

II.10. Extrémy funkcí

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). Nechť funkce $f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě A . Má-li funkce f v bodě A lokální extrém, pak $\text{grad}f(A) = \vec{0}$.

Označme hlavní minory matice druhých derivací

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrém funkce dvou proměnných). Nechť funkce $f(x, y)$ má spojitě parciální derivace 2. řádu v bodě A . Nechť je v bodě A splněna nutná podmínka $\text{grad}f(A) = \vec{0}$.

Pak platí:

- Je-li $\Delta_1(A) > 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální minimum.
- Je-li $\Delta_1(A) < 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, pak funkce f má v bodě A ostré lokální maximum.
- Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak funkce f nemá v bodě A lokální extrém.

Postup při výpočtu lokálních extrémů

1. krok: Podle nutné podmínky určíme tzv. kritické body, tj.

- a) body, v nichž funkce $f(x, y)$ není diferencovatelná,
- b) body, které jsou řešením soustavy rovnic $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

2. krok:

V bodech **b)** postupujeme podle postačující podmínky.

- Najděte **lokální** extrémy funkce :

Příklad 197. $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

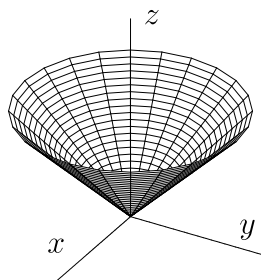
Řešení : Daná funkce je definovaná v \mathbb{E}_2 . Parciální derivace

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

neexistují v bodě $A = [0, 0]$, který je jediným

kritickým bodem. V bodě A tedy může být lokální extrém, neboť funkce f není v bodě A diferencovatelná. Nelze však rozhodnout podle výše uvedené postačující podmínky, proto použijeme definici lokálního extrému. Pro každý bod z prstencového okolí $P(A)$ bodu A ale platí, že $f(X) > f(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0, 0]$ ostré lokální minimum s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

POZNÁMKA. Nerovnost $f(X) > f(A)$ je splněna v libovolném prstencovém okolí $P(A)$. Funkce f tedy má v bodě $A = [0, 0]$ i ostré globální minimum.



Příklad má názornou geometrickou interpretaci. Stačí si uvědomit, jaká plocha je grafem funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

■

Příklad 198. $f(x, y) = x^3 - x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 6x$

Řešení : Funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace 1. a 2. řádu.

1) Podle nutné podmínky $f_x = 0$, $f_y = 0$ dostaneme soustavu:

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 2x - y - 6 \\ f_y = y - x \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 2x - y - 6 = 0 \\ y - x = 0 \end{array} \right\} \text{ dosadíme}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3(x^2 - x - 2) = 0 \\ y = x \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} (x - 2)(x + 1) = 0 \\ y = x \end{array} \right\} \implies$$

a dostaneme dva kritické body $[2, 2]$, $[-1, -1]$.

Připravíme si druhé derivace

$$\left. \begin{array}{l} f_{xx} = 6x - 2 \\ f_{xy} = -1 = f_{yx} \\ f_{yy} = 1 \end{array} \right\} \implies \Delta_1(x, y) = 6x - 2, \Delta_2(x, y) = \begin{vmatrix} 6x - 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6x - 3$$

	Δ_2	Δ_1	závěr
2) Z postačující podmínky $[2, 2]$	9	10	ostré lok. minimum, $f(2, 2) = -10$
$[-1, -1]$	-9		není extrém

■

Příklad 199. $z(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení : Zde máme funkci dvou proměnných v explicitním tvaru. Funkce z je diferencovatelná v \mathbb{E}_2 , proto nutná podmínka existence lokálních extrémů je : $z_x = 0$, $z_y = 0$.

