III. Dvojný a trojný integrál

III.1. Existence

Nechť D je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v $\mathbb{E}_2$ (resp. $\mathbb{E}_3$) a funkce f je omezená na D. Nechť množina bodů nespojitosti funkce f v D má míru 0. Potom f je integrovatelná v D, tj. integrál

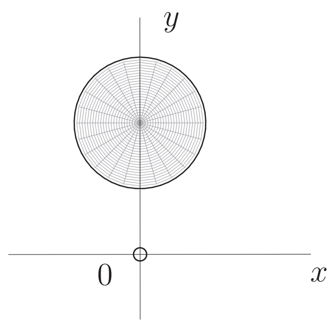
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(resp. } \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz) \qquad \textit{existuje.}$$

POZNÁMKA : Další podrobnosti najdete ve skriptech J.Neustupa: *Matematika II.*

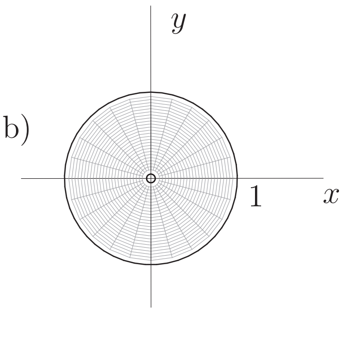
***Příklad* 237**. Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le \frac{1}{4}\}$;
b) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 1\}$;
c) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le 2\}$.

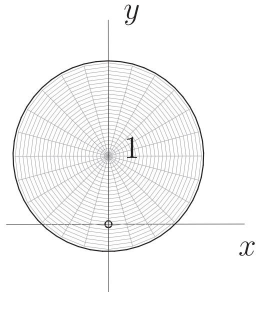
Řešení : Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál (vlastní) je definován pouze pro funkce omezené na omezené množině D a dále budeme používat větu o existenci.

a) 

Množina D je měřitelná, tedy D je omezená a její hranice má míru 0 a $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na D. Integrál existuje.

b) 

Množina D je měřitelná, ale $f(x,y)$ není omezená v D, protože $[0,0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.

c) 

$f(x,y)$ opět není omezená na D $\quad([0,0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

***Příklad* 238**. Je dána množina $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vyšetřete, zda existují dvojné integrály :

a) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, b) $\displaystyle\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, c) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$,

d) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+xy}\,dx\,dy$, e) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$.

Řešení :

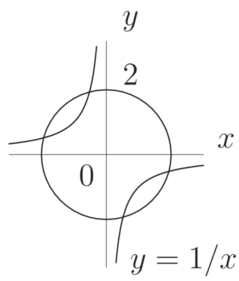
a) existuje, $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 < \infty \Rightarrow$ funkce je omezená,

b) neexistuje, $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{x^2+y^2} = \infty$,

c) existuje, $\displaystyle\frac{1}{x^2+y^2+1}$ je spojitá v $D \subset \mathbb{E}_2$,

d) neexistuje, protože např. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,1]} \left|\frac{1}{1+xy}\right| = \infty$,

e) neexistuje, protože např. $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,-1]} \frac{1}{(x+y)^2} = \infty$.



■

***Příklad* 239**. Vyšetřete, zda existují trojné integrály :

a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 0,\ -2 \leq z \leq 2\}$,

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 \leq y \leq 2,\ z \geq 3\}$,

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz$, $W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$.

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\displaystyle\frac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená na W, $\{1+x+z=0\} \cap W \neq \emptyset$,

b) neexistuje, protože množina W není omezená v $\mathbb{E}_3$,

c) existuje; W je měřitelná množina v $\mathbb{E}_3$; $x^2+y^2+z^2-9 \neq 0$ ve W, tedy integrovaná funkce je spojitá na W; $\displaystyle\frac{1}{8} < \left|\frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\right| < \frac{1}{5}$ pro každý bod $[x,y,z] \in W$, tedy funkce je omezená na W. ■

III.2. Fubiniho věta pro dvojný integrál

Množinu $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, kde funkce $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ jsou spojité na $< a, b >$ a $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose x.

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v M. Pak

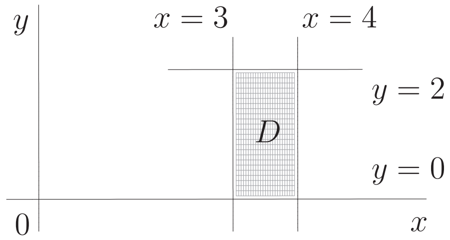
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

POZNÁMKA: Analogicky pro elementární obor vzhledem k ose y

• Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách :

***Příklad* 240**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2 - 2xy + y^2}, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\}$

Řešení :



Obdélník D je ohraničen křivkami $x = 3,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 2.$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2}\Big)\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{-1}{x-y}\Big]_3^4 dy = \int_0^2 \Big(\frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y}\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \Big(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3}\Big)\,dy = \Big[\ln|y-4| - \ln|y-3|\Big]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 =$$

$$= \ln\frac{2\cdot 3}{4} = \ln\frac{3}{2}.$$ ■

***Příklad* 241**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x-2y+3)^2}, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

Řešení :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{1}{(x-2y+3)^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{x-2y+3}\Big]_0^2 dy = \int_0^1 \Big(\frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y}\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3}\Big)\,dy = \Big[\frac{1}{2}\ln|2y-5| - \frac{1}{2}\ln|2y-3|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$ ■

***Příklad* 242**. $I = \displaystyle\iint_D y^2 \sin^2 x\,dx\,dy, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2\}$

Řešení : $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \cdot \int_1^2 y^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \cdot \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 =$

$$= \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}.$$ ■

POZNÁMKA: Je-li funkce typu $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ a množina D je obdélník

$D = \langle a,\, b\rangle \times \langle c,\, d\rangle$, pak $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy.$

***Příklad* 243**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{xy\mathrm{e}^{x^2}}{y^2+3}\,dx\,dy, \quad D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$

Řešení :

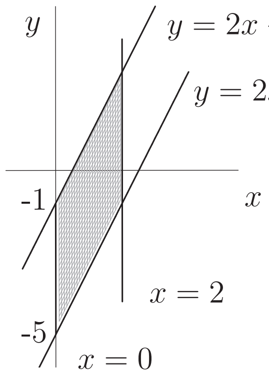
$$I = \int_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3}\,dy = \left|\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^4 \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} \cdot \frac{1}{2}\Big[\ln|\mathrm{y}^2+3|\Big]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\Big]_0^4 \cdot \frac{1}{2}\Big(\ln 12 - \ln 3\Big) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - 1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{12}{3} = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^4-1)\ln 4 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1)\ln 2.$$ ■

- Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a vyjádřete jako elementární obor integrace.

***Příklad* 244**. $2x - y = 1,\ 2x - y = 5,\ x = 0,\ x = 2$

Řešení :



$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2x - 5 \le y \le 2x - 1 \end{cases}$$

↑ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na D pomocí Fubiniovy věty.

Množina D je elementárním oborem integrace vzhledem k ose x.

