# Extrémy funkcí více proměnných.

## Lokální extrémy

**Definice.**
Říkáme, že funkce $f$, n proměnných má v bodě $A \in D(f)$ lokální maximum, jestliže existuje prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že po každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \leq f(A)$. Podobně, funkce $f$ má v bodě $A$ lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že pro každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \geq f(A)$.
Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

**Věta 6.4 (nutná podmínka pro lokální extrém).**
Necht’ funkce $f$, $n$ proměnných, je diferencovatelná v bodě $A$.
Má-li funkce $f$ v bodě $A$ lokální extrém, pak $\operatorname{grad} f(A) = \overrightarrow{0}$.

Poznámka. Kritické body, stacionární body

Pro formulaci postačující podmínky v případě funkce dvou proměnných zavedeme matici

$$\mathcal{M}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

a dále dvě hodnoty: $\Delta_1(A) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $\Delta_2(A) = \det \mathcal{M}(A)$.

**Věta 6.8**
**(postačující podmínky pro lokální extrém funkce $z = f(x, y)$)**

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má parciální derivace 1. i 2. řádu spojité v bodě $A$. Nechť $\operatorname{grad} f(A) = \vec{o}$. Pak platí:

Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak $f$ nemá v bodě $A$ lokální extrém.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) > 0$, pak $f$ má v bodě $A$ ostré lokální minimum.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) < 0$, pak $f$ má v bodě $A$ ostré lokální maximum.

## Postup při výpočtu lokálních extrémů (funkce dvou prom.)

**1. krok:** Určíme všechny body, které jsou řešením soustavy rovnic $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a funkce $f$ je v nich diferencovatelná.

**2. krok:** V každém z těchto bodů postupujeme podle postačující podmínky.

Poznámka. ? Další postup, jestliže v kritickém bodě není splněna některá z postačujících podmínek: podle definice.

Příklad. Vyšetřete lokální extrémy

$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, Sbírka, řešený př. 197

$z = f(x, y) = \sqrt{4 - y^2}$, neostré lok. max. v bodech $[\boldsymbol{x}, \mathbf{0}]$, viz graf

V souboru ”Lokální extrémy-příklady”jsou uvedeny výsledky následujících úloh, vždy včetně grafu funkce a typu příslušné soustavy rovnic.

0. (Beta) $f(x, y) = 2xy - x + 3y$ [soustava dvou lineárních rovnic, jeden stacionární bod [-3/2;1/2], ale žádný extrém, pouze sedlový bod]

1. (Beta) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7x$ [soustava dvou lin. rovnic, jeden stacionární bod [2;1], lokální minimum]

2. $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 4x^2 - y^2$ [lineární a kvadratická rovnice, dva stacionární body, lokální max. v [0;0], sedlový bod [-1;-1]

3. (Beta) $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^x + y^2$ [dvě samostatné rovnice (jedna exponeciální pouze s $x$, jedna lineární pouze s $y$), 1 stacionární bod [-1;0], lokální min.]

4. (Sbírka, 216) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$ [soustava s neznámou ve jmenovateli, stac. bod [2,-1] (lokální min), bod [-2;1] nepatří do $D(f)$ !].

5. (Obměna 220, Sbírka) $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ [soustava dvou kvadratických rovnic, dva stac. body, lokální max. v [1;1], sedlový bod [0;0].

6. (Beta) $f(x,y)=x^2+y^3+4x-3y+2$ [dvě samostatné rovnice (lineární, kvadratická), dva stac. body, lokální min. v [-2;1], sedlový bod [-2;-1]

7. $f(x,y)=x^4+4xy+y^2$ [lineární a kubická rovnice, tři stacionární body, lokální min. v $[\sqrt{2};-2\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2};2\sqrt{2}]$, sedlový bod [-2;-1]

8. $f(x,y)=4x^2-y^2-\dfrac{y}{x}$ [soustava s neznámou ve jmenovateli, dva stacionární body [1/2;-1], [-1/2;1], oba sedlové, žádný extrém ]

9. (Sbírka, 217) $f(x,y)=x^2+y-x\sqrt{y}-6x+12$ [soustava s odmocninou, a to ve jmenovateli, jeden stacionární bod [4;4] (lokální min)]

10. (Alfa) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod [1/2; -1] (lokální min)]

11. (Sbírka, 221) (Beta) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/2}\,(x+y^2)$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod [-2;0] (lokální min)]

12. (Alfa) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x}\,(x^2+y^2)$ [soustava s exponenciálou, dva stacionární body, lokální min. v [0;0], sedlový bod [-2;0]

13. (Alfa) $f(x,y) = 3\ln(x^2 y) - y^3 - 3x^2 + 4$ [soustava dvou samostatných rovnic (neznámá ve jmenovateli), dva stacionární body [1;1], [-1;1], v obou lok. max.]

14. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-2x-3y^2}$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod [-1;0] (lokální max.)]