$$\begin{array}{l} z_x = 6x^2 + y^2 + 10x \implies 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ z_y = 2xy + 2y \implies y(x + 1) = 0 \implies \text{buď } y = 0 \text{ nebo } x = -1 \end{array}$$

$$y = 0 : \quad 6x^2 + 10x = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0 \implies A_1 = [0, 0] \\ x_2 = -\frac{5}{3} \implies A_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right] \end{cases}$$

$$x = -1 : \quad y^2 + 6 - 10 = 0 \implies y^2 = 4 \implies \begin{cases} y = 2 \implies A_3 = [-1, 2] \\ y = -2 \implies A_4 = [-1, -2] \end{cases}$$

Nyní si připravíme derivace druhého řádu :

	A_1	A_2	A_3	A_4
$z_{xx} = 12x + 10$	10	-10	-2	-2
$z_{yy} = 2x + 2$	2	-4/3	0	0
$z_{xy} = 2y = z_{yx}$	0	0	4	-4

Je-li $\Delta_2(A_i) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$, pak existuje lokální extrém v bodě A_i .
 < 0 , pak neexistuje lokální extrém v bodě A_i .

Pro A_1 : $\Delta_2(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_1(A_1) = z_{xx}(A_1) > 0$, obdržíme lokální minimum
 $z(A_1) = 0$.

Pro A_2 : $\Delta_2(A_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_1(A_2) = z_{xx}(A_2) < 0$, je lokální maximum
 $z(A_2) = \frac{125}{27}$.

Pro A_3, A_4 je $\Delta_2(A_3) = \Delta_2(A_4) = -16 < 0$, a proto v bodech A_3 a A_4 lokální extrémů neexistují. ■

Příklad 200. Funkce $y = f(x)$ je vyjádřena v implicitním tvaru

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8 = 0.$$

Řešení : Spočítáme y' :

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x+y}{y-x} \quad \text{pro } x \neq y.$$

Položíme $y' = 0$, tedy $x + y = 0 \implies y = -x$. Dosadíme do zadání, abychom určili souřadnice případných lokálních extrémů

$$x^2 - 2x^2 - x^2 + 8 = 0 \implies 2x^2 = 8 \implies x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \mp 2.$$

Dostali jsme dva body $A = [2, -2]$ a $B = [-2, 2]$. Nyní spočítáme

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2}, \quad \text{takže}$$

$$y''(A) = \frac{-4}{16} < 0 \implies f(2) = -2 \quad \text{je lokální maximum a}$$

$$y''(B) = \frac{4}{16} > 0 \implies f(-2) = 2 \quad \text{je lokální minimum.} \quad \blacksquare$$

Příklad 201.* $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = f_{xx}$$

Podle **Sylvestrovy** věty o kvadratických formách platí :

Je-li $\Delta_2(P) > 0$, $\begin{cases} \Delta_3(P) > 0, \Delta_1(P) > 0, \text{ pak } f(P) \text{ je ostré lokální minimum.} \\ \Delta_3(P) < 0, \Delta_1(P) < 0, \text{ pak } f(P) \text{ je ostré lokální maximum.} \end{cases}$

Je-li $\Delta_2(P) < 0$ nebo $\Delta_1(P) \cdot \Delta_3(P) < 0$, pak v bodě P neexistuje lokální extrém.

Výpočet vypadá následovně :

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 3x^2 + 12y = 0 \quad \text{neboli} \quad x^2 + 4y = 0, \\ f_y = 2y + 12x = 0 \quad \text{neboli} \quad y = -6x, \\ f_z = 2z + 2 = 0, \quad \text{neboli} \quad z = -1 \end{array} \right\}, \quad \text{pak} \quad \begin{array}{l} x^2 - 24x = 0 \implies a \\ x_1 = 0, x_2 = 24, \end{array}$$

$$A = [0, 0, -1], \quad B = [24, -144, -1]$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 2, \quad f_{xy} = 12, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = 0.$$

Protože $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$, v bodě A nenastává lokální extrém.

Protože $\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, $\Delta_3(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$ a

$\Delta_1(B) = 144 > 0$, je $f(B) = f(24, -144, -1) = -6913$ lokální minimum.