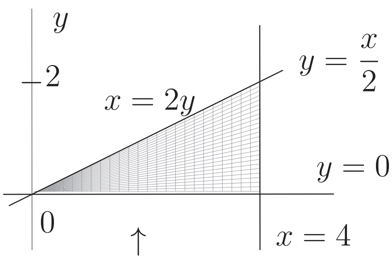
↑

■

***Příklad* 245**. $y = 0,\ x = 2y,\ x = 4$

Řešení :

→



1) ↑
$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

nebo

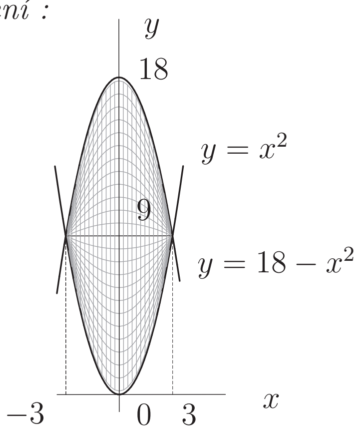
2) →
$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 2y \le x \le 4 \end{cases}$$

D je elementární oblast integrace vzhledem k ose x 1) ↑ i k ose y 2) →

■

***Příklad* 246**. $y = 18 - x^2,\ y = x^2$

Řešení :



$$18 - x^2 = x^2 \implies x^2 = 9 \implies x_{1,2} = \pm 3$$

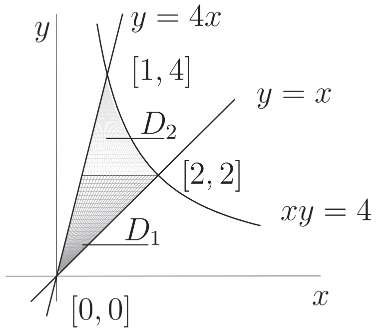
↑
$$D : \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x^2 \le y \le 18 - x^2 \end{cases}$$

■

***Příklad* 247**. $xy = 4,\ y = x,\ y = 4x,\ (x \geq 0)$

Řešení :

$\rightarrow$



$D = D_1 \cup D_2$

$\rightarrow$

$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \leq x \leq \dfrac{4}{y} \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

■

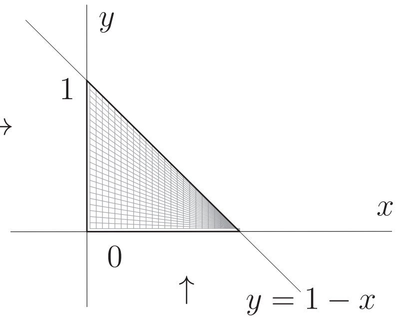
• Zaměňte pořadí integrace :

***Příklad* 248**. $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

1) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$ $\rightarrow$

$\uparrow$



$\uparrow$

2) $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - y \end{cases}$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

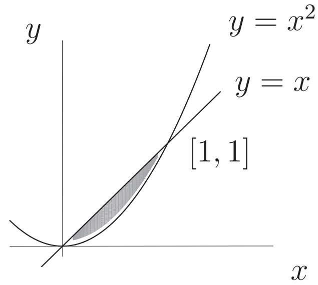
■

***Příklad* 249**. $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

1) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$ $\rightarrow$

$\uparrow$



$\uparrow$

2) $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

■

***Příklad* 250**. $I = \int_0^4 \Big(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x} \end{cases}$$

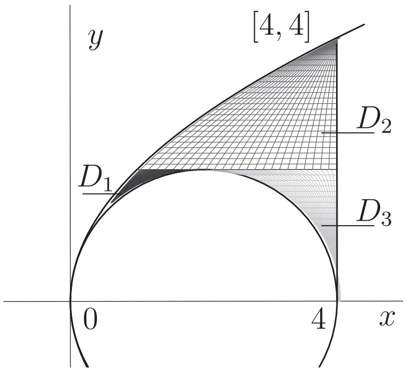
$\uparrow$

Množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :
$y = \sqrt{4x-x^2}$, což je rovnice "horní" poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
$y = \sqrt{4x}$, což je rovnice "horní" větve paraboly $y^2 = 4x$,
$x = 4, \quad x = 0.$

2) Ve směru osy x rozdělíme množinu D na tři části tak, aby tyto části byly elementárními obory integrace.

$\rightarrow \qquad D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

$\rightarrow$



$\uparrow$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \frac{y^2}{4} \le x \le 2 - \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ \frac{y^2}{4} \le x \le 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 2 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 4 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_2^4 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_0^2 \Big(\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

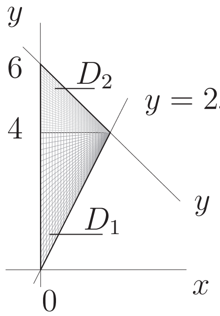
***Příklad* 251**. $I = \int_0^4 \Big(\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_4^6 \Big(\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

Řešení :

$D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 4 \le y \le 6 \\ 0 \le x \le 6 - y \end{cases}$$



Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu D bez předcházejícího dělení :

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2x \le y \le 6 - x \end{cases}$$

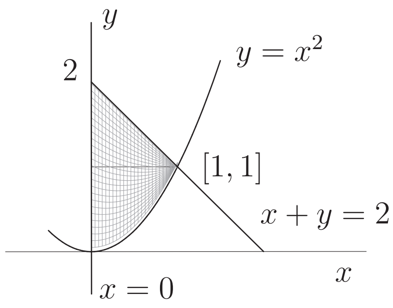
$$I = \int_0^2 \Big(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Pomocí Fubiniho věty převeďte dvojný integrál $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na dvojnásobné integrály pro oba směry integrace, jestliže množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená křivkami :

***Příklad* 252**. $x = 0,\ y = x^2,\ x + y = 2\ (x \geq 0)$

Řešení :



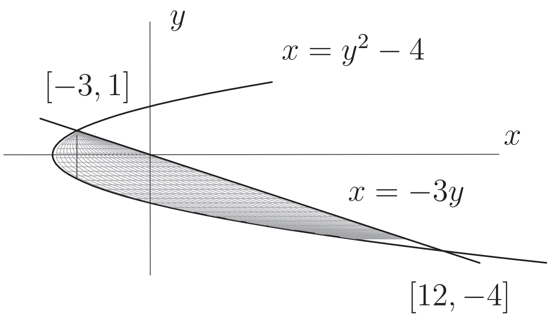
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_1^2 \Big(\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 253**. $x = y^2 - 4,\ x = -3y$

Řešení : Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-4}^1 \Big(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy =$$

$$= \int_{-4}^{-3} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx +$$

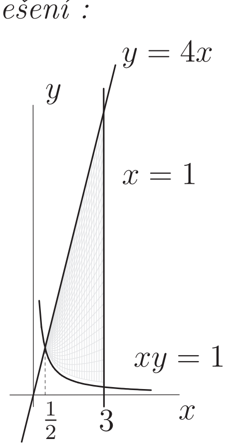
$$+ \int_{-3}^{12} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Načrtněte množinu $D \subset \mathbb{E}_2$ omezenou zadanými křivkami a vypočítejte dané integrály :

***Příklad* 254**. $I = \iint_D \dfrac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \quad D : xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3$

Řešení :



$$I = \int_{1/2}^3 \Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \Big)\,dx = \int_{1/2}^3 x^2 \Big[-\frac{1}{y} \Big]_{1/x}^{4x}\,dx =$$

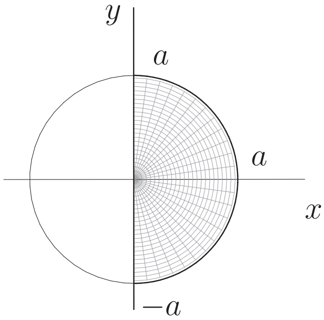
$$= \int_{1/2}^3 x^2 \Big(-\frac{1}{4x} + x \Big)\,dx = \int_{1/2}^3 \Big(x^3 - \frac{x}{4} \Big)\,dx =$$

$$= \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8} \Big]_{1/2}^3 = \frac{1225}{64}$$

