

II.7.* Derivace složené funkce

Nechť jsou dány diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Pak

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

- Vypočítejte derivace daných diferencovatelných funkcí.

Příklad 160. Jsou dány diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

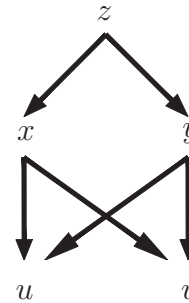
- Vypočítejte derivace složené funkce $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.
- Ověřte přímým výpočtem pro $z = f(x, y) = e^x \ln y$.

Řešení :

- Závislost mezi proměnnými lze znázornit orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot u \sin v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u \cos v$$



- Dosadíme za x a y a dostaneme funkci $z(u, v) = e^{u \cos v} \ln(u \sin v)$, pak

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{u \cos v} \cdot \cos v \cdot \ln(u \sin v) + e^{u \cos v} \cdot \frac{1}{u \sin v} \cdot \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{u \cos v} \cdot (-u \sin v) \cdot \ln(u \sin v) + e^{u \cos v} \cdot \frac{1}{u \sin v} \cdot u \cos v.$$

- Do vzorců z a) dosadíme za $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

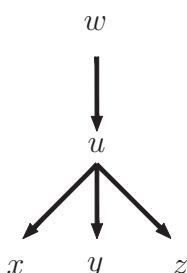
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin v = e^x \ln y \cdot \cos v + \frac{e^x}{y} \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u \sin v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u \cos v = -e^x \ln y \cdot u \sin v + \frac{e^x}{y} u \cos v.$$

Dosazením za x a y dostaneme stejný výsledek jako v b1). ■

Příklad 161. $w = f(x^4 + y^4 - 2z^4)$. Spočítejte výraz $V = \frac{1}{4x^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{4y^3} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4z^3} \frac{\partial w}{\partial z}$.

Řešení : Označme $u = x^4 + y^4 - 2z^4 \Rightarrow w = f(u)$ je funkce jedné proměnné.



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot 4x^3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot 4y^3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = f'(u) \cdot (-8z^3).$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V = 0$. ■

162. Přesvědčte se, že funkce $y = f(x + at) + g(x - at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, kde konstanta $a \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že f a g mají spojitě parciální derivace 2. řádu. [Návod: $u = x + at$, $v = x - at$, $y = f(u) + g(v)$]

163. Přesvědčte se, že funkce $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

164. Jsou dány funkce $z = f(u, v)$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W = y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. [$W = (x^2 + y^2)e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}$]

165. Je dána funkce $f(u, v) = x^y$, kde $x = u^2 + v^2$, $y = uv + v^2$. Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A , jehož souřadnice jsou $u = 1$, $v = -1$. [$\frac{\partial f}{\partial u}(A) = \frac{\partial f}{\partial v}(A) = -\ln 2$]

II.9. Funkce definované implicitně

Příklad 166. Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Řešení : Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$. Tato funkce je spojitá a má spojitě parciální derivace 1. a 2. řádu v \mathbb{E}_2 , tedy i v okolí bodu A , ověřte si. K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ se spojitou 1. a 2. derivací nyní stačí, že $F(A) = F(1, 0) = 0$ a $F_y(A) = (3y^2 - x)|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \quad f'(1) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = -\frac{3 - 4}{-1} = -1,$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = -\frac{(6x - 4 - y')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot y' - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

$$f''(1) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4. \quad \blacksquare$$

Příklad 167. Napište rovnici tečny t a normály n v bodě $A = [1, 1]$ křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0$,

Řešení : Jelikož $F(1, 1) = 0$ a $F_y(A) = (x^3 + 3y^2x + x^2)|_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnicí $F(x, y) = 0$ skutečně definována funkce $y = y(x)$, jejíž graf prochází bodem A .

$$y'(1) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = \left(-\frac{3x^2y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2x + x^2}\right)|_A = -\frac{6}{5}$$

$$t: \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \text{ kde } A = [x_0, y_0], \quad y - 1 = -\frac{6}{5}(x - 1) \implies 6x + 5y - 11 = 0,$$

$$n: \quad y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0), \quad y - 1 = \frac{5}{6}(x - 1) \implies 5x - 6y + 1 = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 168. Rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ je pro $x \neq 0$ dána implicitně funkce $y = f(x)$. Stanovte y' a y'' .

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, $F_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si uvědomit, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.

Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \implies \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} \implies x + yy' = y'x - y \implies x + y = y'(x - y) \implies y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y, x \neq 0.$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x + y}{x - y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y + y'(x - y + x + y)}{(x - y)^2}$$

$$y'' = \frac{-2y + 2xy'}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x + y}{x - y}}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}, \quad x \neq y, x \neq 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 169. Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0, 1]$. Zjistěte, zda je funkce f konvexní v okolí bodu $x_0 = 0$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A .