Můžeme se též přesvědčit přímo, že kvadratická forma $d^2 f(B)$ je pozitivně definitní :
 $d^2 f(B) = 144(dx)^2 + 24 dx dy + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 = (12 dx + dy)^2 + (dy)^2 + 2(dz)^2 > 0$ ■

- Najděte lokální extrémy daných funkcí s vazební podmínkou $g(x, y) = 0$:
 NÁVOD: Z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce f . Získáme tak úlohu určit extrémy funkce jedné proměnné.

Příklad 202. $z = 2(x^2 + y^2)$, jestliže $x + y = 2$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z -ové souřadnice na průsečné křivce **rotačního paraboloidu** $z = 2(x^2 + y^2)$ s **rovinou** $x + y = 2$.

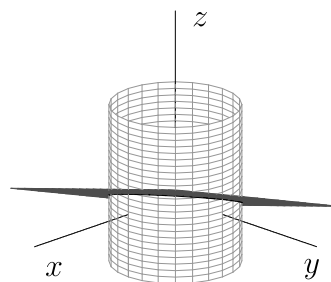
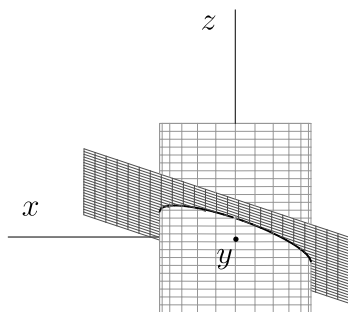
Z podmínky $x + y = 2$ vyjádříme např. $y = 2 - x$ a dosadíme do dané funkce $z(x, y) = 2(x^2 + y^2)$. Tím dostaneme $\tilde{z}(x) = z(x, 2 - x) = 2(x^2 + (2 - x)^2)$, takže $\tilde{z}(x) = 4(x^2 - 2x + 2)$.

Pro funkci jedné proměnné $\tilde{z}(x)$ hledáme lokální extrém. Je tedy

$$\tilde{z}'(x) = 4(2x - 2) = 0. \text{ Odtud } x_1 = 1, y_1 = 2 - 1 = 1 \text{ a } \tilde{z}''(x) = 8 > 0 \Rightarrow z(1, 1) = 4 \text{ je lokální minimum.}$$

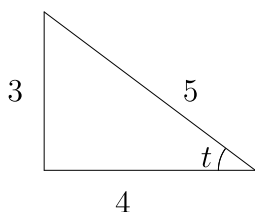
Příklad 203. $z = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$, jestliže $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z -ové souřadnice na průsečné křivce **roviny** $z = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$ s **rotační válcovou plochou** $x^2 + y^2 = 1$.



Jelikož z podmínky $x^2 + y^2 = 1$ nelze jednoznačně vyjádřit ani x ani y , přejdeme do polárních souřadnic $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, kde $r = 1$, tedy $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Potom $\tilde{z} = z(\cos t, \sin t) = \frac{\cos t}{3} + \frac{\sin t}{4}$ a dále $\tilde{z}' = \frac{dz}{dt} = \frac{-\sin t}{3} + \frac{\cos t}{4} = 0$, takže $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$.



Jak vidíme na obrázku je $\sin t = \pm \frac{3}{5}$, $\cos t = \pm \frac{4}{5}$.

Pro $\sin t_1 = \frac{3}{5}$, $\cos t_1 = \frac{4}{5}$ je $t_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$
 a pro $\sin t_2 = -\frac{3}{5}$, $\cos t_2 = -\frac{4}{5}$ je $t_2 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Dále je $\tilde{z}'' = \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = -\frac{\cos t}{3} - \frac{\sin t}{4} \implies \tilde{z}''(t_1) < 0, \tilde{z}''(t_2) > 0.$

Dospěli jsme k lokálnímu maximu $\tilde{z}(t_1) = z\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15} + \frac{3}{20} = \frac{5}{12}$

a lokálnímu minimu $\tilde{z}(t_2) = z\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{12}.$

■

Příklad 204. $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, jestliže $y = x - \frac{\pi}{4}$.