■

***Příklad* 255.** $I = \iint_D x^3y^2\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2=a^2,\ x=0\ (x\geq 0)$

Řešení :



$$I = \int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3y^2\,dx\Big)\,dy = \int_{-a}^{a} y^2\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy =$$
$$= \int_{-a}^{a}\frac{y^2}{4}(a^2-y^2)^2\,dy = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a y^2(a^4-2a^2y^2+y^4)\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[a^4\frac{y^3}{3} - 2a^2\frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7}\Big]_0^a = \frac{1}{2}a^7\Big(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\Big) = \frac{4}{105}a^7$$

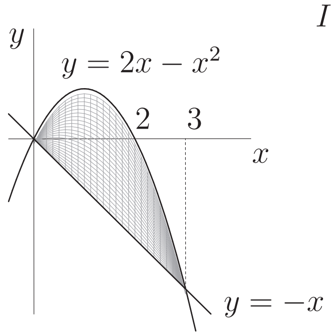
■

***Příklad* 256.** $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+1}, \quad D: y=2x-x^2,\ y=-x$

Řešení : $y=2x-x^2$ neboli $y-1=-(x-1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1,1]$.

Průsečíky paraboly s přímkou $y=-x$ najdeme tak, že zjistíme jejich x-ové souřadnice :

$$\begin{cases} y = 2x-x^2 \\ y=-x \end{cases} \quad \text{po dosazení} \quad \begin{array}{c} -x = 2x-x^2 \implies x(x-3)=0 \\ \implies x_1=0,\ x_2=3 \end{array}$$

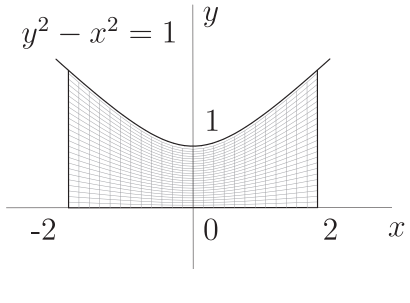


$$I = \int_0^3\Big(\int_{-x}^{2x-x^2}\frac{dy}{x^2+1}\Big)\,dx = \int_0^3\frac{1}{x^2+1}(2x-x^2+x)\,dx =$$
$$= \int_0^3\frac{-x^2+3x}{x^2+1}\,dx = -\int_0^3\frac{x^2+1-3x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= -\int_0^3\Big(1-3\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx = -\Big[x-\frac{3}{2}\ln|x^2+1| -$$
$$-\operatorname{arctg} x\Big]_0^3 = \frac{3}{2}\ln 10 + \operatorname{arctg} 3 - 3$$

■

***Příklad* 257.** $I = \iint_D (x+y)\,dx\,dy, \quad D: y^2-x^2\leq 1,\ y\geq 0,\ x\in\langle -2,2\rangle$

Řešení : $y^2-x^2=1$ je rovnice hyperboly .



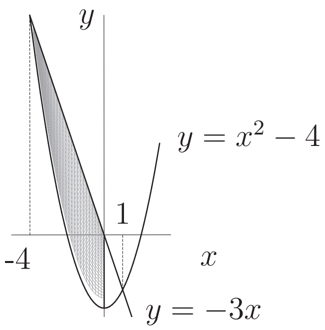
$$I = \int_{-2}^{2}\Big(\int_0^{\sqrt{1+x^2}}(x+y)\,dy\Big)\,dx = \int_{-2}^{2}\Big[xy+\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= \int_{-2}^{2}\Big(x\sqrt{1+x^2}+\frac{1+x^2}{2}\Big)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx}_{=\ 0\ (\text{lichá funkce})} +$$
$$+\frac{2}{2}\int_0^2\underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}}\,dx = \Big[x+\frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{14}{3}$$

■

***Příklad* 258**. $I = \iint_D (1+x)\, y\, dx\, dy, \quad D: y = x^2 - 4,\ y = -3x,\ x \le 0$

Řešení : Stanovíme x-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{cases}$. Po dosazení $\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = -4 \end{array}$



$$I = \int_{-4}^{0} \Big(\int_{x^2-4}^{-3x} (1+x) y\, dy \Big)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{0} (1+x) \Big[y^2 \Big]_{x^2-4}^{-3x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-4}^{0} (1+x)(9x^2 - (x^2-4)^2)\, dx =$$

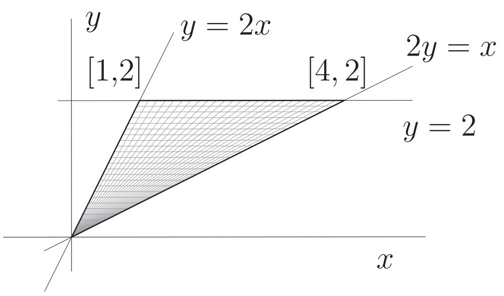
$$= \frac{1}{2} \int_{-4}^{0} (-x^5 - x^4 + 17x^3 + 17x^2 - 16x - 16)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \Big[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{17x^4}{4} + \frac{17x^3}{3} - 8x^2 - 16x \Big]_{-4}^{0} = \frac{-1376}{15}$$

■

***Příklad* 259**. $\iint_D (x+1)\, dx\, dy, \quad D: y = 2x,\ 2y = x,\ y = 2$

Řešení :



$$\iint_D (x+1)\, dx\, dy = \int_0^2 \Big(\int_{y/2}^{2y} (x+1)\, dx \Big)\, dy =$$

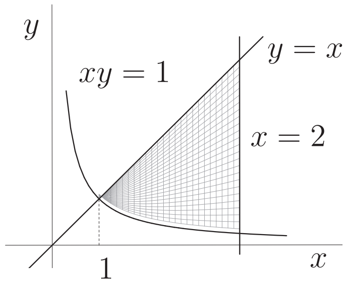
$$\int_0^2 \Big[\frac{x^2}{2} + x \Big]\, dy = \int_0^2 \Big[\frac{4y^2}{2} + 2y - \frac{y^2}{8} - \frac{y}{2} \Big]\, dy =$$

$$\int_0^2 \Big[\frac{15}{8} y^2 + \frac{3}{2} y \Big]\, dy \cdots = 8$$

■

***Příklad* 260**. $\iint_D \frac{1}{y}\, dx\, dy, \quad D: xy = 1,\ y = x,\ x = 4,\ x \ge 0$

Řešení :



$$\iint_D \frac{1}{y}\, dx\, dy = \int_1^4 \Big(\int_{1/x}^{x} \frac{1}{y}\, dy \Big)\, dx = \int_1^4 \Big[\ln|y| \Big]_{1/x}^{x} dx =$$

$$= \int_1^4 \Big(\ln x - \ln \frac{1}{x} \Big)\, dx = 2 \int_1^4 \ln x\, dx = \text{ (per partes)}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right| = 2 \Big[x \ln x - x \Big]_1^4 = 8 \ln 4 - 6$$

■

261. $\iint_D \frac{dx\, dy}{(x+y)^2}, \quad D: x = 3,\ x = 4,\ y = 1,\ y = 2$ $\quad \left[\ln \frac{25}{24}\right]$

