

Funkce. Limita a spojitost

skriptum J. Neustupa

text Funkce (úvod) na této web stránce

III.2 Fce - základní pojmy

1. Definice, def. obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$, graf
2. Fce složená, omezená,
3. Fce sudá, lichá, periodická

Fce **f se nazývá sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí:

$(-x)$ patří do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Graf je souměrný podle osy y .

Fce **f se nazývá lichá**, $f(-x) = -f(x)$. Graf je souměrný podle počátku.

Příklady

Fce f se nazývá periodická s periodou p , jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $x \pm p$ patří do $D(f)$ a $f(x \pm p) = f(x)$.

Příklad. Uvažujme množinu funkcí $g_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{L}$, kde $k \in \mathbb{N}$, L je libovolné (ale pevné) kladné číslo. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že funkce g_k je periodická s periodou $p = 2L/k$.

4. Fce inverzní

III.3 Vybrané fce. Grafy, $D(f)$, $H(f)$, limity v krajních bodech

III.3.5 Cyklometrické fce jsou fce inverzní k funkcím goniometrickým

Definice Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu a , jestliže ke $\forall U(a) \exists P(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in P(x_0)$ platí: $f(x) \in U(a)$.

limity jednostranné, limita vlastní, limita nevlastní

Různé situace (ačkoliv vždy existují obě jednostr. limity, viz **graf**)

Př. 1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - x^2) = 2, \quad \lim = f(x_0)$

Př. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sign } x| = 1, \quad \lim \neq f(x_0) = 0$

Př. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \text{existuje, ačkoliv } x_0 \notin D(f)$

Př. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x = \text{neexistuje, ačkoliv } x_0 \in D(f), f(x_0) = 0$

Př. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{neexistuje, } x_0 \notin D(f)$

Základní věty o limitě funkce

Věta 4.4 Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.12 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu a právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu zleva i zprava a obě jsou rovny a .

Věta 4.6 Nechť existují $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.

Pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x) = a * b$, pokud výraz $a * b$ má smysl.

Zde symbol $*$ znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$

Věta 4.9 o limitě typu 1/0

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v $P(x_0)$.

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

$$\text{Př. 6. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{3 - 5x} = -3/7, \quad \text{Př. 7. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{5 - x} = -2,$$

$$\text{Př. 8. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x}{3 - x} =, \text{ neexistuje, neboť } \lim_{x \rightarrow 3-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+} = -\infty.$$

Př. 9. Určete $D(f)$ a limity v krajních bodech, jestliže $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.
Načrtněte tvar grafu v okolí vyšetřených bodů.

Výsledek: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, fce je lichá!

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Věta 4.32 (limita složené funkce)

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq a$ v $P(x_0)$.

Nechť $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = L$.

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$

Zadání z Př. 9 pro funkce

Př. 10. $f(x) = \ln(2 - x)$.

Výsl.: $D(f) = (-\infty, 2)$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Př. 11. $f(x) = e^{1/x^2}$. **Výsledek:** $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, fce je sudá !

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Spojitosť funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitosť zprava, zleva v bodě $x_0 \in D(f)$

Říkáme, že funkce f je spojitá v intervalu I , je-li f spojitá v každém bodě intervalu I . Patří-li krajní bod(y) do I , pak se v nich požaduje spojitost zleva, resp. zprava.

Základní věty o spojitosti

Věta 4.24 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí
v bodě resp. v intervalu.

Věta 4.25 o spojitosti složené funkce $f(g(x))$ v bodě x_0

Věta 4.22 (spojitost tzv. základních funkcí)

Funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou **spojité v každém bodě svého def. oboru**. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

!!! Důsledkem předchozích vět je

Věta. Každá funkce, která vznikla operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání **funkcí základních** je spojitá v každém bodě svého def. oboru. Tedy též v každém intervalu $I \subset D(f)$.

Příklad 1. Polynom stupně n : $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Příklad 2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Příklad 3. Důležitý !!!

Postačující podmínkou pro existenci integrálu je spojitost fce \implies
Integrál $\int f(x) dx$ existuje v každém intervalu I , který je částí $D(f)$.

Další důležité vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.26 (Darbouxova vlastnost)

Nechť funkce f je spojitá v omezeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$.
Pak funkce f nabývá na I všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důsledek. Nechť navíc je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Pak existuje bod $\alpha \in (a, b)$ takový, že $f(\alpha) = 0$.

Poznámka. Na tom je založena numerická metoda půlení intervalu (bisekce) pro řešení rovnice $f(x) = 0$.

Najde řešení přibližné, ALE s požadovanou přesností.