Řešení :

$$\tilde{z}(x) = z(x, x - \pi/4) = \sin^2 x + \sin^2(x - \frac{\pi}{4}), \quad \tilde{z}'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \sin 2x + \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin 2x + \sin 2x \cos \frac{\pi}{2} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{2} = \sin 2x - \cos 2x$$

Položíme-li $\tilde{z}'(x) = 0$, dostaneme $\sin 2x = \cos 2x$ a dále

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}, \text{ takže } k_1 = 2n, k_2 = 2n + 1.$$

Vypočteme druhou derivaci : $\tilde{z}''(x) = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x,$

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + 2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$\tilde{z}''\left(\frac{\pi}{8} + (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} < 0.$$

Tedy $\tilde{z}\left(\frac{\pi}{8} + n\pi\right) = 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální minimum

a $\tilde{z}\left(\frac{\pi}{8} + (2n + 1) \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{4} + 1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \text{ je lokální maximum.}$$

■

Příklad 205.* $z = x^2 + 2y^2$, jestliže $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Řešení : Zde použijeme **Lagrangeovu funkci** : Je-li dána funkce $z = f(x, y)$ a podmínka $g(x, y) = 0$, potom Lagrangeova funkce má vyjádření

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Její stacionární body získáme řešením soustavy

$$\left. \begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = g(x, y) = 0. \end{array} \right\}$$

Funkce $z = f(x, y)$ může mít za podmínky $g(x, y) = 0$ extrém pouze v bodech $[x, y]$, ke kterým existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, y, \lambda]$ je kritickým bodem funkce $L(x, y, \lambda)$.

V našem příkladě máme $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$

$$L_x = 2x + \lambda(2x - 2) = 0 \quad \text{a odtud} \quad x = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

$$L_y = 4y + \lambda(4y + 4) = 0 \quad \text{a odtud} \quad y = \frac{-\lambda}{1 + \lambda}.$$

Tedy $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$, takže $\frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda} + \frac{2\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{4\lambda}{1 + \lambda} = 0,$

$$\frac{3\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} = \frac{6\lambda}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1 \text{ a následně } \frac{3\lambda^2}{1 + \lambda} = 6\lambda, \quad 3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \implies \lambda \cdot (\lambda + 2) = 0.$$

Zde máme $\lambda_1 = -2$, takže $x_1 = 2$, $y_1 = -2$, $A_1 = [2, -2]$ anebo
 $\lambda_2 = 0$ takže $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $A_2 = [0, 0]$. Dále je
 $L_{xx} = 2 + 2\lambda$, $L_{yy} = 4 + 4\lambda$, $L_{xy} = 0$ a odtud

$$\Delta(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0, \quad L_{xx}(A_1) < 0, \quad L(A_1) = 12 \text{ je lokálním maximem,}$$

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad L_{xx}(A_2) > 0, \quad L(A_2) = 0 \text{ je lokálním minimem.}$$

■

Příklad 206. V rovině $x + 2y - z + 3 = 0$ najděte bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A = [1, 1, 1]$ a $B = [2, 2, 2]$ je nejmenší.

Řešení: Hledaný bod označíme $P = [x, y, z]$ a sestavíme součet $|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$, který zapíšeme pomocí souřadnic bodů

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2.$$

Bod P musí ležet v rovině $x + 2y - z + 3 = 0$. Tedy tato rovnice roviny představuje vazební podmínku, která musí být splněna.

