Funkce. Limita a spojitost

skriptum J. Neustupa

III.2 Fce - základní pojmy

1. Definice, def. obor $D(f)$, ...

2. Fce složená, omezená,

3. Fce inverzní

4. Fce sudá, lichá, periodická

Fce f se nazývá sudá, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:
$(-x)$ patří do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Graf je souměrný podle osy x.

Fce f se nazývá lichá, ...$f(-x) = -f(x)$. Graf je souměrný podle počátku.

Příklady

Fce f se nazývá periodická s periodou p, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $x \pm p$ patří do $D(f)$ a $f(x \pm p) = f(x)$.

III.3 Vybrané fce. Grafy, $D(f)$, ...

III.3.5 Cyklometrické fce.

Definice

Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ má v bodě $\boldsymbol{x_0}$ limitu $\boldsymbol{a}$, jestliže ke $\forall \boldsymbol{U(a)}$ $\exists \boldsymbol{P(x_0)}$ tak, že pro $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P(x_0)}$ platí: $\boldsymbol{x \in P(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(a)}$.

limity jednostranné

limita vlastní

limita nevlastní

Základní věty o limitě funkce

Věta 4.4 Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.12 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu a právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu zleva i zprava a obě jsou rovny a.

Věta 4.6 Nechť existují $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$.

Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = a * b$, pokud výraz $a * b$ má smysl.

Zde symbol * znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$

Věta 4.9 o limitě typu $1/f(x)$

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v $P(x_0)$.

Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Věta 4.32* (limita složené funkce)

Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq 0$ v $P(x_0)$.

Nechť $\lim\limits_{y \to a} f(y) = L$.

Pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = L$

Spojitost funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice Ř., že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitost zprava, zleva v bodě $x_0 \in D(f)$

Ř., že funkce f je spojitá v intervalu I, je-li f spojitá v každém bodě intervalu I. Patří-li krajní bod(y) do I, pak se v nich požaduje spojitost zleva, resp. zprava.

Základní věty o spojitosti

Věta 4.24 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí
v bodě resp. v intervalu.

Věta 4.25 o spojitosti složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0

Věta 4.22 (spojitost tzv. základních funkcí)

Funkce mocninná, exponenciální, logaritmická, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou spojité v každém bodě svého def. oboru. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

!!! Důsledek předchozích vět.

Stejné tvrzení platí pro každou funkci, která vznikla operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání funkcí z Věty 4.22.

Příklad 1. Polynom

Příklad 2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Příklad 3. Důležitý !!!

Postačující podmínkou pro existenci integrálu je spojitost fce $\Longrightarrow$ Integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje v každém intervalu I, který je částí $D(f)$.

Další důležité vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.26 (Darbouxova vlastnost)

Nechť funkce f je spojitá v omezeném intervalu $\boldsymbol{I = \langle a, b\rangle}$.
Pak funkce f nabývá na I všech hodnot mezi $\boldsymbol{f(a)}$ a $\boldsymbol{f(b)}$.

Důsledek. Nechť navíc je $\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$.
Pak existuje bod $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{(a, b)}$ takový, že $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$.

Poznámka. Na tom je založena numerická metoda půlení intervalu (bisekce) pro řešení rovnice $\boldsymbol{f(x) = 0}$.
Najde řešení přibližné, ALE s požadovanou přesností.