

Hodnost matice, regulární matice, Gaussův algoritmus

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Hodností matice A typu $m \times n$ nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádků, které chápeme jako vektory v \mathbb{R}^n . Značíme $h(A)$.

Poznámka: Je to též maximální počet lin. nezávislých sloupců, které chápeme jako vektory v \mathbb{R}^m .

Poznámka (důležitá). Z definice hodnosti matice vyplývá, že o lineární závislosti, resp. nezávislosti dané skupiny vektorů lze rozhodnout určením hodnosti matice sestavené po řádcích (nebo sloupcích) z daných vektorů.

Je-li tato matice čtvercová, pak tím můžeme rozhodnout i o tom, zda daná skupina vektorů tvoří bázi v příslušném prostoru. V tomto případě (čtvercová matice) můžeme obě úlohy, tj. nezávislost skupiny vektorů a otázku báze, rozhodnout též pomocí determinantu.

Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má maximální možnou hodnost n nazýváme regulární maticí. Není-li čtvercová matice regulární, nazýváme ji singulární.

Speciální případ: Je-li $m = 2$ nebo $n = 2$, pak určíme hodnost přímo podle definice, neboť víme, že dva nenulové vektory jsou lin. závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého.

Př. 1. Zdůvodněte podle definice, že matice $A = \begin{pmatrix} 2, & -4 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}$ má hodnost 2, zatímco matice $B = \begin{pmatrix} 2, & -4, & -6 \\ -1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$ má hodnost 1.

Věta I.2.17. Nechť A je horní trojúhelníková matice, která má **všechny** prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak je hodnost $h(A) = \min\{m, n\}$, tj. počet nenulových řádků.

Pro matici typu $m \times n$, kde $m > 2$, $n > 2$ postupujeme zpravidla podle Gaussova algoritmu, který danou matici převádí právě na horní trojúhelníkovou matici. Přitom používáme tzv. ekvivalentní úpravy matice, tj. takové úpravy, které nemění její hodnost. Jedná se především o tyto úpravy:

1. záměna řádků
2. vynásobení řádku nenulovým číslem
3. k některému řádku přičteme násobek jiného řádku
4. vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného

Pro vytvoření nulového prvku v požadovaném místě užíváme zpravidla úpravu č. 3.

Gaussův algoritmus:

1. krok: Pomocí nenulového prvku a_{11} vytvoříme nuly v prvním sloupci pod ním. Pokud je $a_{11} = 0$, pak zaměníme řádky nebo sloupce. Pokud lze, zaměníme tak, aby $a_{11} = 1$ nebo $a_{11} = -1$.

2. krok: Pokud je v nové matici prvek $a'_{22} \neq 0$, vytvoříme pomocí něho nuly ve sloupci pod ním. Postup opakujeme, až dospějeme k horní trojúhelníkové matici.

Př. 2. Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix}$. Rozhodněte, zda je to matice regulární.

Řešení: Matici postupně převádíme pomocí úprav, které zachovávají její hodnost, na horní trojúhelníkovou matici:

$$A = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix} \sim {}^1) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 2, & 2, & 1 \\ 1, & 6, & 3 \end{pmatrix} \sim {}^2) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & -2, & 3 \\ 0, & 4, & 4 \end{pmatrix} \sim {}^3) \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & -2, & 3 \\ 0, & 0, & 10 \end{pmatrix}.$$

Popis jednotlivých kroků:

- 1) Zaměníme 1. a 2. řádek; dosáhneme toho, že $a_{11} = 1$.
- 2) První řádek opíšeme. Ke 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-2) a ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-1) . Tím získáme nulové prvky v prvním sloupci pod hlavní diagonálou.
- 3) Druhý řádek opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený číslem 2. Tím získáme nulové prvky ve druhém sloupci pod hlavní diagonálou.

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici, která má všechny prvky na hlavní diagonále nenulové. Podle Věty I.2.17 má tato matice (a tedy i matice původní) hodnotu 3. Matice A je regulární, existuje k ní matice inverzní.

Př. 3. Co můžeme říci o řádkových vektorech $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 6, 3)$ matice A z předchozího příkladu ?