Vyjádríme-li si např. $z = x + 2y + 3$ a dosadíme-li do $f(x, y, z)$, potom funkce $f(x, y, x + 2y + 3)$ bude funkcí dvou proměnných x a y :

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y, x + 2y + 3) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x + 2y + 2)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (x + 2y + 1)^2,$$

$$\tilde{f}_x = 2(x - 1) + 2(x + 2y + 2) + 2(x - 2) + 2(x + 2y + 1) = 8(x + y),$$

$$\tilde{f}_y = 2(y - 1) + 4(x + 2y + 2) + 2(y - 2) + 4(x + 2y + 1) = 4(2x + 5y) + 6.$$

$$\text{Položíme } \left. \begin{array}{l} \tilde{f}_x = 0, \text{ pak} \\ \tilde{f}_y = 0, \text{ takže} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 0 \implies y = -x, \\ 4x + 10y = -3 \implies -6x = -3, \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \end{array}} \right\} x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Máme tedy } z_1 = \frac{5}{2}, \quad P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

$$\text{Dále je } \left. \begin{array}{l} \tilde{f}_{xx}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{xy}(P) = 8 \\ \tilde{f}_{yy}(P) = 20 \end{array} \right\} \text{ takže } \Delta_2(P) = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 20 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta(P)\tilde{f}_{xx} > 0$$

$$\text{a } f(P) = \frac{27}{2} \text{ je lokální minimum.}$$

■

Věta (Postačující podmínka existence absolutních extrémů funkce na dané množině). Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na neprázdné množině M , která je omezená a uzavřená, pak f nabývá maxima a minima na množině M .

Postup při výpočtu absolutních extrémů.

Připomeňme, že M^0 je vnitřek a ∂M je hranice množiny M .

1. **krok:** Ověříme splnění předpokladů právě uvedené věty, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.
2. **krok:** Určíme všechny kritické body X funkce f v M^0 .
3. **krok:** Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce f nabývat absolutních extrémů.

4. krok: Určíme hodnoty funkce f ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

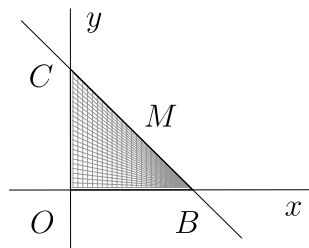
- Určete **absolutní (globální)** extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

Příklad 207. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

Řešení : Ověříme existenci absolutních extrémů: Daná množina M je uzavřená a omezená. Daná funkce f je spojitá v \mathbb{E}_2 , tedy též v M . To je postačující pro existenci absolutních extrémů.

- 1) určíme stacionární body na vnitřku množiny M a jejich funkční hodnoty :

$$\left. \begin{aligned} f_x &\equiv 2x + y - 1 = 0 \\ f_y &\equiv 2y + x - 1 = 0 \end{aligned} \right\} x = y = \frac{1}{3} \implies A_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] \in M, \quad f(A_1) = -\frac{1}{3};$$



- 2) určíme podezřelé body na hranici M , tj. na jednotlivých stranách $\triangle OBC$

$$OB : y = 0 \implies h_1(x) = f(x, 0) = x^2 - x, \quad h_1'(x) = 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 0 \right] \in M, \quad f(A_2) = -\frac{1}{4},$$

$$OC : x = 0 \implies h_2(y) = f(0, y) = y^2 - y, \quad h_2'(y) = 2y - 1 = 0 \implies y = \frac{1}{2},$$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{2} \right] \in M, \quad f(A_3) = -\frac{1}{4},$$

$$BC : y = 1 - x \implies h_3(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2 + x(1 - x) - x - 1 + x = x^2 - x,$$

$$h_3'(x) = 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}, \quad A_4 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \in M, \quad f(A_4) = -\frac{1}{4};$$

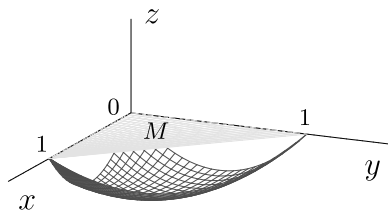
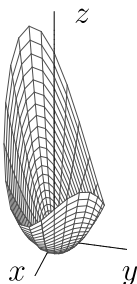
- 3) určíme hodnoty funkce $f(x, y)$ ve vrcholech O, B, C

$$f(O) = f(0, 0) = 0, \quad f(B) = f(1, 0) = 0, \quad f(C) = f(0, 1) = 0.$$

Ze všech spočítaných funkčních hodnot vybereme nejmenší a největší .

