Hodnost matice, regulární matice, Gaussův algoritmus

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Hodností matice A typu $m \times n$ nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádků, které chápeme jako vektory v $\mathbb{R}^n$. Značíme $h(A)$.

Poznámka: Je to též maximální počet lin. nezávislých sloupců, které chápeme jako vektory v $\mathbb{R}^m$.

Poznámka (důležitá). Z definice hodnosti matice vyplývá, že o lineární závislosti, resp. nezávislosti dané skupiny vektorů lze rozhodnout určením hodnosti matice sestavené po řádcích (nebo sloupcích) z daných vektorů.
Je-li tato matice čtvercová, pak tím můžeme rozhodnout i o tom, zda daná skupina vektorů tvoří bázi v příslušném prostoru. V tomto případě (čtvercová matice) můžeme obě úlohy, tj. nezávislost skupiny vektorů a otázku báze, rozhodnout též pomocí determinantu.

Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má maximální možnou hodnost n nazýváme regulární maticí. Není-li čtvercová matice regulární, nazýváme ji singulární.

Speciální případ: Je-li $m = 2$ nebo $n = 2$, pak určíme hodnost přímo podle definice, neboť víme, že dva nenulové vektory jsou lin. závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého.

Př. 1. Zdůvodněte podle definice, že matice $A = \begin{pmatrix} 2, & -4 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}$ má hodnost 2, zatímco matice $B = \begin{pmatrix} 2, & -4, & -6 \\ -1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$ má hodnost 1.

Věta I.2.17. Nechť A je horní trojúhelníková matice, která má **všechny** prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak je hodnost $h(A) = \min\{m, n\}$, tj. počet nenulových řádků.

Pro matici typu $m \times n$, kde $m > 2$, $n > 2$ postupujeme zpravidla podle Gaussova algoritmu, který danou matici převádí právě na horní trojúhelníkovou matici. Přitom používáme tzv. ekvivalentní úpravy matice, tj. takové úpravy, které nemění její hodnost. Jedná se především o tyto úpravy:
1. záměna řádků
2. vynásobení řádku nenulovým číslem
3. k některému řádku přičteme násobek jiného řádku
4. vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného

Pro vytvoření nulového prvku v požadovaném místě užíváme zpravidla úpravu č. 3.

Gaussův algoritmus:

1. krok: Pomocí nenulového prvku a_{11} vytvoříme nuly v prvním sloupci pod ním. Pokud je $a_{11} = 0$, pak zaměníme řádky nebo sloupce. Pokud lze, zaměníme tak, aby $a_{11} = 1$ nebo $a_{11} = -1$.

2. krok: Pokud je v nové matici prvek $a'_{22} \neq 0$, vytvoříme pomocí něho nuly ve sloupci pod ním.

Postup opakujeme, až dospějeme k horní trojúhelníkové matici.

Př. 2. Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix}$. Rozhodněte, zda je to matice regulární.

Řešení: Matici postupně převádíme pomocí úprav, které zachovávají její hodnost, na horní trojúhelníkovou matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix} \sim {}^{1}) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 2, & 2, & 1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix} \sim {}^{2}) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & -2, & 3 \\ 0, & 4, & 4 \end{pmatrix} \sim {}^{3}) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & -2, & 3 \\ 0, & 0, & 10 \end{pmatrix}.$$

Popis jednotlivých kroků:

^{1}) Zaměníme 1. a 2. řádek; dosáhneme toho, že $a_{11} = 1$.

[2]) První řádek opíšeme. Ke 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-2) a ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-1). Tím získáme nulové prvky v prvním sloupci pod hlavní diagonálou.

[3]) Druhý řádek opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený číslem 2. Tím získáme nulové prvky ve druhém sloupci pod hlavní diagonálou.

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici, která má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové. Podle Věty I.2.17 má tato matice (a tedy i matice původní) hodnost 3. Matice A je regulární.

Př. 3. Co můžeme říci o řádkových vektorech $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 6, 3)$ matice A z předchozího příkladu ?

Odpověď: Vzhledem k definici hodnosti se jedná o tři lineárně nezávislé vektory v prostoru $\mathbb{R}^3$. Protože tento prostor má dimenzi 3, tvoří tyto řádkové vektory bázi tohoto prostoru.

Poznámka: Stejná tvrzení platí i o sloupcových vektorech této matice.

Př. 4. Ověřte, že vektory $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{a} = (1, 6, -7)$ jsou lineárně závislé (změnili jsme pouze třetí souřadnici původního vektoru $\mathbf{w}$).

Řešení: Z daných vektorů sestavíme matici, např. po řádcích. Postupujeme jako v předchozím příkladu. Ve třetím řádku vyjdou všechny prvky nulové, proto tento řádek vynecháme. Hodnost matice je tedy 2, vektory však jsou tři a proto jsou lineárně závislé. Daná skupina tedy netvoří bázi v prostoru $\mathbb{R}^3$. Uvedené vektory generují podprostor dimenze 2, bází tohoto podprostoru jsou libovolné dva z daných tří vektorů.

Poznámka: Matice sestavená z vektorů Příkladu 4 je tedy singulární.

Př. 5. Určete hodnoty parametru p tak, aby skupina vektorů $\mathbf{u} = (3, 5, p)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 3, p + 2)$ byla lineárně nezávislá.

Řešení: Z daných vektorů sestavíme matici, např. po řádcích. Vhodnou úpravou v tomto případě je zaměnit pořadí řádků zařazením vektoru $\mathbf{v}$ do prvního řádku. Tím získáme výhodný prvek $a_{11} = 1$. Dále postupujeme jako v Příkladu 2, tj. takto sestavenou matici převádíme na horní trojúhelníkovou matici pomocí elementárních úprav:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 3, & 5, & p \\ 1, & 3, & p+2 \end{pmatrix} \sim {}^{1)} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & p \\ 0, & 1, & p+2 \end{pmatrix} \sim {}^{2)} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & p \\ 0, & 0, & 2p+2 \end{pmatrix}$$

Popis jednotlivých kroků:

[1]) První řádek opíšeme. Ke 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-3) a ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-1). Tím získáme nulové prvky v prvním sloupci pod hlavní diagonálou.

[2]) Druhý řádek opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek. Tím vytvoříme nulový prvek ve druhém sloupci pod hlavní diagonálou.

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici. Je-li $2p + 2 \neq 0$, tj. $p \neq -1$, pak má tato trojúhelníková matice všechny prvky na hlavní diagonále nenulové a má tři nenulové řádky. Podle Věty I.2.17 má tedy pro $p \neq -1$ tato matice (a tedy i matice původní) hodnost 3 a daná skupina vektorů je lineárně nezávislá.

Poznámka: Je-li $p \neq -1$, pak matice sestavená z daných vektorů je regulární. Je-li $p = -1$, pak tato matice je singulárnín a daná skupina vektorů je lin. závislá.

Poznámka: K řešení zadané úlohy lze v tomto případě (čtvercová matice) použít i determinantu matice A. Výpočtem ověřte, že $detA = -2p - 2$. Podle Věty I.2.31 ze skipta [1] je matice A regulární a tedy daná skupina vektorů je lin. nezávislá právě tehdy, když $detA \neq 0$, tj. právě tehdy, když $p \neq -1$.

Další příklady k samostatnému počítání najdete v níže uvedených skriptech, včetně kapitoly Úlohy ze zkoušek v uvedené Sbírce...V této sbírce najdete i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (též starší vydání).

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.