

# Extrémy funkcí více proměnných.

## Lokální extrémy

### Definice.

Říkáme, že funkce  $f$ ,  $n$  proměnných má v bodě  $A \in D(f)$  **lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí  $P(A) \subset D(f)$  takové, že pro každé  $X \in P(A)$  platí:  $f(X) \leq f(A)$ . Podobně, funkce  $f$  má v bodě  $A$  **lokální minimum**, existuje-li prstencové okolí  $P(A) \subset D(f)$  takové, že pro každé  $X \in P(A)$  platí:  $f(X) \geq f(A)$ .

Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

### Věta 6.4 (nutná podmínka pro lokální extrém).

Necht' funkce  $f$ ,  $n$  proměnných, je diferencovatelná v bodě  $A$ .  
Má-li funkce  $f$  v bodě  $A$  lokální extrém, pak  $\text{grad } f(A) = \vec{0}$ .

**Poznámka.** Kritické body, stacionární body

Pro formulaci postačující podmínky v případě funkce dvou proměnných zavedeme matici

$$\mathcal{M}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

a dále dvě hodnoty:  $\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$ ,  $\Delta_2(A) = \det \mathcal{M}(A)$ .

## Věta 6.8

### (postačující podmínky pro lokální extrém funkce $z = f(x, y)$ )

Nechť funkce  $z = f(x, y)$  má parciální derivace 1. i 2. řádu spojité v bodě  $A$ . Nechť  $\text{grad} f(A) = \vec{0}$ . Pak platí:

Je-li  $\Delta_2(A) < 0$ , pak funkce  $f$  nemá v bodě  $A$  lokální extrém.

Je-li  $\Delta_2(A) > 0$  a  $\Delta_1(A) > 0$ , pak funkce  $f$  má v bodě  $A$  ostré lokální minimum.

Je-li  $\Delta_2(A) > 0$  a  $\Delta_1(A) < 0$ , pak funkce  $f$  má v bodě  $A$  ostré lokální maximum.

## Postup při výpočtu lokálních extrémů (funkce dvou prom.)

**1. krok:** Určíme všechny body, které jsou řešením soustavy rovnic  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  a funkce  $f$  je v nich diferencovatelná.

**2. krok:** V každém z těchto bodů postupujeme podle postačující podmínky.

**Poznámka.** Další postup, jestliže v kritickém bodě není splněna některá z postačujících podmínek.

**Příklad.** Vyšetřete lokální extrémy

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - y^2}$$

Výsledky následujících deseti úloh s grafy funkcí jsou v souboru "Lokální extrémy-příklady"

0. (Beta)  $f(x, y) = 2xy - x + 3y$

1. (Beta)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7x$

2.  $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 4x^2 - y^2$

3. (Beta)  $f(x, y) = x e^x + y^2$

4.  $f(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + xy + y^2 - 4 \ln y$

5.  $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

6. (Beta)  $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 2$

7.  $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^2$

8.  $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - \frac{y}{x}$

9.  $f(x, y) = y \sqrt{x} - y^2 - x + 9y$

## Další úlohy

10. (Beta)  $f(x, y) = 2y - y^2 - x e^x$

11.  $f(x, y) = e^y (x^2 + y)$

12. (Alfa)  $f(x, y) = e^x (x^2 + y^2)$

13. (Alfa)  $f(x, y) = 3 \ln(x^2 y) - y^3 - 3x^2 + 4$

## Absolutní (globální) extrémy

**Definice.** Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných a  $M \subset D(f)$ .

Říkáme, že funkce  $f$  nabývá v bodě  $A \in M$  svého maxima na množině  $M$ , jestliže pro každé  $X \in M$  platí:  $f(X) \leq f(A)$ .

Zapisujeme  $f(A) = \max \{f(x) : x \in M\}$ , stručně  $f(A) = \max_M f$ .

Analogicky definujeme minimum funkce  $f$  na množině  $M$ . Značíme je stručně  $\min_M f$ .

Maximum, resp. minimum funkce  $f$  na celém definičním oboru  $D(f)$  značíme stručně  $\max f$ , resp.  $\min f$ .

### Věta 6.14

**(postačující podmínky pro existenci absolutních extrémů)**

Nechť  $M \subset \mathbb{E}_n$  je neprázdná, omezená a uzavřená množina, nechť funkce  $f$  je spojitá na  $M$ .

Pak funkce  $f$  nabývá na množině  $M$  maxima a minima.

Speciálním případem jsou tzv. **vázané extrémů**, a to když množina  $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$ , kde  $g$  je daná funkce.

Pokud lze, pak z vazební podmínky  $g(x, y) = 0$  vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce  $f$ . Získáme tak úlohu určit absolutní extrémů funkce jedné proměnné.

### **Postup při výpočtu absolutních extrémů.**

Připomeňme, že  $M^0$  je vnitřek a  $\partial M$  je hranice množiny  $M$ .

1. Ověříme splnění předpokladů právě uvedené věty, čímž zdůvodníme existenci absolutních extrémů.
2. Určíme všechny kritické body  $X$  funkce  $f$  v otevřené množině  $M^0$ .
3. Určíme všechny body  $X \in \partial M$ , ve kterých může funkce  $f$  nabývat vázaných extrémů na hranici množiny  $M$ . Nezapomeňme na průsečíky křivek, které tvoří hranici  $\partial M$  (pokud průsečíky existují).
4. Určíme hodnoty funkce  $f$  ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je rovna  $\max_M f$  a nejmenší hodnota je rovna  $\min_M f$ .



**Příklad.** Zdůvodněte existenci absolutních extrémů a určete je (tj. určete jejich polohu a odpovídající funkční hodnotu).

1.  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$

a) na úsečce  $\overline{AB}$ ,  $A = [3, 0]$ ,  $B = [0, 3]$ ,

b) na hranici  $\partial M$  množiny  $M = \{[x, y]; x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

2.  $z = f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  na  $M = \{[x, y]; x + y = 1, x \in \langle 1/4, 9/10 \rangle\}$ .

3.  $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 18$  na  $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9\}$ .