Odpověď: Vzhledem k definici hodnoty tvoří skupinu tří lineárně nezávislých vektorů v prostoru \mathbb{R}^3 . Protože tento prostor má dimenzi 3, tvoří tyto řádkové vektory bázi tohoto prostoru.

Poznámka: Stejná tvrzení platí i o sloupcových vektorech této matice, tj. o skupině vektorů $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 6)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 3)$.

Př. 4. Ověřte, že skupina vektorů $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 6)$, $\mathbf{d} = (1, -1, -7)$ je lineárně závislá.

Řešení: Z daných vektorů sestavíme matici, např. po sloupcích. Změnili jsme pouze třetí složku původního sloupcového vektoru \mathbf{c} . V matici A z předchozího příkladu jsme tedy změnili pouze prvek $a_{3,3}$, a to z hodnoty 3 na (-7) . Postupujeme jako v předchozím příkladu. Ve třetím řádku vyjdou všechny prvky nulové, proto tento řádek vynecháme. Hodnota matice je dva, dané vektory však jsou tři, tvoří tedy skupinu lineárně závislou.

Poznámka: Skupina vektorů z Př. 4 netvoří bázi v prostoru \mathbb{R}^3 . Uvedené vektory generují v \mathbb{R}^3 podprostor dimenze 2. Bázi tohoto podprostoru jsou libovolné dva z daných tří vektorů, neboť kterékoliv dva z těchto tří vektorů tvoří skupinu lin. nezávislou (mezi žádnými dvěma z nich není vztah násobku). Matice sestavená z daných tří vektorů je tedy singulární, neexistuje k ní matice inverzní.

Př. 5. Určete hodnoty parametru p tak, aby skupina vektorů $\mathbf{u} = (3, 5, p)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 3, p+2)$ byla lineárně nezávislá.

Řešení: Z daných vektorů sestavíme matici, např. po řádcích. Vhodnou úpravou v tomto případě je zaměnit pořadí řádků zařazením vektoru \mathbf{v} do prvního řádku. Tím získáme výhodný prvek $a_{11} = 1$. Dále postupujeme jako v Příkladu 2, tj. takto sestavenou matici převádíme na horní trojúhelníkovou matici pomocí elementárních úprav:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 3, & 5, & p \\ 1, & 3, & p+2 \end{pmatrix} \sim {}^1) \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & p \\ 0, & 1, & p+2 \end{pmatrix} \sim {}^2) \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & p \\ 0, & 0, & 2p+2 \end{pmatrix}$$

Popis jednotlivých kroků:

¹⁾ První řádek opíšeme. Ke 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-3) a ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený číslem (-1) . Tím získáme nulové prvky v prvním sloupci pod hlavní diagonálou.

²⁾ Druhý řádek opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek. Tím vytvoříme nulový prvek ve druhém sloupci pod hlavní diagonálou.

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici. Je-li $2p+2 \neq 0$, tj. $p \neq -1$, pak má tato trojúhelníková matice všechny prvky na hlavní diagonále nenulové a má tři nenulové řádky. Podle Věty I.2.17 má tedy pro $p \neq -1$ tato matice (a tedy i matice původní) hodnotu 3 a daná skupina vektorů je lineárně nezávislá.

Poznámka: Je-li $p \neq -1$, pak matice sestavená z daných vektorů je regulární. Je-li $p = -1$, pak tato matice je singulární a daná skupina vektorů je lin. závislá.

Poznámka: K řešení zadané úlohy lze v tomto případě (čtvercová matice) použít i determinantu matice A . Výpočtem ověřte, že $\det A = -2p - 2$. Podle Věty I.2.31 ze skipta [1] je matice A regulární a tedy daná skupina vektorů je lin. nezávislá právě tehdy, když $\det A \neq 0$, tj. právě tehdy, když $p \neq -1$.

Další úlohy k samostatnému počítání najdete v níže uvedených skriptech, včetně kapitoly Úlohy ze zkoušek v uvedené Sbírce...V této sbírce najdete i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014 (též starší vydání 2013).

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014 (též starší vydání 2013).