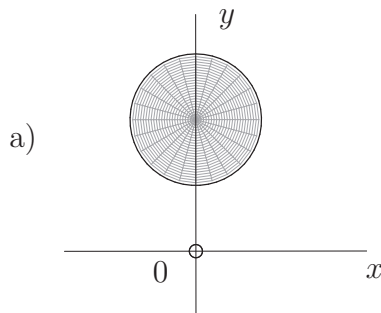
$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (\text{resp. } \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz) \quad \text{existuje.}$$

POZNÁMKA : Další podrobnosti najdete ve skriptech J. Neustupa: *Matematika II*.

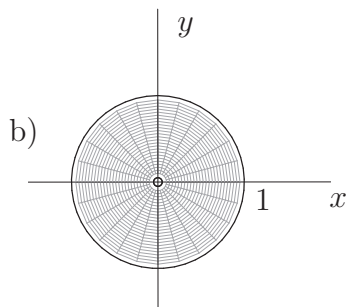
Příklad 237. Rozhodněte, zda daný integrál $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$ existuje, jestliže :

- $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq \frac{1}{4}\}$;
- $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 2\}$.

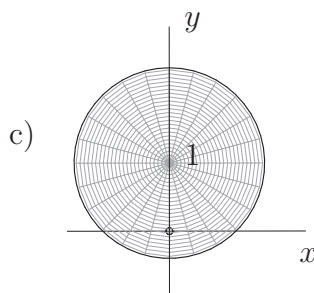
Řešení : Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál (vlastní) je definován pouze pro funkce omezené na omezené množině D a dále budeme používat větu o existenci.



Množina D je měřitelná, tedy D je omezená a její hranice má míru 0 a $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ je spojitá a omezená na D . Integrál existuje.



Množina D je měřitelná, ale $f(x, y)$ není omezená v D , protože $[0, 0] \in D$ a $\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.



$f(x, y)$ opět není omezená na D ($[0, 0] \in D$), integrál neexistuje. ■

Příklad 238. Je dána množina $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vyšetřete, zda existují dvojné integrály :

a) $\iint_D \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy,$ b) $\iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2},$ c) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1},$
 d) $\iint_D \frac{1}{1 + xy} dx dy,$ e) $\iint_D \frac{1}{(x + y)^2} dx dy.$

Řešení :

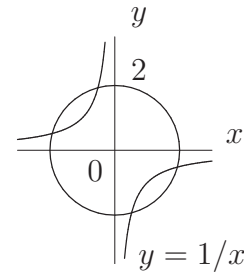
a) existuje, $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 < \infty \Rightarrow$ funkce je omezená,

b) neexistuje, $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x}{x^2 + y^2} = \infty,$

c) existuje, $\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ je spojitá v $D \subset \mathbb{E}_2,$

d) neexistuje, protože např. $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,1]} \left| \frac{1}{1 + xy} \right| = \infty,$

e) neexistuje, protože např. $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,-1]} \frac{1}{(x + y)^2} = \infty.$



Příklad 239. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

a) $\iiint_W \frac{dx dy dz}{(1 + x + z)^3},$ $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, -2 \leq z \leq 2\},$

b) $\iiint_W (x + yz) dx dy dz,$ $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \leq y \leq 2, z \geq 3\},$

c) $\iiint_W \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 9} dx dy dz,$ $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\frac{1}{(1 + x + z)^3}$ není omezená na $W, \{1 + x + z = 0\} \cap W \neq \emptyset,$

b) neexistuje, protože množina W není omezená v $\mathbb{E}_3,$

c) existuje; W je měřitelná množina v $\mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 - 9 \neq 0$ ve $W,$ tedy integrovaná funkce je spojitá na $W; \frac{1}{8} < \left| \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \right| < \frac{1}{5}$ pro každý bod $[x, y, z] \in W,$ tedy funkce je omezená na $W.$

III.2. Fubiniova (Fubiniho) věta pro dvojný integrál

Množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$ kde funkce $\phi_1(x), \phi_2(x)$ jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a $\phi_1(x) \leq \phi_2(x),$ nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose $x.$

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose $x.$ Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v $M.$ Pak

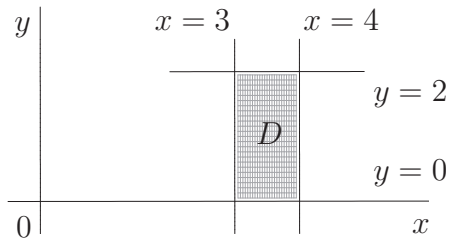
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

POZNÁMKA: Analogicky pro elementární obor vzhledem k ose y

- Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách :

Příklad 240. $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 - 2xy + y^2}, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$

Řešení :



Obdélník D je ohraničen křivkami $x = 3, x = 4, y = 0, y = 2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2} \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{-1}{x-y} \right]_3^4 dy = \int_0^2 \left(\frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y} \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3} \right) dy = \left[\ln |y-4| - \ln |y-3| \right]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 = \\ &= \ln \frac{2 \cdot 3}{4} = \ln \frac{3}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 241. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x-2y+3)^2}, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

Řešení :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{1}{(x-2y+3)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x-2y+3} \right]_0^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3} \right) dy = \left[\frac{1}{2} \ln |2y-5| - \frac{1}{2} \ln |2y-3| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 242. $I = \iint_D y^2 \sin^2 x dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq y \leq 2\}$

Řešení :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \cdot \int_1^2 y^2 dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

POZNÁMKA: Je-li funkce typu $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ a množina D je obdélník

$$D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle, \text{ pak } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

Příklad 243. $I = \iint_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3} dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

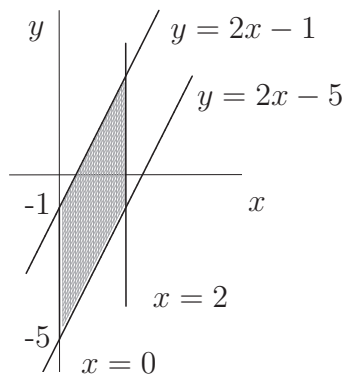
Řešení :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 xe^{x^2} dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3} dy = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^4 e^t dt \cdot \frac{1}{2} \left[\ln |y^2+3| \right]_0^3 = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^4 \cdot \frac{1}{2} (\ln 12 - \ln 3) = \frac{1}{2} (e^4 - 1) \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{12}{3} = \frac{1}{4} (e^4 - 1) \ln 4 = \frac{1}{2} (e^4 - 1) \ln 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a vyjádřete jako elementární obor integrace.

Příklad 244. $2x - y = 1$, $2x - y = 5$, $x = 0$, $x = 2$

Řešení :



$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 5 \leq y \leq 2x - 1 \end{cases}$$

↑ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na D pomocí Fubiniovy věty.