Řešení : $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3$ je diferencovatelná v \mathbb{E}_2 (tedy i v okolí bodu A) a má v \mathbb{E}_2 spojitě parciální derivace 2. řádu. Dále platí:

$$F(A) = F(0, 1) = 0, \quad F_y(A) = (2x + 2y + 2)\Big|_A = 4 \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + 2y - 4}{2x + 2y + 2} = -\frac{x + y - 2}{x + y + 1} \implies y'(0) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1 + y')(x + y + 1) - (x + y - 2)(1 + y')}{(x + y + 1)^2} = -\frac{3(1 + y')}{(x + y + 1)^2} \implies$$

$$y''(0) = -\frac{3(1 + \frac{1}{2})}{(0 + 1 + 1)^2} = -\frac{9}{8} < 0. \text{ Funkce } y = f(x) \text{ je v okolí bodu } x_0 \text{ konkávní,}$$

jelikož $y''(0) < 0$. Tečna v bodě A má rovnici $y - 1 = \frac{1}{2}x$. ■

Příklad 170. Dokažte, že vztahem $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je implicitně definována jediná funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu $A = [-1, -2, 1]$. Určete grad $f(-1, -2)$.

Řešení : Funkce F má spojitě parciální derivace v okolí bodu A ,

$$F(A) = F(-1, -2, 1) = 0, \quad F_z(A) = (3z^2 + 3x^2)\Big|_A = 6 \neq 0.$$

Tím je v okolí bodu A prokázána existence a jednoznačnost funkce $z = f(x, y)$, která má spojitě parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[-1, -2]$.

Nyní je $\operatorname{grad} f(-1, -2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$, kde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{6xz - 2y}{3z^2 + 3x^2} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -2) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2x}{3z^2 + 3x^2} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(-1, -2) = -\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{grad} f(-1, -2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1, -1). \quad \blacksquare$$

Příklad 171. V okolí bodu $[2, -2, 1]$ je dána funkce $z = f(x, y)$ v implicitním tvaru rovnicí $\ln z + x^2yz + 8 = 0$. Určete $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$, kde $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $A = [2, -2]$, $B = [3, -3]$.

Řešení: Označíme $F(x, y, z) = \ln z + x^2yz + 8$. Funkce $F_x = 2xyz$, $F_y = x^2z$, $F_z = \frac{1}{z} + x^2y$ jsou spojité v okolí bodu $[2, -2, 1]$.

V bodech, kde $F(x, y, z) = 0$ a $F_z(x, y, z) \neq 0$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z} + x^2y} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z} + x^2y} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}. \quad \blacksquare$$

Je dána plocha $z = z(x, y)$ a bod dotyku $T = [A, f(A)]$, kde $A = [x_0, y_0]$, pak

$$\text{tečná rovina } \tau : z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{normála } n : X = T + t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{kde } \vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

Příklad 172. Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $z = z(x, y)$ definované implicitně rovnicí $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ v bodě $A = [3, 0, 4]$.

Řešení: Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1\right) \sim \vec{n} = (F_x, F_y, F_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy

$$\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x, y, z)|_A = (3, 0, 4),$$

$$\tau : 3(x - 3) + 0 \cdot y + 4(z - 4) = 0 \implies 3x + 4z - 25 = 0,$$

$$n : [x, y, z] = [3, 0, 4] + t(3, 0, 4), \quad t \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Příklad 173. Napište rovnici tečné roviny k ploše definované implicitně rovnicí

$$F(x, y, z) \equiv x(y + z) + z^2 - 5 = 0 \text{ rovnoběžné s rovinou } \rho : 3x - 3y + 6z = 2.$$

Řešení: $\vec{n} = (3, -3, 6) \sim (1, -1, 2)$

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (y + z, x, x + 2z) = k(1, -1, 2), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y + z = k \\ x = -k \\ x + 2z = 2k \end{array} \right\} \text{ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu } A.$$

Vychází $x = -k$, $y = -\frac{k}{2}$, $z = \frac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané

ploše, proto dosadíme do $F(x, y, z) = 0$ a určíme parametr k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\left(-\frac{k}{2} + \frac{3}{2}k\right) + \left(\frac{3}{2}k\right)^2 = 5 \implies -k^2 + \frac{9}{4}k^2 = 5 \implies k^2 = 4 \implies k = \pm 2,$$

$$A_1 = [-2, -1, 3], \quad A_2 = [2, 1, -3],$$

$$\tau_1 : x - y + 2z - 5 = 0, \quad \tau_2 : x - y + 2z + 5 = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 174.* Určete rovnici tečny v bodě $A = [-2, 1, 6]$ ke křivce v \mathbb{E}_3 , která je průsečnicí dvou ploch zadaných implicitně rovnicemi
 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$.

Řešení : Určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1 : -4x + 3y + 6z - 47 = 0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2 : -4x + 4y - z - 6 = 0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-27, -28, -4) \sim (27, 28, 4)$ a rovnice tečny
 $[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4)$, $t \in \mathbb{R}$.

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x .

Potom y a z budou funkcemi proměnné x , tj. $y(x), z(x)$.