262. $\iint_D \cos(x+y)\, dx\, dy, \quad D: x = 0,\ y = \pi,\ y = x$ $\quad$ [-2]

263. $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad D: y = 0,\ y = 1 - x,\ y = 1 + x$ $\quad \left[\frac{1}{3}\right]$

264. $\iint_D (x + 2y)\, dx\, dy, \quad D: x = y^2 - 4,\ x = 5$ $\quad$ [50,4]

265. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D: y = x-4,\ y^2 = 2x$ [90]

266. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y+1}\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=2,\ y=4,\ y^2=x$ $\left[4+\ln\frac{5}{3}\right]$

267. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: y^2=x,\ y^2=4x,\ y=2$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

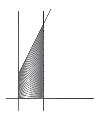
268. $\displaystyle\iint_D (xy+y)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ x=2,\ xy=4,\ y=0$ $\left[4+8\ln 2\right]$

269. Převeďte dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace) a integrál vypočítejte. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \geq \ln x,\ x \geq 1,\ y \leq 1\}$, $f(x,y) = 1/x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

• Omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ je zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami a je dána funkce $f(x,y)$

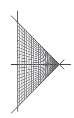
a) Načrtněte množinu D s popisem os, měřítkem, popisem křivek a vyznačením bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité.
b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniho věty.
c) Množinu D vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace vzhledem ke vhodně zvolené ose.
d) Vypočítejte $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

270. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq\ 2x+1\}, \quad f(x,y) = x^2y$



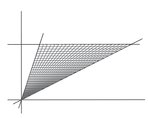
$\left[\begin{array}{l} c)\ x \in \langle 0,1\rangle \\ \quad y \in \langle 0, 2x+1\rangle \\ d)\ \frac{16}{15} \end{array}\right]$

271. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x+y \leq \pi,\ x-y \leq \pi,\ x \geq 0\} \quad f(x,y) = \sin(x+y)$ $[\pi]$



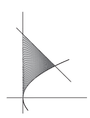
$\left[\begin{array}{l} c)\ x \in \langle 0,1\rangle \\ \quad y \in \langle x-\pi, -x+\pi\rangle \\ d)\ \pi \end{array}\right]$

272. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x/2$, $y = 3x$, $y = 2$ $\quad f(x,y) = x\sqrt{y}$



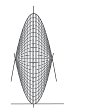
$\left[\begin{array}{l} c)\ y \in \langle 0,2\rangle \\ \quad x \in \langle y/3, 2y\rangle \\ d)\ \frac{40\sqrt{2}}{9} \end{array}\right]$

273. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \geq 0,\ x+y \leq\ 2,\ x \leq y^2\} \quad f(x,y) = xy$



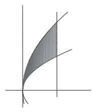
$\left[\begin{array}{l} c)\ x \in \langle 0,1\rangle \\ \quad y \in \langle \sqrt{x}, 2-x\rangle \\ d)\ \frac{7}{24} \end{array}\right]$

274. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\; y \geq x^2,\; y \leq 12 - x^2\}$ $\quad f(x,y) = |x|$



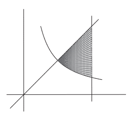
$\left[\begin{array}{l} c)\; -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \\ \qquad x^2 \leq y \leq 12 - x^2 \\ d)\; 36 \end{array}\right]$

275. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1$ $\quad f(x,y) = 2xy$



$\left[\begin{array}{l} c)\quad 0 \leq x \leq 1 \\ \quad \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \\ d)\; 1 \end{array}\right]$

276. $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $y = 2$ $\quad f(x,y) = xy^2$



$\left[\begin{array}{l} c)\quad 0 \leq x \leq 2 \\ \quad 1/x \leq y \leq x \\ d)\; \dfrac{13}{5} \end{array}\right]$

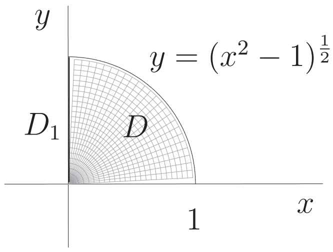
III.3. Substituční metoda pro dvojný integrál

Nechť existuje vzájemně jednoznačné regulární zobrazení oblasti $B(u,v) \subset \mathbb{E}_2$ na oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ definované rovnicemi $x = \phi_1(u,v)$, $y = \phi_2(u,v)$. Pak

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B(u,v)} f\Big(\phi_1(u,v),\, \phi_2(u,v)\Big)|J|\,du\,dv, \text{ kde } J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

***Příklad* 277**. Rozhodněte, zda existuje integrál $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 1,\; y \geq 0,\; x \geq 0\}$. Pokud ano, spočítejte jej.

Řešení :



Množina D je měřitelná v $\mathbb{E}_2$.
Funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ není definována na množině $D^* = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x = 0\}$. Množina bodů nespojitosti funkce f v D, tj. $D_1 = \{[x,y] \in D : x = 0, y \in <0,1>\}$ je množina míry nula v $\mathbb{E}_2$.
Dále platí, že funkce f je omezená na množině $D \setminus D_1$, proto daný integrál existuje.

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ J = r & & \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 \varphi \cdot r\,dr \Big)\,d\varphi =$$

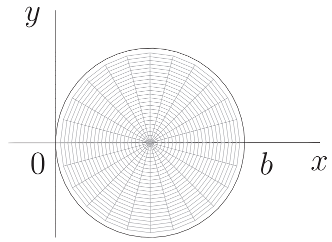
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r \, dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}.$$ ■

• Vypočítejte integrály :

***Příklad* 278.** $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy,\ D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2-bx \le 0\},\ b>0$

Řešení :

$$D : \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \left| \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} & \begin{array}{c} x^2+y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{b\cos\varphi} r \cdot r\, dr\right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3} b^3 \cdot \frac{2}{3\cdot 1} \cdot 1 = \frac{4}{9} b^3.$$ ■

***Příklad* 279.** $\displaystyle\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy,\ D = \{[x,y] \in \mathbb{E}^2 : x^2+y^2 \le a^2,\ x \le 0\}$

Řešení :

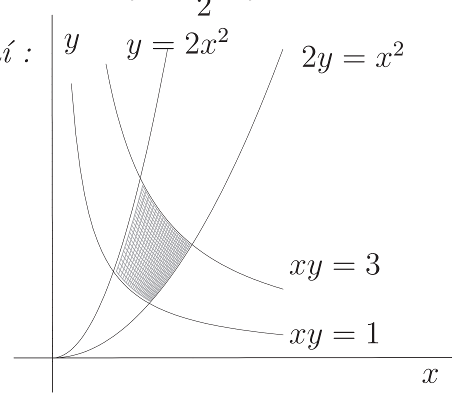
$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\, dx\, dy = \left| \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} & \begin{array}{c} 0 \le r \le a \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2) \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\, dr = \left[\begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\, dr = dt \end{array}\right] =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^{1+a^2} \ln t\, dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\Big((1+a^2)\ln(1+a^2) - a^2\Big).$$ ■

Příklad* 280. $\displaystyle\iint_D x^3\, dx\, dy$, kde $D \subset \mathbb{E}_2$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1,\ xy = 3,$ $y = \dfrac{x^2}{2},\ y = 2x^2.$

Řešení :



Použijeme transformaci $\left\{ \begin{array}{l} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{array} \right.$

$D \implies D^*$, kde

$D^* = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2 : 1 \le u \le 3,\ \ \dfrac{1}{2} \le v \le 2\}.$