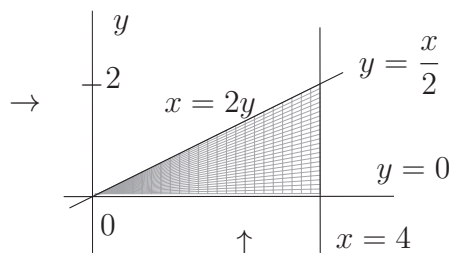
Množina D je elementárním oborem integrace vzhledem k ose x .

↑

■

Příklad 245. $y = 0$, $x = 2y$, $x = 4$

Řešení :



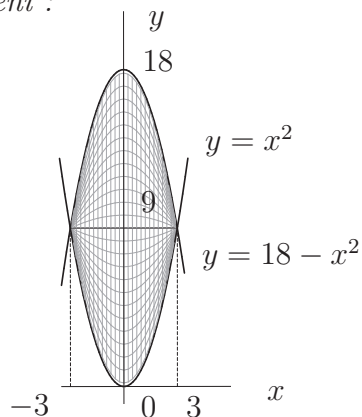
$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \end{cases} \quad \text{nebo} \quad D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2y \leq x \leq 4 \end{cases}$$

D je elementární oblast integrace vzhledem k ose x 1) ↑ i k ose y 2) →

■

Příklad 246. $y = 18 - x^2$, $y = x^2$

Řešení :



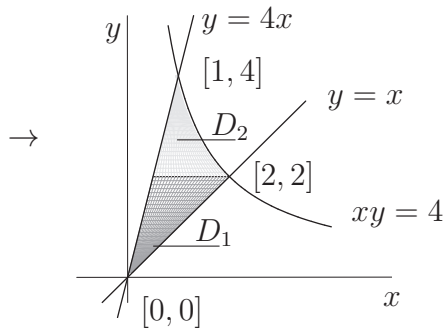
$$18 - x^2 = x^2 \implies x^2 = 9 \implies x_{1,2} = \pm 3$$

$$\uparrow D : \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x^2 \leq y \leq 18 - x^2 \end{cases}$$

■

Příklad 247. $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$, ($x \geq 0$)

Řešení :



$$D = D_1 \cup D_2$$

→

$$D_1 : \begin{cases} \frac{y}{4} \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} \frac{y}{4} \leq x \leq \frac{4}{y} \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

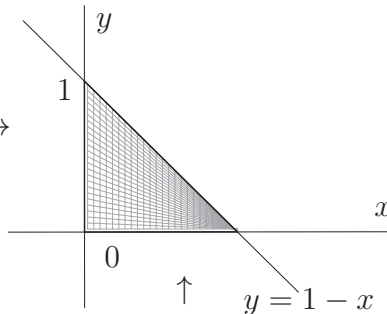
■

• Zaměňte pořadí integrace :

Příklad 248. $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases} \rightarrow$$



$$2) \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \end{cases} \rightarrow$$

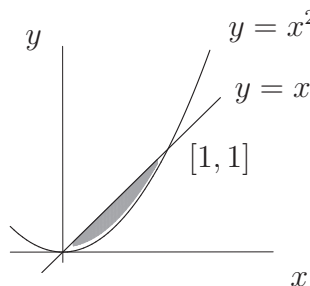
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right) dy.$$

■

Příklad 249. $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases} \rightarrow$$



$$2) \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases} \rightarrow$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

■

Příklad 250. $I = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy \right) dx$

Řešení :

Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :

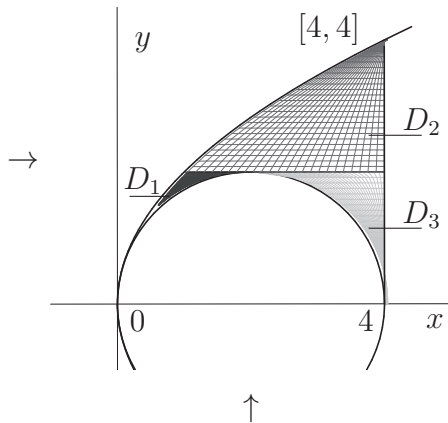
$$1) \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x-x^2} \leq y \leq \sqrt{4x} \end{cases}$$

↑

$y = \sqrt{4x-x^2}$, což je rovnice "horní" poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
 $y = \sqrt{4x}$, což je rovnice "horní" větve paraboly $y^2 = 4x$,
 $x = 4, \quad x = 0$.

2) Ve směru osy x rozdělíme množinu D na tři části tak, aby tyto části byly elementárními obory integrace.

→ $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$



$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{y^2}{4} \leq x \leq 2 - \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 2 \leq y \leq 4 \\ \frac{y^2}{4} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2 + \sqrt{4-y^2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x, y) dx \right) dy + \int_0^2 \left(\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^4 f(x, y) dx \right) dy.$$

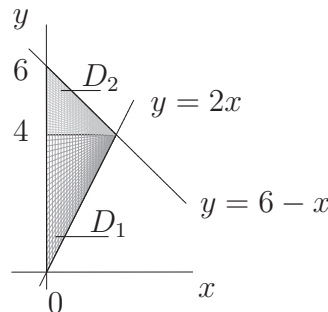
Příklad 251. $I = \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_4^6 \left(\int_0^{6-y} f(x, y) dx \right) dy$

Řešení :

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 4 \leq y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 6-y \end{cases}$$



Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu D bez předcházejícího dělení :

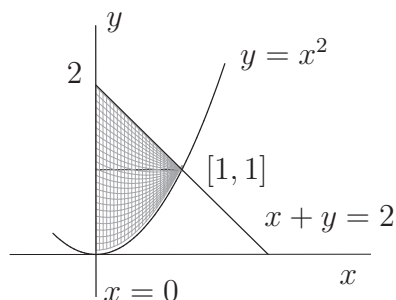
$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2x \leq y \leq 6-x \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Pomocí Fubiniho věty převed'te dvojný integrál $\iint_D f(x, y) dx dy$ na dvojnásobné integrály pro oba směry integrace, jestliže množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :

Příklad 252. $x = 0, y = x^2, x + y = 2 (x \geq 0)$

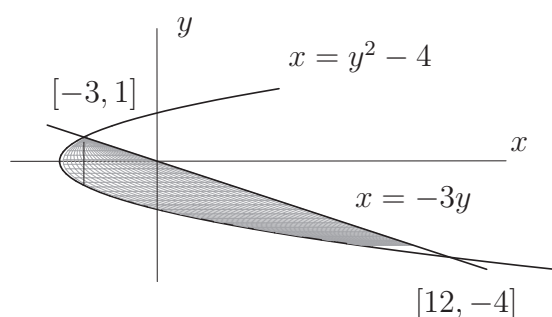
Řešení :



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Příklad 253. $x = y^2 - 4, x = -3y$

Řešení : Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.

