

Extrémy funkcí více proměnných.

Lokální extrémy

Definice.

Říkáme, že funkce f , n proměnných má v bodě $A \in D(f)$ **lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že po každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \leq f(A)$. Podobně, funkce f má v bodě A **lokální minimum**, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že pro každé $X \in P(A)$ platí: $f(X) \geq f(A)$.

Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.

Věta 6.4 (nutná podmínka pro lokální extrém).

Necht' funkce f , n proměnných, je diferencovatelná v bodě A .
Má-li funkce f v bodě A lokální extrém, pak $\text{grad} f(A) = \vec{0}$.

Poznámka. Kritické body, stacionární body

Pro formulaci postačující podmínky v případě funkce dvou proměnných zavedeme matici

$$\mathcal{M}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

a dále dvě hodnoty: $\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $\Delta_2(A) = \det \mathcal{M}(A)$.

Věta 6.8

(postačující podmínky pro lokální extrém funkce $z = f(x, y)$)

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má parciální derivace 1. i 2. řádu spojité v bodě A . Nechť $\text{grad} f(A) = \vec{0}$. Pak platí:

Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak f nemá v bodě A lokální extrém.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) > 0$, pak f má v bodě A ostré lokální minimum.

Je-li $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) < 0$, pak f má v bodě A ostré lokální maximum.

Postup při výpočtu lokálních extrémů (funkce dvou prom.)

1. krok: Určíme všechny body, které jsou řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ a funkce } f \text{ je v nich diferencovatelná.}$$

2. krok: V každém z těchto bodů postupujeme podle postačující podmínky.

Poznámka. ? Další postup, jestliže v kritickém bodě není splněna některá z postačujících podmínek: **podle definice.**

Příklad. Vyšetřete lokální extrémy

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{Sbírka, řešený př. 197}$$

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - y^2}, \quad \text{neostré lok. max. v bodech } [x, 0], \text{ viz graf}$$

V souboru "Lokální extrémy-příklady" jsou uvedeny výsledky následujících úloh, vždy včetně grafu funkce a typu příslušné soustavy rovnic.

0. (Beta) $f(x, y) = 2xy - x + 3y$ [soustava dvou lineárních rovnic, jeden stacionární bod $[-3/2; 1/2]$, ale žádný extrém, pouze sedlový bod]

1. (Beta) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7x$ [soustava dvou lin. rovnic, jeden stacionární bod $[2; 1]$, lokální minimum]

2. $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 4x^2 - y^2$ [lineární a kvadratická rovnice, dva stacionární body, lokální max. v $[0; 0]$, sedlový bod $[-1; -1]$]

3. (Beta) $f(x, y) = x e^x + y^2$ [dvě samostatné rovnice (jedna exponenciální pouze s x , jedna lineární pouze s y), 1 stacionární bod $[-1; 0]$, lokální min.]

4. (Sbírka, 216) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6 \ln x$ [soustava s neznámou ve jmenovateli, stac. bod $[2, -1]$ (lokální min), bod $[-2; 1]$ nepatří do $D(f)$!].

5. (Obměna 220, Sbírka) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ [soustava dvou kvadratických rovnic, dva stac. body, lokální max. v $[1;1]$, sedlový bod $[0;0]$].

6. (Beta) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 2$ [dvě samostatné rovnice (lineární, kvadratická), dva stac. body, lokální min. v $[-2;1]$, sedlový bod $[-2;-1]$]

7. $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^2$ [lineární a kubická rovnice, tři stacionární body, lokální min. v $[\sqrt{2}; -2\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$, sedlový bod $[-2;-1]$]

8. $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - \frac{y}{x}$ [soustava s neznámou ve jmenovateli, dva stacionární body $[1/2;-1]$, $[-1/2;1]$, oba sedlové, žádný extrém]

9. (Sbírka, 217) $f(x, y) = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ [soustava s odmocninou, a to ve jmenovateli, jeden stacionární bod $[4;4]$ (lokální min)]

10. (Alfa) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod $[1/2; -1]$ (lokální min)]

11. (Sbírka, 221) (Beta) $f(x, y) = e^{x/2} (x + y^2)$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod $[-2;0]$ (lokální min)]

12. (Alfa) $f(x, y) = e^x (x^2 + y^2)$ [soustava s exponenciálou, dva stacionární body, lokální min. v $[0;0]$, sedlový bod $[-2;0]$]

13. (Alfa) $f(x, y) = 3 \ln(x^2 y) - y^3 - 3x^2 + 4$ [soustava dvou samostatných rovnic (neznámá ve jmenovateli), dva stacionární body $[1;1]$, $[-1;1]$, v obou lok. max.]