15*. (Alfa) $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ [lok. min. v $[0,0]$, neostré lok. max v bodech $[x,y]:\ x^2+y^2=1$ (jednotková kružnice) (*Nápověda:* použijte polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Pak je $x^2+y^2=r^2$.]
*Jiné zadání:* Určete všechny stacionární body. Ověřte, zda v bodě [0, 0] má fce $f$ lokální extrém. Pokud ano, jaký ?

## Absolutní (globální) extrémy

**Definice.**

Říkáme, že funkce $f$ ($n$ prom.) nabývá v bodě $A \in M \subset D(f)$ svého maxima na množině $M$, jestliže pro každé $X \in M$ platí: $f(X) \leq f(A)$.
Zapisujeme $f(A) = \max\{f(x) : x \in M\}$, stručně $f(A) = \max_M f$.
Analogicky minimum funkce $f$ na množině $M$. Značíme je $\min_M f$.
Absolutní extrémy fce $f$ na celém $D(f)$ značíme $\max f$, resp. $\min f$.

**Věta 6.14**
**(postačující podmínky pro existenci absolutních extrémů)**

Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je neprázdná, omezená a uzavřená množina,
nechť funkce $f$ je spojitá na $M$.
Pak funkce $f$ nabývá na množině $M$ maxima a minima.

V případě $n = 1$ je $M$ uzavřený omezený interval a větu lze doplnit:

**Dodatek.** Absolutních extrémů může funkce $\boldsymbol{f(x)}$ nabývat pouze

1) ve vnitřních bodech intervalu, v nichž je $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ nebo derivace neexistuje (splněna NP pro lokální extrém)

2) v krajních bodech intervalu.

Výpočet absolutních extrémů $(n = 1)$

1. Zdůvodníme existenci.

2. Najdeme kritické body.

3. Vypočítáme hodnoty $\boldsymbol{f(x)}$ v těchto bodech. Z nich určíme maximum, resp. minimum funkce $\boldsymbol{f}$ v daném intervalu.

Otázka: Co když interval není uzavřený nebo není omezený ?

Věnujme se nyní funkcím dvou proměnných.
Speciální případ přestavují tzv. **vázané extrémy**, a to když extrémy funkce $f(x, y)$ hledáme na množině
$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde $g$ je daná spojitá funkce.
Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce $f$. Získáme tak úlohu určit absolutní extrémy funkce jedné proměnné.

Geometrická interpretace: Uvažujme množinu (”válcovou plochu”)

$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : [x, y] \in M\}$.
Určit vázané extrémy pak geometricky znamená nalézt největší, resp. nejmenší $z$-ové souřadnice bodů na průsečné křivce grafu zadané funkce $f$ a plochy $Q$.

Příklad

**Výpočet absolutních extrémů ($n$ prom., obecná mn. $M$)**

Připomeňme, že $M^0$ je vnitřek a $\partial M$ je hranice množiny $M$.

1. Zdůvodníme existenci absolutních extrémů (Věta 6.14).
2. Určíme všechny kritické body $X$ funkce $f$ v otevřené množině $M^0$.
3. Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce $f$ nabývat vázaných extrémů na hranici množiny $M$. Nezapomeňme na průsečíky křivek, které tvoří hranici $\partial M$ (pokud průsečíky existují).
4. Určíme hodnoty $f(X)$ ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je pak $\max_M f$ a nejmenší hodnota je $\min_M f$.

V následujících úlohách zdůvodněte existenci absolutních extrémů a určete je, tj. určete jejich polohu a odpovídající funkční hodnotu.

1. $z = f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ na $M = \{[x,y]; x + y = 1,\ x \in \langle 1/4,\ 9/10 \rangle\}$.

**Výsledek.** min =4 v bodě $[1/2;\ 1/2]$, max =100/9 v bodě $[9/10;\ 1/10]$.

2. (Sbírka, obměna př. 233) $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 18$
a) na hranici $\partial M$ množiny $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9\}$,
b) na množině $M$.

3. (Sbírka, obměna př. 230) $z = f(x, y) = xy(2 - x - y)$
a) na hranici $\partial M$ množiny $M = \{[x, y]; x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
b) na množině $M$.

4. $z = f(x, y) = \sqrt{y} - 6y + 3x^2 - 8x$,
$M$ je oblouk paraboly $y = x^2$ mezi body $[-2; ?]$, $[1; ?]$.
**Výsledek.** min =-10 v bodě $[1;\ 1]$, max =27/4 v bodě $[-3/2;\ 9/4]$.
*Upozornění:* $\sqrt{x^2} = |x|$.

5. $z = f(x, y) = x + 4\sqrt{x} - 2y$ na úsečce $y = x - 1$, $x \in \langle 0; 9\rangle$.
**Výsledek.** min =2 v bodě $[0;\ -1]$, max =6 v bodě $[4;\ 3]$.

6. Slovní úlohy. Sbírka, př. 235 a 236.