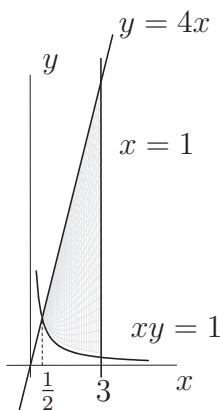


$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-4}^1 \left(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \int_{-4}^{-3} \left(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x, y) dy \right) dx + \\ &+ \int_{-3}^{12} \left(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

- Načrtněte množinu $D \subset \mathbb{E}_2$ omezenou zadanými křivkami a vypočítejte dané integrály :

Příklad 254. $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, D : xy = 1, y = 4x, x = 3$

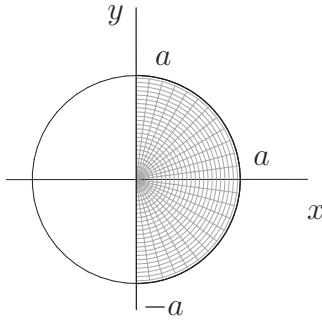
Řešení :



$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^3 \left(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_{1/2}^3 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{1/x}^{4x} dx = \\ &= \int_{1/2}^3 x^2 \left(-\frac{1}{4x} + x \right) dx = \int_{1/2}^3 \left(x^3 - \frac{x}{4} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8} \right]_{1/2}^3 = \frac{1225}{64} \end{aligned}$$

Příklad 255. $I = \iint_D x^3 y^2 dx dy$, $D : x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$ ($x \geq 0$)

Řešení :



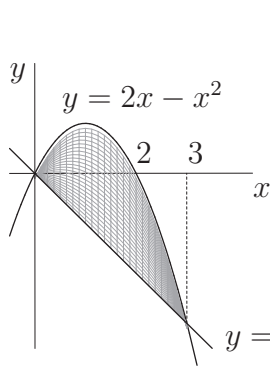
$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3 y^2 dx \right) dy = \int_{-a}^a y^2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \\ &= \int_{-a}^a \frac{y^2}{4} (a^2 - y^2)^2 dy = \frac{1}{4} \cdot 2 \int_0^a y^2 (a^4 - 2a^2 y^2 + y^4) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[a^4 \frac{y^3}{3} - 2a^2 \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} \right]_0^a = \frac{1}{2} a^7 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{4}{105} a^7 \end{aligned}$$

Příklad 256. $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + 1}$, $D : y = 2x - x^2$, $y = -x$

Řešení : $y = 2x - x^2$ neboli $y - 1 = -(x - 1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1, 1]$.

Průsečíky paraboly s přímkou $y = -x$ najdeme tak, že zjistíme jejich x -ové souřadnice :

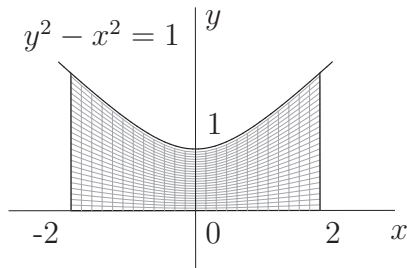
$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \text{ po dosazení } \quad -x = 2x - x^2 \implies x(x - 3) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 3$$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left(\int_{-x}^{2x-x^2} \frac{dy}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^3 \frac{1}{x^2 + 1} (2x - x^2 + x) dx = \\ &= \int_0^3 \frac{-x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx = - \int_0^3 \frac{x^2 + 1 - 3x - 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= - \int_0^3 \left(1 - 3 \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = - \left[x - \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| - \right. \\ &\quad \left. - \arctg x \right]_0^3 = \frac{3}{2} \ln 10 + \arctg 3 - 3 \end{aligned}$$

Příklad 257. $I = \iint_D (x + y) dx dy$, $D : y^2 - x^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$

Řešení : $y^2 - x^2 = 1$ je rovnice hyperboly .

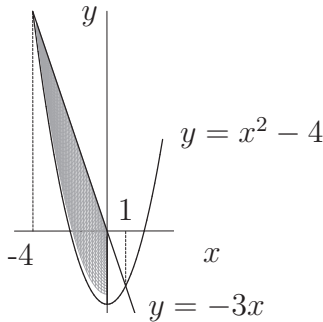


$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\sqrt{1+x^2}} (x + y) dy \right) dx = \int_{-2}^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left(x\sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2} \right) dx = \underbrace{\int_{-2}^2 x\sqrt{1+x^2} dx}_{= 0 \text{ (lichá funkce)}} + \\ &\quad + \frac{2}{2} \int_0^2 \underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}} dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Příklad 258. $I = \iint_D (1+x)y \, dx \, dy$, $D : y = x^2 - 4$, $y = -3x$, $x \leq 0$

Řešení : Stanovíme x -ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

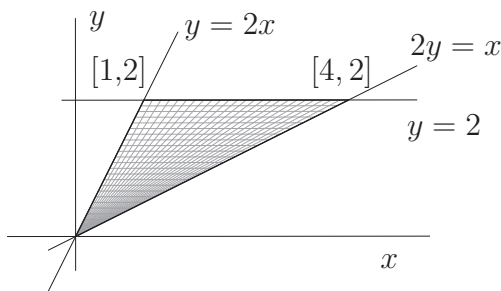
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{cases} \text{ Po dosazení } \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = -4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_{-4}^0 \left(\int_{x^2-4}^{-3x} (1+x)y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^0 (1+x) \left[y^2 \right]_{x^2-4}^{-3x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 (1+x)(9x^2 - (x^2 - 4)^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 (-x^5 - x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 16x - 16) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{17x^4}{4} + \frac{17x^3}{3} - 8x^2 - 16x \right]_{-4}^0 = \frac{-1376}{15} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 259. $\iint_D (x+1) \, dx \, dy$, $D : y = 2x$, $2y = x$, $y = 2$

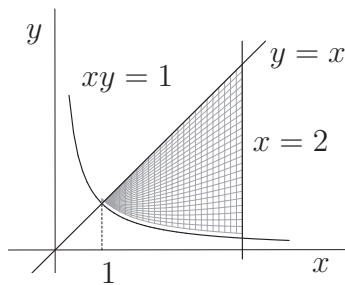
Řešení :



$$\begin{aligned} \iint_D (x+1) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_{y/2}^{2y} (x+1) \, dx \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + x \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{4y^2}{2} + 2y - \frac{y^2}{8} - \frac{y}{2} \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{15}{8}y^2 + \frac{3}{2}y \right] dy \dots = 8 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 260. $\iint_D \frac{1}{y} \, dx \, dy$, $D : xy = 1$, $y = x$, $x = 4$, $x \geq 0$

Řešení :