14. $f(x, y) = e^{-x^2-2x-3y^2}$ [soustava s exponenciálou, jeden stacionární bod $[-1;0]$ (lokální max.)]

15*. (Alfa) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ [lok. min. v $[0, 0]$, neostré lok. max v bodech $[x, y] : x^2 + y^2 = 1$ (jednotková kružnice) (*Nápověda:* použijte polární souřadnice $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Pak je $x^2 + y^2 = r^2$.]

Jiné zadání: Určete všechny stacionární body. Ověřte, zda v bodě $[0, 0]$ má fce f lokální extrém. Pokud ano, jaký ?

Absolutní (globální) extrémy

Definice.

Říkáme, že funkce f (n prom.) nabývá v bodě $A \in M \subset D(f)$ svého maxima na množině M , jestliže pro každé $X \in M$ platí: $f(X) \leq f(A)$. Zapisujeme $f(A) = \max \{f(x) : x \in M\}$, stručně $f(A) = \max_M f$. Analogicky minimum funkce f na množině M . Značíme je $\min_M f$. Absolutní extrémy fce f na celém $D(f)$ značíme $\max f$, resp. $\min f$.

Věta 6.14

(postačující podmínky pro existenci absolutních extrémů)

Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je neprázdná, omezená a uzavřená množina, nechť funkce f je spojitá na M .

Pak funkce f nabývá na množině M maxima a minima.

V případě $n = 1$ je M uzavřený omezený interval a větu lze doplnit:

Dodatek. Absolutních extrémů může funkce $f(x)$ nabývat pouze

- 1) ve vnitřních bodech intervalu, v nichž je $f'(x) = 0$ nebo derivace neexistuje (splněna NP pro lokální extrém)
- 2) v krajních bodech intervalu.

Výpočet absolutních extrémů ($n = 1$)

1. Zdůvodníme existenci.
2. Najdeme kritické body.
3. Vypočítáme hodnoty $f(x)$ v těchto bodech. Z nich určíme maximum, resp. minimum funkce f v daném intervalu.

Otázka: Co když interval není uzavřený nebo není omezený ?

Uvedený postup použijeme pro funkci $f(x, y)$ v případě zvaném **vázané extrémy**, a to když množina

$M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$, kde g je daná funkce.

Pokud lze, pak z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, kterou dosadíme do dané funkce f . Získáme tak úlohu určit absolutní extrémy funkce jedné proměnné.

Příklad

Výpočet absolutních extrémů (n prom., obecná mn. M)

Připomeňme, že M^0 je vnitřek a ∂M je hranice množiny M .

1. Zdůvodníme existenci absolutních extrémů (Věta 6.14).
2. Určíme všechny kritické body X funkce f v otevřené množině M^0 .
3. Určíme všechny body $X \in \partial M$, ve kterých může funkce f nabývat vázaných extrémů na hranici množiny M . Nezapomeňme na průsečíky křivek, které tvoří hranici ∂M (pokud průsečíky existují).
4. Určíme hodnoty $f(X)$ ve všech vypočítaných bodech. Největší hodnota je pak $\max_M f$ a nejmenší hodnota je $\min_M f$.

Příklad. Zdůvodněte existenci absolutních extrémů a určete je (tj. určete jejich polohu a odpovídající funkční hodnotu).

1. $z = f(x, y) = x + 4\sqrt{x} - 2y$ na úsečce $y = x - 1$, $x \in \langle 0; 9 \rangle$.

2. $z = f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ na $M = \{[x, y]; x + y = 1, x \in \langle 1/4, 9/10 \rangle\}$.

3. $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 18$ na $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4. $z = f(x, y) = xy(2 - x - y)$

a) na hranici ∂M množiny $M = \{[x, y]; x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

b) na množině M .

5. $z = f(x, y) = \sqrt{y} - 6y + 3x^2 - 8x$,

M je oblouk paraboly $y = x^2$ mezi body $[-2; ?]$, $[1; ?]$.

6. Slovní úlohy.