Průběh funkce $f(x) = \frac{x^2+16}{x}$

I. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0; \infty)$; v něm je fce spojitá.

$\lim\limits_{x\to 0+} = \text{"}\frac{16}{0_+}\text{"} = +\infty$ fce je lichá: $f(-x) = \frac{(-x)^2+16}{-x} = -f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \underset{l'H}{\text{lze}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$

II. $f'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+16)}{x^2} = \frac{x^2-16}{x^2}$, je spojitá v $D(f)$

$f'(x) = 0 \iff x^2-16=0 \iff x = \pm 4$

(*) Znaménko derivace na $(0; \infty)$,

Metoda "nulových bodů": znaménko $f'(\bar{x})$ pro vhodné $\bar{x}$ je znaménkem f' na celém intervalu

f' $\quad f'(1) = -15 \quad f'(5) = + \frac{9}{25}$

f $\quad 0 \searrow 4 \nearrow +\infty$

f je klesající na $(0; 4\rangle$
f je rostoucí na $\langle 4; +\infty)$ } lok. min v $x=4$, $f(4) = 8$

III. $f''(x) = \frac{32}{x^3}$, spojitá v $D(f)$

$f''(x) > 0 \iff x \in (0; +\infty)$, fce je ryze konvexní

$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$ fce je ryze konkávní

Inflexní body nejsou.

IV. Asymptoty (pouze ZK Alfa):

1.) přímka $x = 0$, neboť $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$

2.) šikmá, $y = kx + q$ pro $x \to +\infty$

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+16}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim \frac{2x}{2x} = 1$

$q = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+16}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x} = 0$

$y = x$

Graf je souměrný podle počátku.

(*) Lze řešit i přímo: $f'(x) < 0 \iff x^2 - 16 < 0 \iff |x| < 4 \iff -4 < x < 4$ ale $x \neq 0$