$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{y} \, dx \, dy &= \int_1^4 \left(\int_{1/x}^x \frac{1}{y} \, dy \right) dx = \int_1^4 \left[\ln |y| \right]_{1/x}^x dx = \\ &= \int_1^4 \left(\ln x - \ln \frac{1}{x} \right) dx = 2 \int_1^4 \ln x \, dx = \text{(per partes)} \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, \quad v = x \end{array} \right| = 2 \left[x \ln x - x \right]_1^4 = 8 \ln 4 - 6 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

261. $\iint_D \frac{dx \, dy}{(x+y)^2}$, $D : x = 3$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 2$ [ln 25 / 24]

262. $\iint_D \cos(x+y) \, dx \, dy$, $D : x = 0$, $y = \pi$, $y = x$ [-2]

263. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D : y = 0$, $y = 1 - x$, $y = 1 + x$ [1 / 3]

264. $\iint_D (x + 2y) \, dx \, dy$, $D : x = y^2 - 4$, $x = 5$ [50,4]

265. $\iint_D xy \, dx \, dy, \quad D : y = x - 4, y^2 = 2x$ [90]

266. $\iint_D \frac{1}{y+1} \, dx \, dy, \quad D : x = 0, y = 2, y = 4, y^2 = x$ $\left[4 + \ln \frac{5}{3}\right]$

267. $\iint_D \frac{x}{y^2} \, dx \, dy, \quad D : y^2 = x, y^2 = 4x, y = 2$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

268. $\iint_D (xy + y) \, dx \, dy, \quad D : x = 1, x = 2, xy = 4, y = 0$ $\left[4 + 8 \ln 2\right]$

269. Převeďte dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace) a integrál vypočítejte. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq \ln x, x \geq 1, y \leq 1\}, f(x, y) = 1/x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

• Omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami a je dána funkce $f(x, y)$

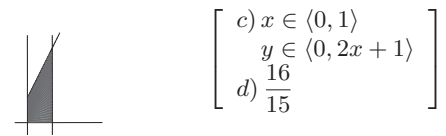
a) Načrtněte množinu D s popisem os, měřítkem, popisem křivek a vyznačením bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité.

b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniho věty.

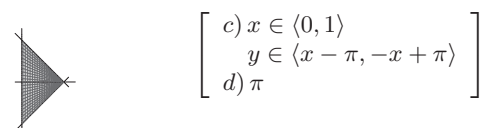
c) Množinu D vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace vzhledem ke vhodné zvolené ose.

d) Vypočítejte $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.

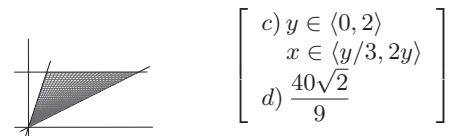
270. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x + 1\}, \quad f(x, y) = x^2y$



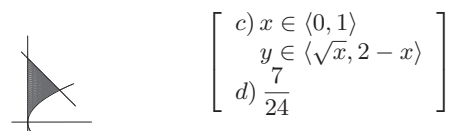
271. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq \pi, x - y \leq \pi, x \geq 0\} \quad f(x, y) = \sin(x + y)$ $[\pi]$



272. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x/2, y = 3x, y = 2 \quad f(x, y) = x\sqrt{y}$



273. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 0, x + y \leq 2, x \leq y^2\} \quad f(x, y) = xy$



274. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq x^2, y \leq 12 - x^2\}$ $f(x, y) = |x|$



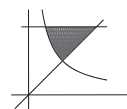
$$\left[\begin{array}{l} c) -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \\ \quad x^2 \leq y \leq 12 - x^2 \\ d) 36 \end{array} \right]$$

275. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1$ $f(x, y) = 2xy$



$$\left[\begin{array}{l} c) 0 \leq x \leq 1 \\ \quad \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \\ d) 1 \end{array} \right]$$

276. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $y = 2$ $f(x, y) = xy^2$



$$\left[\begin{array}{l} c) 1 \leq y \leq 2 \\ \quad 1/y \leq x \leq y \\ d) \frac{13}{5} \end{array} \right]$$

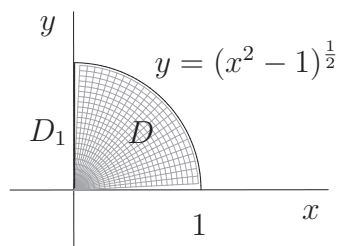
III.3. Substituční metoda pro dvojný integrál

Nechť existuje vzájemně jednoznačné regulární zobrazení oblasti $B(u, v) \subset \mathbb{E}_2$ na oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ definované rovnicemi $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$. Pak

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{B(u, v)} f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) |J| du dv, \text{ kde } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Příklad 277. Rozhodněte, zda existuje integrál $\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy$, kde $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$. Pokud ano, spočítejte jej.

Řešení :



Množina D je měřitelná v \mathbb{E}_2 .

Funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ není definována na množině $D^* = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x = 0\}$. Množina bodů nespojitosti funkce f v D , tj. $D_1 = \{[x, y] \in D : x = 0, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$ je množina míry nula v \mathbb{E}_2 .

Dále platí, že funkce f je omezená na množině $D \setminus D_1$, proto daný integrál existuje.

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \varphi \cdot r dr \right) d\varphi =$$

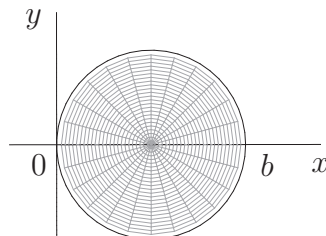
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r \, dr = \left[\frac{\varphi^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}. \quad \blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

Příklad 278. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 - bx \leq 0\}$, $b > 0$

Řešení :

$$D : \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{b^2}{4}$$



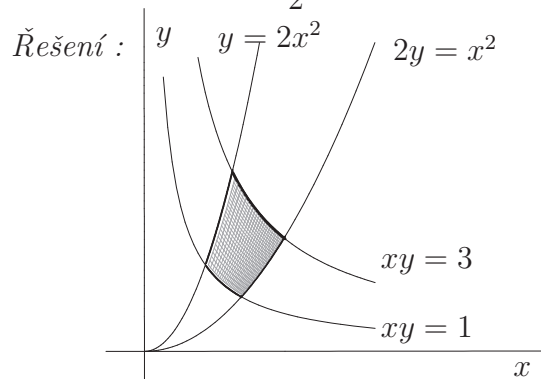
$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq bx \rightarrow r^2 \leq br \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq b \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{b \cos \varphi} r \cdot r \, dr \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{b \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3 \cos^3 \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} b^3 \cdot \frac{2}{3 \cdot 1} \cdot 1 = \frac{4}{9} b^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 279. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \leq 0\}$

Řešení :

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1 + r^2) \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1 + r^2) r \, dr = \left[\begin{array}{l} 1 + r^2 = t \\ 2r \, dr = dt \end{array} \right] = \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^{1+a^2} \ln t \, dt = \frac{\pi}{2} [t \ln t - t]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2} \left((1+a^2) \ln(1+a^2) - a^2 \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 280.* $\iint_D x^3 \, dx \, dy$, kde $D \subset \mathbb{E}_2$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1$, $xy = 3$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x^2$.