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2, \quad \frac{u}{x} = vx^2 \Longrightarrow x^3 = \frac{u}{v}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \Longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

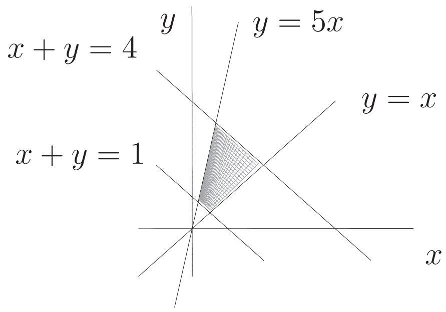
Užitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \iint_{D^*} \frac{u}{v}\cdot J\,du\,dv = \int_{1/2}^{2}\Big(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\Big)\,dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{2}\frac{1}{v^2}\,dv\cdot\int_1^3 u\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{v}\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}\cdot\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 281**.* $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dx\,dy,\ D \subset \mathbb{E}_2$ je omezená přímkami $x+y=1,\ x+y=4,$ $y=x,\ y=5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left.\begin{aligned} x+y &= u \\ \frac{y}{x} &= v \end{aligned}\right\},\quad D \quad\Longrightarrow\quad D^*,\quad \text{kde}$$

$$D^* = \{[u,v] \in \mathbb{E}_2 : 1 \le u \le 4, \quad 1 \le v \le 5\}.$$

Potom $\left.\begin{aligned} x &= \frac{u}{1+v} \\ y &= \frac{uv}{1+v} \end{aligned}\right\}$; $\quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \dfrac{u}{(1+v)^3} + \dfrac{uv}{(1+v)^3} = \dfrac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

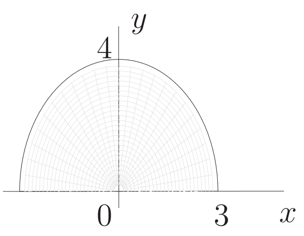
$$\iint_D (2x-y)\,dx\,dy = \iint_{D^*}\Big(\frac{2u}{1+v}-\frac{uv}{1+v}\Big)\cdot J\,du\,dv = \int_1^5\Big(\int_1^4\Big(\frac{2u}{1+v}-\frac{uv}{1+v}\Big)\frac{u}{(1+v)^2}\,du\Big)\,dv =$$

$$= \int_1^4 u^2\,du\cdot\int_1^5 \frac{2-v}{(1+v)^3}\,dv = \Big[\frac{u^3}{3}\Big]_1^4\cdot\int_1^5 -\frac{v+1-3}{(1+v)^3}\,dv = 21\cdot\int_1^5\Big(-\frac{1}{(1+v)^2}+\frac{3}{(1+v)^3}\Big)\,dv =$$

$$= 21\cdot\Big[\frac{1}{1+v} - \frac{3}{2(1+v)^2}\Big]_1^5 = 21\Big(\frac{1}{6} - \frac{3}{2\cdot 36} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 4}\Big) = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 282**. $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy,\ D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2+9y^2 \le 36,\ y \ge 0\}$

Řešení :



Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\left.\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi \\ y &= 2r\sin\varphi \end{aligned}\right\},\quad J = 3\cdot 2\cdot r,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi \Big(\int_0^1 \sqrt{1+4\cdot 9r^2\cos^2\varphi + 9\cdot 4r^2\sin^2\varphi}\cdot 6r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+36r^2}\,\cdot\,6r\,dr = \pi\cdot\frac{1}{12}\left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{18}(37\sqrt{37}-1). \qquad \blacksquare$$

283. $\displaystyle\iint_D (x-2y+3)\,dx\,dy, \quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 : x^2+y^2\le a^2\}$ $\quad [3\pi a^2]$

284. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy, \quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 : (x-2)^2+\frac{(y-1)^2}{4}\le 1\}$

(Použijte souřadnice $x=2+r\cos\varphi, y=1+2r\sin\varphi$.) $\quad [4\pi]$

285. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 : x^2+y^2\le 2x\}$ $\quad \left[\frac{32}{9}\right]$

286. $\displaystyle\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy, \quad D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 : xy=1,\ xy=4,\ y=x,\ y=9x\}$

(Použijte souřadnice $xy=u, \frac{y}{x}=v$.) $\quad \left[J=\frac{1}{4v}, \frac{19}{3}\right]$

• Vypočtěte integrály $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, je-li dána množina D a funkce $f(x,y)$

287. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ x\ge 0\} \quad f(x,y)=xy^2$ $\quad \left[\frac{48}{5}\right]$

288. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ x^2+9y^2\le 9,\ x\ge 0\}, \quad f(x,y)=y^2$ $\quad \left[\frac{3\pi}{8}\right]$

289. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ x^2+4y^2\le 4,\ y\ge 0\}, \quad f(x,y)=y\,\sqrt{x^2+4y^2}$ $\quad [2]$

290. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ 36x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}, \quad f(x,y)=xy$ $\quad \left[\frac{9}{32}\right]$

291. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ x^2+y^2\le 4x,\ y\ge 0\}, \quad f(x,y)=xy$ $\quad \left[\frac{32}{3}\right]$

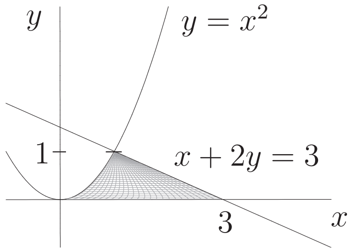
292. $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 ;\ x^2+y^2\le 4, x\ge 0\}, \quad f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ $\quad [\pi(1-\mathrm{e}^{-4})]$

III.6. Aplikace dvojných integrálů

• Určete plošný obsah rovinného obrazce $D \subset \mathbb{E}_2$ ohraničeného danými křivkami :

***Příklad* 293**. $y = x^2,\ x + 2y = 3,\ y = 0$

Řešení :

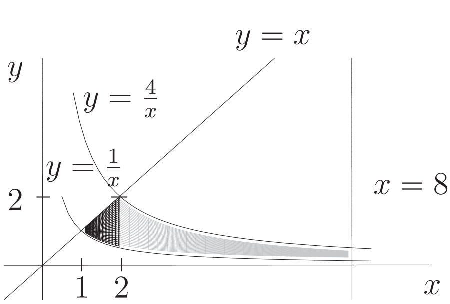


$$P = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} 1\,dx \Big)\,dy = \int_0^1 \Big[x\Big]_{\sqrt{y}}^{3-2y}\,dy =$$
$$= \int_0^1 \Big(3 - 2y - \sqrt{y}\Big)\,dy = \Big[3y - y^2 - \frac{2y\sqrt{y}}{3}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

■

***Příklad* 294**. $xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ x = 8$

Řešení :

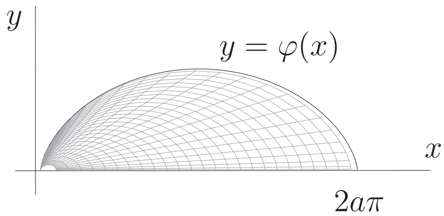


$$P = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{x} 1\,dy \Big)\,dx + \int_2^8 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} 1\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_1^2 \Big(x - \frac{1}{x}\Big)\,dx + \int_2^8 \Big(\frac{4}{x} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \Big[\frac{x^2}{2} - \ln|x|\Big]_1^2 +$$
$$+3\Big[\ln|x|\Big]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln\frac{8^3}{2 \cdot 2^3} =$$
$$= \frac{3}{2} + \ln 32.$$