Globální maximum nastává v bodech O, B, C , $f_{\max}(O) = f_{\max}(B) = f_{\max}(C) = 0$

a podobně globální minimum v bodě A_1 , $f_{\min}(A_1) = -\frac{1}{3}$.



■

Příklad 208. $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z -ové souřadnice na paraboloidu, která je ohraničena průnikem paraboloidu $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ s válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4$. Zdůvodněte si existenci absolutních extrémů.

1) Stacionární body ve vnitřku množiny M :

$$\begin{aligned} z_x = 2x - 6 = 0 &\implies x_1 = 3 \\ z_y = 2y + 6 &\implies y_1 = -3 \end{aligned} \implies A = [3, -3], \quad A \notin M.$$

2) Body na hranici množiny M zapíšeme v parametrickém tvaru :

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \cos t \\ y &= 2 \sin t \end{aligned} \right\}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Pak postupně :

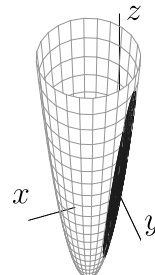
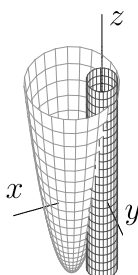
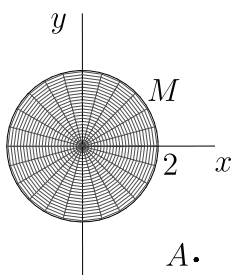
$$\tilde{z} = z(2 \cos t, 2 \sin t) = 4 - 12 \cos t + 12 \sin t,$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = 12 \sin t + 12 \cos t = 0,$$

$$\implies \sin t = -\cos t, \quad t_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{7}{4}\pi,$$

$$t_1 = \frac{3}{4}\pi \implies B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad z(B) = 4 + 12\sqrt{2} \text{ je globální maximum a}$$

$$t_2 = \frac{7}{4}\pi \implies C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}], \quad z(C) = 4 - 12\sqrt{2} \text{ je globální minimum.}$$



■

• Je dána funkce $f = f(x, y)$.

- Napište nutnou podmínku pro lokální extrém diferencovatelné funkce n -proměnných v bodě A .
- Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce $f(x, y)$ v bodě A .
- Vyšetřete lokální extrémy dané funkce f , tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

209. $f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$ [Ostré lok. min. v bodě $[-8, -2]$, $f(-8, -2) = -16$]

210. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$ [Ostré lok. min. v bodě $[2, -3]$, $f(2, -3) = -25$,
v bodě $[-2, -3]$ není extrém.]

211. $f(x, y) = 2y - y^2 - x e^x$ [Ostré lok. max. v bodě $[-1, 1]$, $f = 1 + 1/e$]

212. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$ [Ostré lok. min. v bodě $[2, 2]$, $f(2, 2) = 2$,
v bodě $[0, 0]$ není extrém.]

213. $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$ [Ostré lok. min. v bodě $[3, 3]$, $f(3, 3) = -19$,
v bodě $[-1, -1]$ není extrém.]

214. $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$ [Ostré lok. min. v bodě $[-1, 1]$, $f(-1, 1) = 3$]

215. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ [Ostré lok. min. v bodě $[5, 2]$, $(f(5, 2) = 30)$]

216. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$ $\left[\begin{array}{l} f_{\min}(2, -1) = 3 - 6 \ln 2, \\ \text{bod } [-2, 1] \notin D(f) \end{array} \right]$

• Určete lokální extrémy funkce :

217. $z = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ $[z_{\min}(4, 4) = 0]$

218. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y$ $[z_{\min}(-3, 2) = -13]$

219. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ $[z_{\max}(0, 0) = 0]$

220. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $[z_{\min}(1, \frac{1}{2}) = 4, \text{ v bodě } [0, 0] \text{ není extrém}]$