Použijeme transformaci $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x^2} = v \end{cases}$

$D \implies D^*$, kde

$$D^* = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2 : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{2} \leq v \leq 2\}.$$

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x}, \quad y = vx^2, \quad \frac{u}{x} = vx^2 \implies x^3 = \frac{u}{v}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \implies y = v \sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v};$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

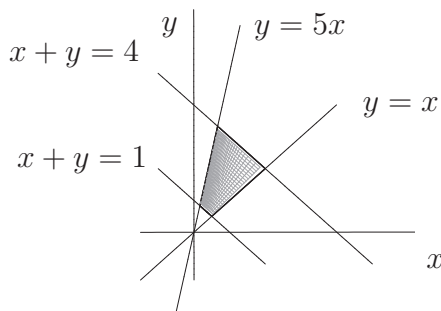
Užitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_D x^3 dx dy = \iint_{D^*} \frac{u}{v} \cdot J du dv = \int_{1/2}^2 \left(\int_1^3 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{3v} du \right) dv = \frac{1}{3} \int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2} dv \cdot \int_1^3 u du =$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{v} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 2. \quad \blacksquare$$

Příklad 281.* $\iint_D (2x - y) dx dy$, $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená přímkami $x + y = 1$, $x + y = 4$,
 $y = x$, $y = 5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left. \begin{array}{l} x + y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{array} \right\}, \quad D \implies D^*, \quad \text{kde}$$

$$D^* = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2 : 1 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 5\}.$$

Potom $\left. \begin{array}{l} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{array} \right\}; \quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

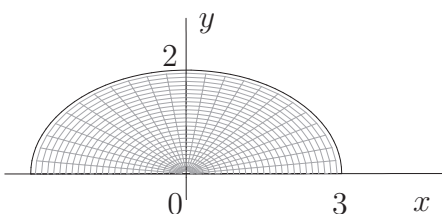
$$\iint_D (2x - y) dx dy = \iint_{D^*} \left(\frac{2u}{1+v} - \frac{uv}{1+v} \right) \cdot J du dv = \int_1^5 \left(\int_1^4 \left(\frac{2u}{1+v} - \frac{uv}{1+v} \right) \frac{u}{(1+v)^2} du \right) dv =$$

$$= \int_1^4 u^2 du \cdot \int_1^5 \frac{2-v}{(1+v)^3} dv = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^4 \cdot \int_1^5 -\frac{v+1-3}{(1+v)^3} dv = 21 \cdot \int_1^5 \left(-\frac{1}{(1+v)^2} + \frac{3}{(1+v)^3} \right) dv =$$

$$= 21 \cdot \left[\frac{1}{1+v} - \frac{3}{2(1+v)^2} \right]_1^5 = 21 \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2 \cdot 36} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 282. $\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2} dx dy$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}$

Řešení :



Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\left. \begin{array}{l} x = 3r \cos \varphi \\ y = 2r \sin \varphi \end{array} \right\}, \quad J = 3 \cdot 2 \cdot r, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2} dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \sqrt{1+4 \cdot 9r^2 \cos^2 \varphi + 9 \cdot 4r^2 \sin^2 \varphi} \cdot 6r dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+36r^2} \cdot 6r dr = \pi \cdot \frac{1}{12} \left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{18} (37\sqrt{37}-1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

283. $\iint_D (x-2y+3) dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ [3\pi a^2]

284. $\iint_D x dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : (x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1\}$
(Použijte souřadnice $x = 2 + r \cos \varphi, y = 1 + 2r \sin \varphi$.) [4\pi]

285. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ [\frac{32}{9}]

286. $\iint_D (x^2+y) dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1, xy = 4, y = x, y = 9x\}$
(Použijte souřadnice $xy = u, \frac{y}{x} = v$.) [J = \frac{1}{4v}, \frac{19}{3}]

• Vypočtěte integrály $\iint_D f(x, y) dx dy$, je-li dána množina D a funkce $f(x, y)$

287. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0\} \quad f(x, y) = xy^2$ [\frac{48}{5}]

288. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 9y^2 \leq 9, x \geq 0\}, \quad f(x, y) = y^2$ [\frac{3\pi}{8}]

289. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq 0\}, \quad f(x, y) = y \sqrt{x^2 + 4y^2}$ [2]

290. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 36x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad f(x, y) = xy$ [\frac{9}{32}]

291. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0\}, \quad f(x, y) = xy$ [\frac{32}{3}]

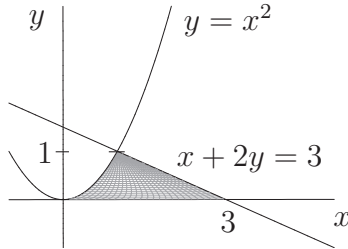
292. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}, \quad f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ [\pi(1 - e^{-4})]

III.6. Aplikace dvojných integrálů

- Určete plošný obsah rovinného obrazce $D \subset \mathbb{E}_2$ ohraničeného danými křivkami :

Příklad 293. $y = x^2$, $x + 2y = 3$, $y = 0$

Řešení :

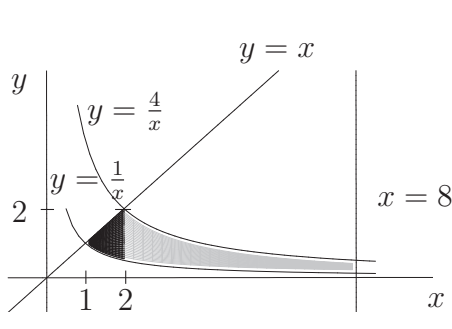


$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} 1 \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[x \right]_{\sqrt{y}}^{3-2y} dy = \\
 &= \int_0^1 (3 - 2y - \sqrt{y}) \, dy = \left[3y - y^2 - \frac{2y\sqrt{y}}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

■

Příklad 294. $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $x = 8$

Řešení :

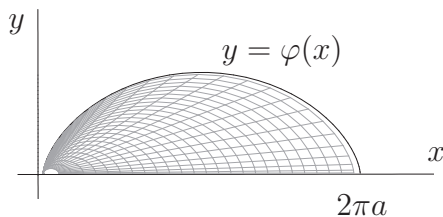


$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x 1 \, dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_{\frac{4}{x}}^{\frac{1}{x}} 1 \, dy \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx + \int_2^8 \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right]_1^2 + \\
 &+ 3 \left[\ln|x| \right]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln \frac{8^3}{2 \cdot 2^3} = \\
 &= \frac{3}{2} + \ln 32.
 \end{aligned}$$