■

***Příklad* 295**. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :



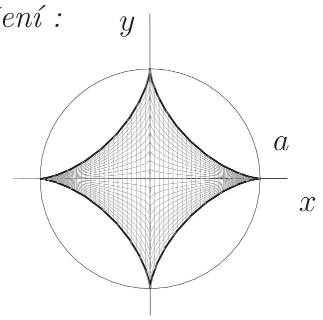
Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$P = \iint_D 1\,dx\,dy = \left| \begin{array}{c} 0 \le x \le 2\pi a \\ 0 \le y \le \varphi(x) \end{array} \right| = \int_0^{2\pi a} \Big(\int_0^{\varphi(x)} 1\,dy \Big)\,dx = \int_0^{2\pi a} \varphi(x)\,dx =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \text{substituce :} \\ x = x(t) = a(t - \sin t) \ \Rightarrow\ dx = a(1 - \cos t)\,dt \\ y = y(t) = a(1 - \cos t) \\ x \in < 0, 2\pi a > \quad \Rightarrow \quad t \in < 0, 2\pi > \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\,dt =$$
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt == a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \cos^2 t\Big)\,dt = a^2 \Big[t - 2\sin t\Big]_0^{2\pi} +$$
$$+a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt == a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3\pi a^2.$$

■

***Příklad* 296**. Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Řešení :



$$P=\iint_D 1\,dx\,dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $\begin{array}{c} x=r\cos^3\varphi \\ y=r\sin^3\varphi \end{array}$

$$\Big(r\cos^3\varphi\Big)^{2/3}+\Big(r\sin^3\varphi\Big)^{2/3}=a^{2/3}\Longrightarrow r^{2/3}=a^{2/3}\Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{c} 0\le r\le a \\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right|,\quad J=\left|\begin{array}{cc} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi\end{array}\right|=3r\sin^2\varphi\cos^4\varphi+3r\sin^4\varphi\cos^2\varphi=$$
$$=3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

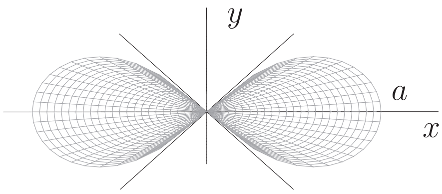
$$P=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr\Big)\,d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot 3\int_0^a r\,dr=$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\varphi}{4}\,d\varphi\cdot 3\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\cdot\frac{3}{2}\,a^2=\frac{3}{4}\,a^2\Big[\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=\frac{3}{4}\,a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

■

• Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :

***Příklad* 297**. $\Big(x^2+y^2\Big)^2=a^2(x^2-y^2)$ (**Bernoulliova lemniskáta**)

Řešení :



$$P=\iint_D 1\,dx\,dy=\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ J=r\end{array}\right|.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4=a^2r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, $r^2=a^2\cos 2\varphi$,

$0\le r\le a\sqrt{\cos 2\varphi}\quad\Longrightarrow\cos 2\varphi\ge 0,\quad \varphi\in\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\rangle\cup\langle\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\rangle.$

$$P=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\Big)\,d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=$$
$$=2a^2\Big[\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

■

***Příklad* 298**.* $\Big(x^2+9y^2\Big)^2=x^2y$

Řešení : $P=\iint_D 1\,dx\,dy=\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi \\ y=\frac{r}{3}\sin\varphi \\ J=\frac{1}{3}\,r\end{array}\right|$

$$r^4=r^2\cos^2\varphi\cdot\frac{r}{3}\sin\varphi$$
$$0\le r\le\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi$$
$$\cos^2\varphi\sin\varphi\ge 0\Longrightarrow 0\le\varphi\le\pi$$

$$P=\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\frac{1}{3}\,r\,dr\Big)\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}d\varphi=$$

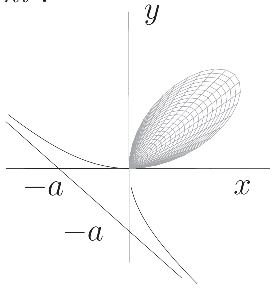
$$=\frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{54}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi-\cos^6\varphi)\,d\varphi=\text{(Wallisova formule)}=\frac{1}{27}\Big(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{864}.$$

■

***Příklad* 299**.* $(x^3+y^3)=3axy$ (**Descartesův list**)

Řešení :



$$P=\iint_D 1\,dx\,dy=\left|\begin{array}{lcl} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le r(\varphi)\\ y=r\sin\varphi & | & \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\\ J=r & & \end{array}\right|=$$

$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big(\int_0^{r(\varphi)}r\,dr\Big)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$$x^3+y^3=3axy\quad\Longrightarrow\quad r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi,\qquad\text{takže}$$

$$r(\varphi)=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad r(0)=r(\frac{\pi}{2})=0.$$

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\Big)^2d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\Big(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\Big)^2}d\varphi=$$

(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6\varphi$)

$$=\frac{9\,a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\Big(\mathrm{tg}^3\varphi+1\Big)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\,\varphi=u\\ \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=du\end{array}\right|=\frac{9\,a^2}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du=$$

$$=\frac{3}{2}\,a^2\lim_{C\to+\infty}\int_0^{C}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du=\frac{3\,a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\Big[\frac{-1}{u^3+1}\Big]_0^C=\frac{3\,a^2}{2}\lim_{C\to+\infty}\Big(\frac{-1}{C^3+1}+1\Big)=$$

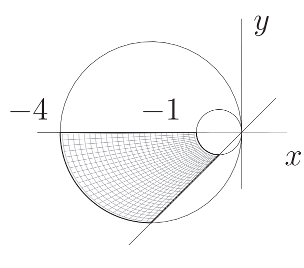
$$=\frac{3\,a^2}{2}.$$

■

***Příklad* 300**. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami
$x^2+y^2+x=0,\ x^2+y^2+4x=0,\ y=x,\ y=0.$

Řešení :

$$x^2+y^2+x=0\Longrightarrow\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+4x=0\Longrightarrow(x+2)^2+y^2=4$$



$$P=\iint_D 1\,dx\,dy=\left|\begin{array}{lcc} x=r\cos\varphi & & x^2+y^2+x=0\Longrightarrow r=-\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi & | & x^2+y^2+4x=0\Longrightarrow r=-4\cos\varphi\\ J=r & & -\cos\varphi\le r\le -4\cos\varphi\\ & & \pi\le\varphi\le\frac{5}{4}\pi\end{array}\right|=$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \Big(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r\,dr \Big)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \Big[r^2 \Big]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \Big(16\cos^2\varphi - \cos^2\varphi\Big)\, d\varphi =$$

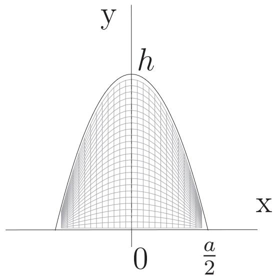
$$= \frac{15}{2}\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{15}{2}\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{15}{4}\Big[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= \frac{15}{4}\Big(\frac{5}{4}\pi + \frac{\sin\frac{5}{2}\pi}{2} - \pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\Big) = \frac{15}{4}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{15(\pi+2)}{16}.$$