221. $z = e^{x/2}(x + y^2)$ $[z_{\min}(-2, 0) = -\frac{2}{e}]$

222. $z = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$ $\left[\begin{array}{l} z_{\min}(1, 1) = -\frac{17}{2}, z_{\max}(-4, -1) = 58 \\ \text{v bodech } [1, -1], [-4, 1] \text{ neexistují extrémy} \end{array} \right]$

223. $z = e^{-x^2-2x-3y^2}$ $[z_{\max}(-1, 0) = e]$

224. $z = 3 \ln(x^2y) - y^3 - 3x^2 + 4$ $[z_{\max}(1, 1) = z_{\max}(-1, 1) = 0]$

225.* $x^2 + xy - z^2 + z + y + 5 = 0$ $\left[\begin{array}{l} \text{ve stac.bodech } [-1, 2, 3], [-1, 2, -2] \\ \text{neexistují extrémy} \end{array} \right]$

226.* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z$ $[f(2, -1, -3) = -14, \text{ lok.min.}]$

227.* $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^3 - 12yz - 6x$ $\left[\begin{array}{l} f(3, 36, 12) = -873, \text{ lok.min.,} \\ \text{v bodě } [3, 0, 0] \text{ není extrém} \end{array} \right]$

228. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$.

b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy této funkce na úsečce AB , kde $A = [0, 2], B = [1, 1]$.

$\left[\begin{array}{l} \text{a) lokální } f_{\min}(-1, -1) = -1, \\ \text{b) } f_{\min}(1/2, 3/2) = 6, f_{\max}(0, 2) = f_{\max}(1, 1) = 7 \end{array} \right]$

• Je dána funkce f a množina M .

a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů funkce f na dané množině M .

b) Absolutní extrémy vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce f na množině M .

229. $f(x, y) = x + \ln x - y^2, M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x + 1, 1/4 \leq x \leq 1 \}$
 $\left[\begin{array}{l} f_{\min}(1, 2) = -3, f_{\max}(1/2, 3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2, 4, \\ f(1/4, 5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2, 7 \text{ není extrém} \end{array} \right]$

230. $f(x, y) = x^2 + xy - 3x - y, M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0 \}$.
 $[f_{\min}(0, 3) = -3, f_{\max}(0, 0) = f_{\max}(3, 0) = 0]$

231. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2, M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0 \}$
 $\left[\begin{array}{l} f_{\min}(1, 0) = -1, f_{\max}(-3, 0) = 15 \\ \text{Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít} \\ \text{polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.} \end{array} \right]$

- Určete globální extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M :

232. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| + |y| \leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{glob.min. } f(0, 0) = 0 \\ \text{glob.max. } f(1, 0) = f(0, 1) = \\ = f(-1, 0) = f(0, -1) = 1 \end{array} \right]$$

233. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (použijte polární souřadnice)

$$\left[\begin{array}{l} \text{glob.min. } f(0, \pm 2) = -4 \\ \text{glob.max. } f(\pm 2, 0) = 4 \end{array} \right]$$

234. $f(x, y) = xy(x - a)(y - b)$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{glob.max. } f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{a^2 b^2}{16} \\ \text{glob.min. } f(0, 0) = f(a, 0) = f(0, b) = f(a, b) = 0 \end{array} \right]$$

- 235.** Na části paraboly $y = 6 - \frac{x^2}{4}$, $y \geq 0$ určete bod, který leží nejbližší počátku souřadnic.

$$[[4, 2], [-4, 2]]$$

- 236.** a) Určete rozměry r, v sudu tvaru válce bez víka, který má při daném objemu $V = 1l$ nejmenší povrch.

$$\left[r = v = \sqrt[3]{1/\pi} \right]$$

- b) Řešte stejnou úlohu pro válec s oběma podstavami.

$$\left[r = \sqrt[3]{1/2\pi}, v = \sqrt[3]{4/\pi} \right]$$