■

Příklad 295. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :



Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

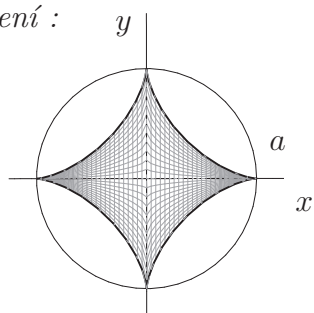
$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2\pi a \\ 0 \leq y \leq \varphi(x) \end{array} \right| = \int_0^{2\pi a} \left(\int_0^{\varphi(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi a} \varphi(x) \, dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce :} \\ x = x(t) = a(t - \sin t) \Rightarrow dx = a(1 - \cos t) dt \\ y = y(t) = a(1 - \cos t) \\ x \in \langle 0, 2\pi a \rangle \Rightarrow t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) \, dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = a^2 \left[t - 2\sin t \right]_0^{2\pi} + \\
 &+ a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

■

Příklad 296. Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Řešení :



$$P = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $x = r \cos^3 \varphi$
 $y = r \sin^3 \varphi$

$$(r \cos^3 \varphi)^{2/3} + (r \sin^3 \varphi)^{2/3} = a^{2/3} \implies r^{2/3} = a^{2/3} \implies$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right|, \quad J = \left| \begin{array}{cc} \cos^3 \varphi & -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^3 \varphi & 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{array} \right| = 3r \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + 3r \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi =$$

$$= 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

$$P = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, dr \right) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \cdot 3 \int_0^a r \, dr =$$

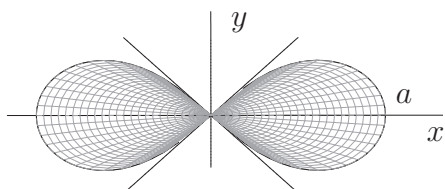
$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \, d\varphi \cdot 3 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \, d\varphi \cdot \frac{3}{2} a^2 = \frac{3}{4} a^2 \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{4} a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2. \quad \blacksquare$$

• Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :

Příklad 297. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Bernoulliho lemniskáta)

Řešení :



$$P = \iint_D 1 \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right|.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$,

$$0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\varphi} \implies \cos 2\varphi \geq 0, \quad \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle.$$

$$P = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r \, dr \right) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/4} = a^2. \quad \blacksquare$$

Příklad 298.* $(x^2 + 9y^2)^2 = x^2 y$

$$\text{Řešení : } P = \iint_D 1 \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = \frac{r}{3} \sin \varphi \\ J = \frac{1}{3} r \end{array} \right|$$

$$r^4 = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{r}{3} \sin \varphi$$

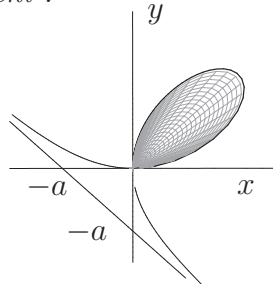
$$0 \leq r \leq \frac{1}{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi$$

$$\cos^2 \varphi \sin \varphi \geq 0 \implies 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2 \varphi \sin \varphi} \frac{1}{3} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}\cos^2 \varphi \sin \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^\pi \frac{1}{9} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{54} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{27} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \varphi - \cos^6 \varphi) d\varphi = (\text{Wallisova formule}) = \frac{1}{27} \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{864}.
 \end{aligned}$$

Příklad 299.* $(x^3 + y^3) = 3axy$ (Descartesův list)

Řešení :



$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D 1 dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq r(\varphi) \\ y = r \sin \varphi \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ J = r \end{array} \right| = \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_0^{r(\varphi)} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$$x^3 + y^3 = 3axy \implies r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi = 3ar^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad \text{takže}$$

$$r(\varphi) = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad r(0) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi =$$

(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6 \varphi$)

$$= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}^2 \varphi}{(\text{tg}^3 \varphi + 1)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \left| \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = du \right| = \frac{9a^2}{2 \cdot 3} \int_0^\infty \frac{3u^2}{(u^3 + 1)^2} du =$$

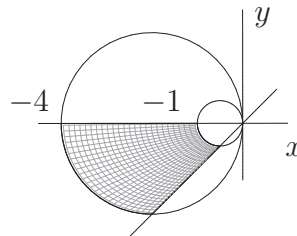
$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} a^2 \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C \frac{3u^2}{(u^3 + 1)^2} du = \frac{3a^2}{2} \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{u^3 + 1} \right]_0^C = \frac{3a^2}{2} \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{C^3 + 1} + 1 \right) = \\
 &= \frac{3a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Příklad 300. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami

$$x^2 + y^2 + x = 0, \quad x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad y = x, \quad y = 0.$$

Řešení :

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + x = 0 &\implies \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\
 x^2 + y^2 + 4x = 0 &\implies (x + 2)^2 + y^2 = 4
 \end{aligned}$$

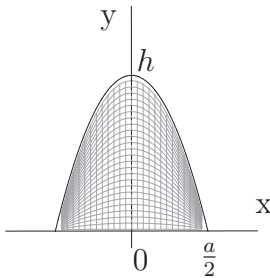


$$P = \iint_D 1 dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 0 \implies r = -\cos \varphi \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \implies r = -4 \cos \varphi \\ -\cos \varphi \leq r \leq -4 \cos \varphi \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r \, dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} [r^2]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (16\cos^2\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{15}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{15}{2} \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{15}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = \\
 &= \frac{15}{4} \left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\sin \frac{5}{2}\pi}{2} - \pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) = \frac{15}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{15(\pi + 2)}{16}.
 \end{aligned}$$

Příklad 301. Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětiny je a , výška úseče h , a plošná hustota $\rho = 1$. Určete :
 a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y - h = px^2$.
 Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2}, 0\right]$, pak $-h = p\frac{a^2}{4} \implies p = \frac{-4h}{a^2} \implies$
 $y = h - \frac{4h}{a^2}x^2$.

a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x .