■

***Příklad* 301**. Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a, výška úseče h, a plošná hustota $\varrho = 1$. Určete :
a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y - h = px^2$. Použijeme-li bod $\Big[\dfrac{a}{2}, 0\Big]$, pak $-h = p\dfrac{a^2}{4} \Longrightarrow p = \dfrac{-4h}{a^2} \Longrightarrow$ $y = h - \dfrac{4h}{a^2}x^2$.

a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$J_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} D: & 0 \le y \le h - \frac{4h}{a^2}x^2 \\ & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \end{array} \right| = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y^2\,dy \Big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big[y^3 \Big]_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(h - \frac{4h}{a^2}x^2\Big)^3 dx = \frac{h^3}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{4x^2}{a^2}\Big)^3 dx =$$

$$= \frac{2h^3}{3}\int_0^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{12x^2}{a^2} + \frac{48x^4}{a^4} - \frac{64x^6}{a^6}\Big)\, dx = \frac{2h^3}{3}\Big[x - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{48x^5}{5a^4} - \frac{64x^7}{7a^6}\Big]_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2h^3}{3}\Big(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} - \frac{a}{14}\Big) = \frac{h^3 a}{3}\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\Big) = \frac{16\,h^3 a}{105}.$$

b) $T = \big[0, y_T\big], \quad y_T = \dfrac{M_x}{m}$

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dy \Big)\, dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \Big(h - \frac{4h}{a^2}x^2\Big)\, dx =$$

$$= 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{4x^2}{a^2}\Big)\, dx = 2h\Big[x - \frac{4x^3}{3a^2}\Big]_0^{\frac{a}{2}} = 2h\Big(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\Big) = \frac{2}{3}\,ha,$$

$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y\,dy \Big)\, dx = \cdots = \frac{2}{5}\,h^2 a,$$

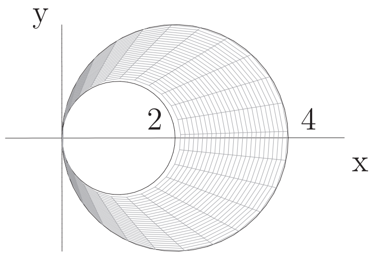
$$y_T = \frac{\frac{2}{5}\,h^2 a}{\frac{2}{3}\,ha} = \frac{3}{5}\,h, \qquad T = \Big[0, \frac{3}{5}\,h\Big].$$

■

***Příklad* 302**. Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, je-li $\varrho=10$.

Řešení :

$$x^2+y^2-2x=0 \Longrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$
$$x^2+y^2-4x=0 \Longrightarrow (x-2)^2+y^2=4$$
$$T=\big[x_T,0\big],\ x_T=\frac{M_y}{m},$$
$$m=10\cdot P=10\Big(\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2\Big)=30\pi,$$
kde P je plocha dané desky

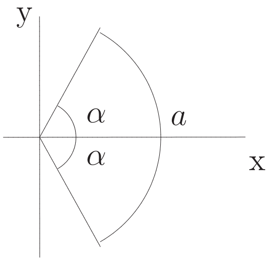


$$M_y=\iint_D 10x\,dx\,dy=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ J=r\end{array}\ \middle|\ \begin{array}{c} x^2+y^2\ge 2x\Longrightarrow \quad r\ge 2\cos\varphi\\ x^2+y^2\le 4x\Longrightarrow \quad r\le 4\cos\varphi\\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$
$$=10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi=10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=\frac{10}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}56\cos^4\varphi\,d\varphi=$$
$$=\frac{20}{3}\cdot 56\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1120}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=70\pi,$$
$$x_T=\frac{70\pi}{30\pi},\qquad T=\Big[\frac{7}{3},0\Big].$$

■

***Příklad* 303**. Určete souřadnice těžiště kruhové výseče (viz obrázek), je-li $\varrho=$ konst.

Řešení :



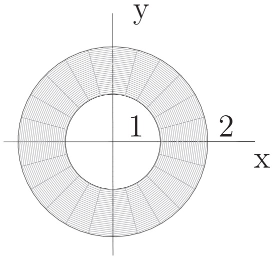
$$T=\big[x_T,0\big],\quad m=\frac{\pi a^2}{2\pi}\cdot 2\alpha\varrho=a^2\alpha\varrho,$$
$$M_y=\iint_D x\varrho\,dx\,dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ J=r\end{array}\ \middle|\ \begin{array}{c} 0\le r\le a\\ -\alpha\le\varphi\le\alpha\end{array}\right|=\varrho\int_{-\alpha}^{\alpha}\Big(\int_0^a r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi=\varrho\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^a\cdot\Big[\sin\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha}=$$
$$=\frac{2}{3}\,\varrho\,a^3\sin\alpha,\qquad x_T=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

■

***Příklad* 304**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic homogenní rovinné desky s plošnou hustotou $\varrho=k$ omezené křivkami $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

Řešení :

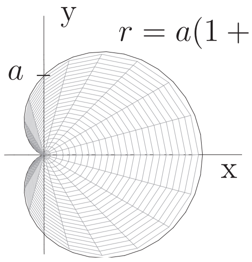


$$J_0=k\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\big[\text{polární souřadnice}\big]=$$
$$=k\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\,dr\,d\varphi=\frac{15}{2}\,k\pi.$$

■

***Příklad* 305**. Určete polohu těžiště obrazce omezeného **kardioidou** $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = \big[x_T, 0\big], \quad x_T = \frac{M_y}{m}$$

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big(\int_0^{r(\varphi)} 1\cdot r\,dr\Big) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr\Big) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\,a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\,a^2 \Big[\varphi + 2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\,a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = a^2\pi + a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\,a^2\pi,$$

$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \Big[\text{polární souř.}\ \Big] = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi =$$

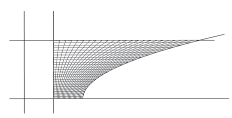
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\cdot a^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{5}{4}\,a^3\pi; \qquad x_T = \frac{5\,a}{6}.$$

■

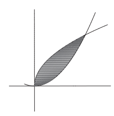
- Je dána omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ a funkce $f(x,y)$
  - a) Načrtněte množinu D.
  - b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty
  - c) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment nebo moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu nebo přímce).
  - d) Vypočítejte $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

306. D je ohraničena křivkami: $x = 1$, $x = y^2 + 2, y = 0, y = 2$, $\quad f(x,y) = y/\sqrt{x}$



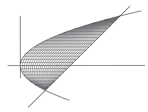
$\left[\begin{array}{l} c)\, m \ \text{ pro } \varrho = y/\sqrt{x} \\ \quad m_x \text{ pro } \varrho = 1/\sqrt{x} \\ d)\, 4\sqrt{6} - 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{array}\right]$

307. D je ohraničena křivkami: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $\quad f(x,y) = x$,



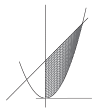
$\left[\begin{array}{l} c)\, m \ \text{ pro } \varrho = x \\ \quad m_y \text{ pro } \varrho = 1 \\ d)\, \frac{3}{20} \end{array}\right]$

308. D je ohraničena křivkami: $x = y^2$, $x - y - 2 = 0$, $\quad f(x, y) = y^2$



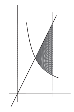
[c) m pro $\varrho = y^2$
m_x pro $\varrho = y$
J_x pro $\varrho = 1$
d) $\frac{29}{60}$]

309. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x \geq 0,\ y \leq\ x + 2,\ y \geq x^2\}$, $\quad f(x, y) = 2x(y + 1)$



