Funkce. Limita a spojitost

skriptum J. Neustupa
text Funkce (úvod) na této web stránce

III.2 Fce - základní pojmy

1. Definice, def. obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$, graf

2. Fce složená, omezená,

3. Fce sudá, lichá, periodická

Fce f se nazývá sudá, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:
$(-x)$ patří do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Graf je souměrný podle osy y.

Fce f se nazývá lichá, ...$f(-x) = -f(x)$. Graf je souměrný podle počátku.

Příklady

Fce f se nazývá periodická s periodou p, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $x \pm p$ patří do $D(f)$ a $f(x \pm p) = f(x)$.

Příklad. Uvažujme množinu funkcí $g_k(x) = \cos \dfrac{k\pi x}{L}$, kde $k \in N$, L je libovolné (ale pevné) kladné číslo. Pak pro každé $k \in N$ platí, že funkce g_k je periodická s periodou $p = 2L/k$.

4. Fce inverzní

III.3 Vybrané fce. Grafy, $D(f)$, $H(f)$, limity v krajních bodech

III.3.5 Cyklometrické fce jsou fce inverzní k funkcím goniometrickým

Definice Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ má v bodě $\boldsymbol{x_0}$ limitu $\boldsymbol{a}$, jestliže

ke $\forall \boldsymbol{U}(\boldsymbol{a})\ \ \exists \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_0})$ tak, že pro $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_0})$ platí: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{a})$.

limity jednostranné, limita vlastní, limita nevlastní

Různé situace (ačkoliv vždy existují obě jednostr. limity, viz graf)

Př. 1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(3x - x^2) = 2,$ $\lim = f(x_0)$

Př. 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\operatorname{sign} x| = 1,$ $\lim \neq f(x_0) = 0$

Př. 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty,$ existuje, ačkoliv $x_0 \notin D(f)$

Př. 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sign} x =$ neexistuje, ačkoliv $x_0 \in D(f),\ f(x_0) = 0$

Př. 5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} =$ neexistuje, $x_0 \notin D(f)$

Základní věty o limitě funkce

Věta 4.4 Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.12 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu a právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu zleva i zprava a obě jsou rovny a.

Věta 4.6 Nechť existují $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Pak platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) * g(x) = a * b$, pokud výraz $a * b$ má smysl.

Zde symbol * znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$

Věta 4.9 o limitě typu $1/0$

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v $P(x_0)$.

Pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Př. 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{3-5x} = -3/7$, **Př. 7.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{5-x} = -2$,

Př. 8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\mathrm{e}^x}{3-x} =$, neexistuje, neboť $\lim\limits_{x\to 3_-} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3_+} = -\infty$.

Př. 9. Určete $D(f)$ a limity v krajních bodech, jestliže $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$. Načrtněte tvar grafu v okolí vyšetřených bodů.

Výsledek: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, fce je lichá!

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Věta 4.32 (limita složené funkce)

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq a$ v $P(x_0)$.

Nechť $\lim\limits_{y \to a} f(y) = L$.

Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = L$

Zadání z Př. 9 pro funkce

Př. 10. $f(x) = \ln(2 - x)$.
Výsl.: $D(f) = (-\infty, 2)$, $\lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Př. 11. $f(x) = \mathrm{e}^{1/x^2}$. **Výsledek:** $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, fce je sudá !
$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Spojitost funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitost zprava, zleva v bodě $x_0 \in D(f)$

Říkáme, že funkce f je spojitá v intervalu I, je-li f spojitá v každém bodě intervalu I. Patří-li krajní bod(y) do I, pak se v nich požaduje spojitost zleva, resp. zprava.

Základní věty o spojitosti

Věta 4.24 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí
v bodě resp. v intervalu.

Věta 4.25 o spojitosti složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0

Věta 4.22 (spojitost tzv. základních funkcí)

Funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou spojité v každém bodě svého def. oboru. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

Funkce, které vznikly operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání funkcí základních budeme nazývat elementární.

!!! Důsledkem předchozích vět je

Věta. Libovolná elementární funkce je spojitá v každém bodě svého def. oboru. Tedy též v každém intervalu $I \subset D(f)$.

Příklad 1. Polynom stupně $n: P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.

Příklad 2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Příklad 3. Důležitý !!!

Postačující podmínkou pro existenci integrálu je spojitost fce $\Longrightarrow$ Integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje v každém intervalu I, který je částí $D(f)$.

Další důležité vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.26 (Darbouxova vlastnost)

Nechť funkce f je spojitá v omezeném intervalu $\boldsymbol{I = \langle a, b \rangle}$.
Pak funkce f nabývá na I všech hodnot mezi $\boldsymbol{f(a)}$ a $\boldsymbol{f(b)}$.

Důsledek. Nechť navíc je $\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$.
Pak existuje bod $\boldsymbol{\alpha \in (a, b)}$ takový, že $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$.

Poznámka. Na tom je založena numerická metoda půlení intervalu (bisekce) pro řešení rovnice $\boldsymbol{f(x) = 0}$.
Najde řešení přibližné, ALE s požadovanou přesností.