$$\begin{aligned}
 J_x &= \iint_D y^2 \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} D: \quad 0 \leq y \leq h - \frac{4h}{a^2}x^2 \\ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \end{array} \right| = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{h - \frac{4h}{a^2}x^2} y^2 \, dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y^3]_0^{h - \frac{4h}{a^2}x^2} dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(h - \frac{4h}{a^2}x^2 \right)^3 dx = \frac{h^3}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right)^3 dx = \\
 &= \frac{2h^3}{3} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{12x^2}{a^2} + \frac{48x^4}{a^4} - \frac{64x^6}{a^6} \right) dx = \frac{2h^3}{3} \left[x - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{48x^5}{5a^4} - \frac{64x^7}{7a^6} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \\
 &= \frac{2h^3}{3} \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} - \frac{a}{14} \right) = \frac{h^3 a}{3} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16 h^3 a}{105}.
 \end{aligned}$$

b) $T = [0, y_T], \quad y_T = \frac{M_x}{m}$

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D dx \, dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{h - \frac{4h}{a^2}x^2} dy \right) dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(h - \frac{4h}{a^2}x^2 \right) dx = \\
 &= 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right) dx = 2h \left[x - \frac{4x^3}{3a^2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = 2h \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6} \right) = \frac{2}{3} ha,
 \end{aligned}$$

$$M_x = \iint_D y \, dx \, dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{h - \frac{4h}{a^2}x^2} y \, dy \right) dx = \dots = \frac{2}{5} h^2 a,$$

$$y_T = \frac{\frac{2}{5} h^2 a}{\frac{2}{3} ha} = \frac{3}{5} h,$$

$$\boxed{T = \left[0, \frac{3}{5} h \right]}.$$

Příklad 302. Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, je-li plošná hustota $\rho = 10$.

Řešení:

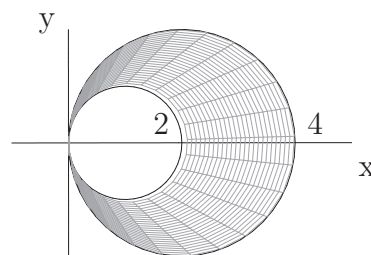
$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \implies (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \implies (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$T = [x_T, 0], \quad x_T = \frac{M_y}{m}, \quad m = \rho \cdot P$$

$$m = 10 \cdot P = 10(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2) = 30\pi,$$

kde P= je plocha dané desky



$$M_y = \iint_D x \rho \, dx \, dy = \iint_D 10x \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 2x \implies r \geq 2 \cos \varphi \\ x^2 + y^2 \leq 4x \implies r \leq 4 \cos \varphi \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 10 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = 10 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \frac{10}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 56 \cos^4 \varphi \, d\varphi =$$

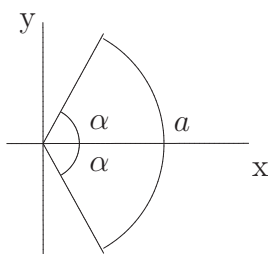
$$= \frac{20}{3} \cdot 56 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1120}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 70\pi,$$

$$x_T = \frac{70\pi}{30\pi},$$

$$T = \left[\frac{7}{3}, 0 \right].$$

Příklad 303. Určete souřadnice těžiště kruhové výseče (viz obrázek), je-li $\rho = \text{konst.}$

Řešení:



$$T = [x_T, 0], \quad m = \frac{\pi a^2}{2\pi} \cdot 2\alpha \rho = a^2 \alpha \rho,$$

$$M_y = \iint_D x \rho \, dx \, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \end{array} \right| = \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_0^a r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \cdot [\sin \varphi]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

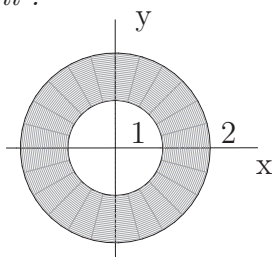
$$= \frac{2}{3} \rho a^3 \sin \alpha,$$

$$x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\alpha}$$

$$T = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right]$$

Příklad 304. Určete moment setrvačnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic homogenní rovinné desky s plošnou hustotou $\rho = k$ omezené křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení:

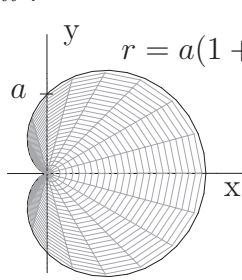


$$J_0 = k \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

$$= (\text{polární souřadnice}) = k \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 \, dr \, d\varphi = \frac{15}{2} k\pi.$$

Příklad 305. Určete polohu těžiště obrazce omezeného kardioidou $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = [x_T, 0], \quad x_T = \frac{M_y}{m}$$

$$m = \iint_D dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_0^{r(\varphi)} 1 \cdot r dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r^2]_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 [\varphi + 2 \sin \varphi]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 \pi + a^2 \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} a^2 \pi,$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = [\text{polární souř.}] = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \cos \varphi dr \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot a^3 (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{5}{4} a^3 \pi, \quad x_T = \frac{5a}{6},$$

$$T = \left[\frac{5}{6} a, 0 \right]$$

• Je dána omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ a funkce $f(x, y)$

a) Načrtněte množinu D .

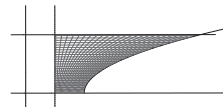
b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty

c) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu daného integrálu.

Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment nebo moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu nebo přímce).

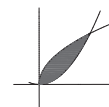
d) Vypočítejte $\iint_D f(x, y) dx dy$.

306. D je ohraničena křivkami: $x = 1$, $x = y^2 + 2$, $y = 0$, $y = 2$, $f(x, y) = y/\sqrt{x}$



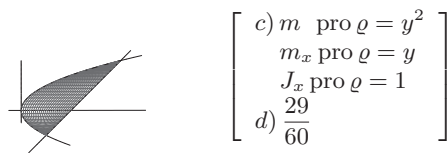
$$\left[\begin{array}{l} \text{c) } m \text{ pro } \varrho = y/\sqrt{x} \\ m_x \text{ pro } \varrho = 1/\sqrt{x} \\ \text{d) } 4\sqrt{6} - 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

307. D je ohraničena křivkami: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $f(x, y) = x$,

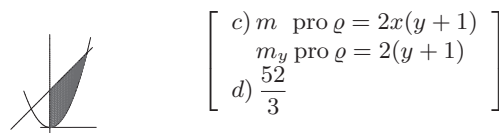


$$\left[\begin{array}{l} \text{c) } m \text{ pro } \varrho = x \\ m_y \text{ pro } \varrho = 1 \\ \text{d) } \frac{3}{20} \end{array} \right]$$

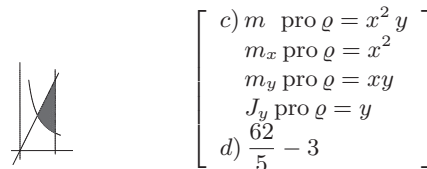
308. D je ohraničena křivkami: $x = y^2$, $x - y - 2 = 0$, $f(x, y) = y^2$



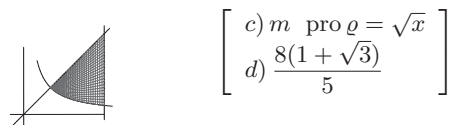
309. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 0, y \leq x + 2, y \geq x^2\}$, $f(x, y) = 2x(y + 1)$