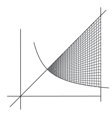
[c) m pro $\varrho = 2x(y + 1)$
m_y pro $\varrho = 2(y + 1)$
d) $\frac{52}{3}$]

310. D je ohraničena křivkami: $y = 2x$, $y = 2/x$, $x = 2$, $\quad f(x, y) = x^2\, y$



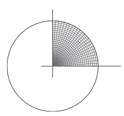
[c) m pro $\varrho = x^2\, y$
m_x pro $\varrho = x^2$
m_y pro $\varrho = xy$
J_y pro $\varrho = y$
d) $\frac{62}{5} - 3$]

311. D je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 1/x$, $x = 3$, $\quad f(x, y) = \sqrt{x}$



[c) m pro $\varrho = \sqrt{x}$
d) $\frac{8(1 + \sqrt{3})}{5}$]

312. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $\quad f(x, y) = xy$



[c) m pro $\varrho = xy$
m_x pro $\varrho = x$
m_y pro $\varrho = y$
d) 2]

• Určete plošný obsah P rovinného obrazce $D \subset \mathbb{E}_2$ ohraničeného danými křivkami :

313. $x = y^2,\ 8x = y^2,\ y = 5$ $\quad\left[\frac{875}{24}\right]$

314. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0,\ x = 0,\ x = 1$ $\quad\left[\frac{13}{6}\right]$

315. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4y,\ (xy \geq 1)$ $\quad\left[\frac{21}{2} - \ln 2\right]$

316. $\left(4x^2 + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = xy$ $\quad\left[\frac{9}{8}\right]$

317. $y = \ln x,\ x - y = 1,\ y = -1$ $\quad\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right]$

318. $y = \dfrac{x^2}{4},\ y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ $\quad\left[2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)\right]$

• Určete hmotnost m rovinné desky omezené křivkami :

319. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y) = xy$ $\left[\frac{45}{8}\right]$

320. $x^2 + y^2 = 2ax$, je-li $\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ a > 0$ $\left[\frac{32}{9}a^3\right]$

321. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4$, je-li $\varrho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

322. $x^2 + y^2 = 1,\ x + y \geq 1$, je-li $\varrho(x, y) = y$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

323. $x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x^2 + y^2 - 4x = 0,\ y = x,\ y = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y)$ v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic. $\left[\frac{70\sqrt{2}}{9}\right]$

• Určete hmotnost m rovinné desky D při dané plošné hustotě $\varrho(x, y)$.

324. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \leq x + 2,\ y \geq x^2,\ x \geq 0\},\quad \varrho(x, y) = xy$ $[6]$

325. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \leq 4,\ x \geq y^2,\ y \geq 1/x\},\quad \varrho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

326. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\},\quad \varrho(x, y) = y$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

• Určete těžiště T rovinné desky omezené křivkami :

327. $y = 2x - 3x^2,\ y = -x$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right]\right]$

328. $y = \sin x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]\right]$

329. $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{2}{5}, 0\right]\right]$

330. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \geq 0,\ y \geq 0$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ (jde o čtvrtinu asteroidy ležící v I. kvadrantu, použijte souřadnice $x = r\cos^3\varphi,\ y = r\sin^3\varphi$) $\left[x_T = y_T = \frac{256a}{315\pi}\right]$

• Určete moment setrvačnosti :

331. kruhu o poloměru a vzhledem k jeho tečně, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{5}{4}\pi a^4\right]$

332. elipsy $4x^2 + y^2 \leq 1$ vzhledem k ose y, $\varrho(x, y) = y$, $\left[\frac{1}{30}\right]$

333. čtvrtiny kruhu o poloměru a vzhledem k jeho ose souměrnosti, $\varrho(x, y) = 1$, (Zvolte polohu tak, aby osa x byla osou souměrnosti.) $\left[\frac{a^4(\pi - 2)}{16}\right]$

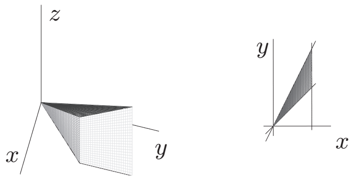
334. čtverce o straně a vzhledem k jeho vrcholu, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{2}{3}a^4\right]$

335. části mezikruží $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$, omezeného přímkami $y = x,\ y = 0$ v I. kvadrantu s hustotou $\varrho(x, y) = k,\ (k > 0)$ vzhledem ke středu mezikruží. $\left[\frac{15k\pi}{16}\right]$

• Je dána omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ a funkce $f(x, y)$

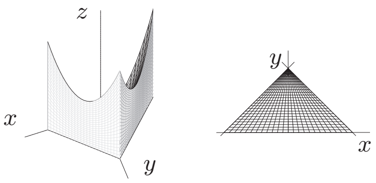
a) Načrtněte těleso, jehož objem bude roven hodnotě spočítaného integrálu.
b) Načrtněte průmět tělesa do roviny $z = 0$.
c) Napište název plochy $z = f(x, y)$.
d) Vypočítejte $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

336. D je ohraničena křivkami: $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $\quad f(x,y) = x + y$



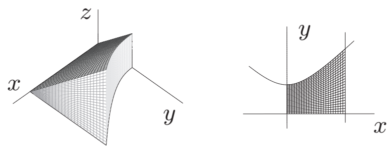
$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{rovina} \\ d)\ \dfrac{20}{3} \end{array}\right]$

337. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x + y \le 1,\ x + 1 \ge y \ge 0\}$, $\quad f(x,y) = x^2 + y^2$



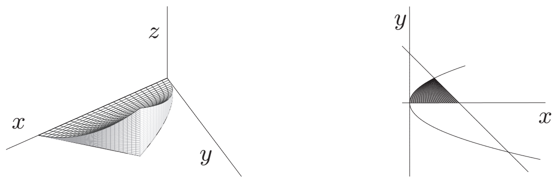
$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{rotační paraboloid} \\ d)\ \dfrac{1}{3} \end{array}\right]$

338. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ y^2 - x^2 \le 1,\ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0\}$, $\quad f(x,y) = y$



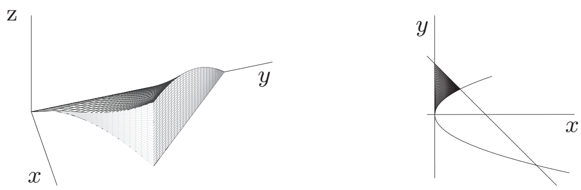
$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{rovina} \\ d)\ \dfrac{7}{3} \end{array}\right]$

339. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ y \ge 0,\ y \le\ 2 - x,\ x \ge y^2\}$, $\quad f(x,y) = y^2$



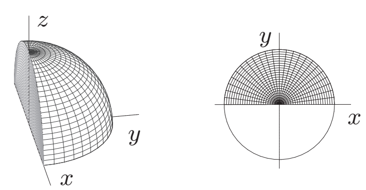
$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{válcová plocha} \\ d)\ \dfrac{13}{60} \end{array}\right]$

340. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x \ge 0,\ x + y \le\ 2,\ x \le y^2\}$, $\quad f(x,y) = xy$



$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{hyperbolický paraboloid} \\ d)\ \dfrac{7}{24} \end{array}\right]$

341. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\, ;\ x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$, $\quad f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



$\left[\begin{array}{l} c)\ \text{kulová plocha} \\ d)\ 9\pi \end{array}\right]$