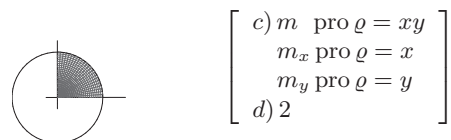
310. D je ohraničena křivkami: $y = 2x$, $y = 2/x$, $x = 2$, $f(x, y) = x^2 y$



311. D je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $x = 3$, $f(x, y) = \sqrt{x}$



312. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x, y) = xy$



• Určete plošný obsah P rovinného obrazce $D \subset \mathbb{E}_2$ ohraničeného danými křivkami :

313. $x = y^2$, $8x = y^2$, $y = 5$ [$\frac{875}{24}$]

314. $y = x^2$, $x - y + 2 = 0$, $x = 0$, $x = 1$ [$\frac{13}{6}$]

315. $x = y^2$, $xy = 1$, $x = 4y$, $(xy \geq 1)$ [$\frac{21}{2} - \ln 2$]

316. $\left(4x^2 + \frac{y^2}{9}\right)^2 = xy$ [$\frac{9}{8}$]

317. $y = \ln x$, $x - y = 1$, $y = -1$ [$\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$]

318. $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{8}{4 + x^2}$ [$2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$]

- Určete hmotnost m rovinné desky omezené křivkami :

319. $y = x^2$, $x - y + 2 = 0$, je-li hustota $\rho(x, y) = xy$ $\left[\frac{45}{8}\right]$

320. $x^2 + y^2 = 2ax$, je-li $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$ $\left[\frac{32}{9}a^3\right]$

321. $x = y^2$, $xy = 1$, $x = 4$, je-li $\rho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

322. $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, ($y \geq 0$), je-li $\rho(x, y) = y$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

323. $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $y = x$, $y = 0$, je-li hustota $\rho(x, y)$ v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic. $\left[\frac{70\sqrt{2}}{9}\right]$

- Určete hmotnost m rovinné desky D při dané plošné hustotě $\rho(x, y)$.

324. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \leq x + 2, y \geq x^2, x \geq 0\}$, $\rho(x, y) = xy$ [6]

325. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \leq 4, x \geq y^2, y \geq 1/x\}$, $\rho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

326. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$, $\rho(x, y) = y$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

- Určete těžiště T rovinné desky omezené křivkami :

327. $y = 2x - 3x^2$, $y = -x$, je-li $\rho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right]\right]$

328. $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, je-li $\rho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]\right]$

329. $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$, je-li $\rho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{2}{5}, 0\right]\right]$

330. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, je-li $\rho(x, y) = 1$ (jde o čtvrtinu asteroidy ležící v I. kvadrantu, použijte souřadnice $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$) $\left[x_T = y_T = \frac{256a}{315\pi}\right]$

- Určete moment setrvačnosti :

331. kruhu o poloměru a vzhledem k jeho tečně, $\rho(x, y) = 1$, $\left[\frac{5}{4}\pi a^4\right]$

332. množiny ohraničené elipsou $4x^2 + y^2 \leq 1$ vzhledem k ose y , $\rho(x, y) = y$, $\left[\frac{1}{30}\right]$

333. čtvrtiny kruhu o poloměru a vzhledem k jeho ose souměrnosti, $\rho(x, y) = 1$,
(Zvolte polohu tak, aby osa x byla osou souměrnosti.) $\left[\frac{a^4(\pi - 2)}{16}\right]$

334. čtverce o straně a vzhledem k jeho vrcholu, $\rho(x, y) = 1$, $\left[\frac{2}{3}a^4\right]$

335. části mezikruží $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, omezeného přímkami $y = x$, $y = 0$ v I. kvadrantu s hustotou $\rho(x, y) = k$, ($k > 0$) vzhledem ke středu mezikruží. $\left[\frac{15k\pi}{16}\right]$

- Je dána omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ a funkce $f(x, y)$

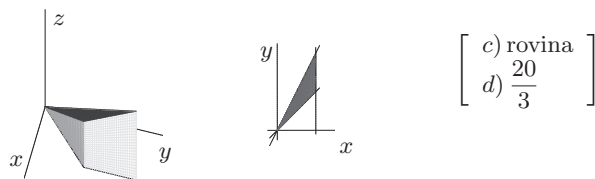
a) Načrtněte těleso, jehož objem bude roven hodnotě spočítaného integrálu.

b) Načrtněte průmět tělesa do roviny $z = 0$.

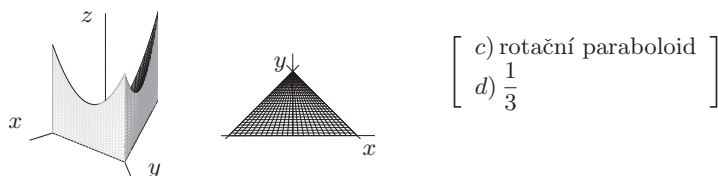
c) Napište název plochy $z = f(x, y)$.

d) Vypočítejte $\iint_D f(x, y) dx dy$.

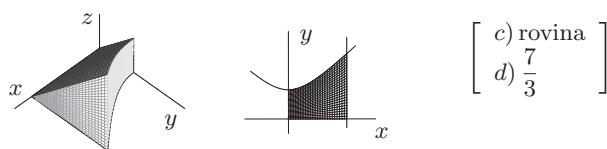
336. D je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $f(x, y) = x + y$



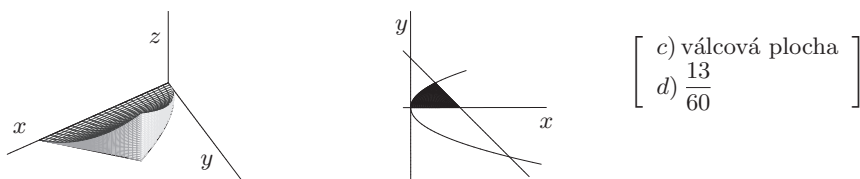
337. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$



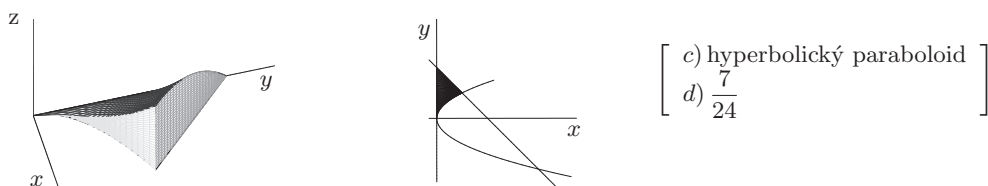
338. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y^2 - x^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 2, y \geq 0\}$, $f(x, y) = y$



339. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2\}$, $f(x, y) = y^2$



340. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \geq 0, x + y \leq 2, x \leq y^2\}$, $f(x, y) = xy$



341. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$, $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