Hledaný tečný vektor \vec{s} bude $(1, y'(x), z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\begin{array}{l} 4x + 6yy' + 2zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{array} \quad \text{neboli} \quad \begin{array}{l} 2x + 3yy' + zz' = 0 \\ 2x + 4yy' = z' \end{array} .$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\left. \begin{array}{l} -4 + 3y' + 6z' = 0 \\ -4 + 4y' - z' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y' + 6z' = 4 \\ 4y' - z' = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-27} = \frac{28}{27} \\ z' = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-4}{-27} = \frac{4}{27} \end{array} .$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s} = \left(1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27}\right) \sim (27, 28, 4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x, y, z] = [-2, 1, 6] + t(27, 28, 4)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Příklad 175. a) Najděte jednotkový vektor \vec{n}^o normály v bodě $A = [1, -1, 1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$.

b) Spočítejte $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}^o}(A)$, kde $g(x, y, z) = xy^2z^3$.

Řešení : a) $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z) \sim (x, y, z)$, $\vec{n}^o(A) = \frac{\vec{n}(A)}{\|\vec{n}(A)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$

b) $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}^o}(A) = \text{grad } g(A) \cdot \vec{n}^o(A) = (1, -2, 3) \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě A :

176. $F(x, y) \equiv \arcsin x + xy^2 = 0$, $A = [0, 2]$ $[t : x = 0, n : y = 2]$

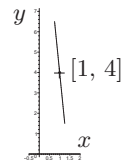
177. $F(x, y) \equiv x^2y + xy^2 - axy - a^3 = 0$, $A = [a, a]$ $[t : y = -x + 2a, n : y = x]$

178. Dokažte, že rovnicí $\ln(x + y) + 2x + y = 0$ je definována funkce $y = f(x)$ splňující $f(-1) = 2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A = [-1, 2]$.
 $[t : y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)]$

- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
 - a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce F .
 - b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$ v okolí bodu x_0 .
 - c) Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$ a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Popište chování této funkce v bodě x_0 , tj. rostoucí, resp. klesající.
 - d) Rovnici tečny užíjte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v daném bodě x_1 . Tečnu načrtněte.

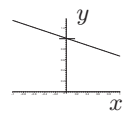
179. $F(x, y) = x^2y - x^3 - 2 \cdot \sqrt{y} + 1, [x_0, y_0] = [1, 4], x_1 = 0.8$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = 2xy - 3x^2, F_y = x^2 - \frac{1}{\sqrt{y}} \\ c) f'(1) = -10, t: y = 4 - 10(x - 1), n: y = 4 + \frac{1}{10}(x - 1), \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ klesající} \\ d) f(0.8) \doteq 6 \end{array} \right]$$



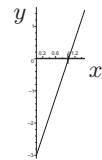
180. $F(x, y) = ye^x + y^2 - 2x^2y - 2, [x_0, y_0] = [0, 1], x_1 = -0.3$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = ye^x - 4xy, F_y = e^x + 2y - 2x^2 \\ c) f'(0) = -1/3, t: y = 1 - x/3, n: y = 1 + 3x, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 0 \text{ klesající} \\ d) f(-0.3) \doteq 1.1 \end{array} \right]$$



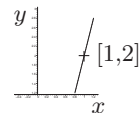
181. $F(x, y) = \ln(x - y) + 2x + y^2 - 2 = 0, [x_0, y_0] = [1, 0], x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = \frac{1}{x-y} + 2, F_y = -\frac{1}{x-y} + 2y \\ c) f'(1) = 3, t: 3x - y = 3, n: x + 3y = 1, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d) f(1.1) \doteq 0.3 \end{array} \right]$$



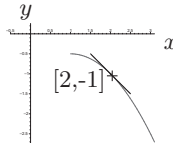
182. $F(x, y) = xye^{x-y} - \frac{2}{e} = 0, [x_0, y_0] = [1, 2], x_1 = 1.1$

$$\left[\begin{array}{l} a) F_x = (y + xy)e^{x-y}, F_y(x, y) = (x - xy)e^{x-y} \\ c) f'(1) = 4, t: y = 2 + 4(x - 1), n: x + 4y = 9, \\ \text{funkce } f \text{ je v bodě } x_0 = 1 \text{ rostoucí} \\ d) f(1.1) \doteq 2.4 \end{array} \right]$$

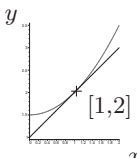


- Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
 - a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu x_0 .
 - b) Určete hodnoty derivací $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.
 - c) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě x_0 . Pomocí $T_2(x)$ vypočítejte přibližně hodnotu $f(x)$ pro dané x_1 .
 - d) Načrtněte graf funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

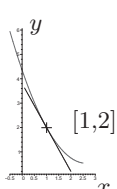
183. $F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [2, -1]$, $x_1 = 2.2$

$$\left[\begin{array}{l} b) f'(2) = f''(2) = -1, \\ c) T_2(x) = 1 - x - \frac{(x-2)^2}{2}, \\ f(2.2) \doteq -1.22 \end{array} \right]$$


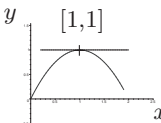
184. $F(x, y) = x^3 + \frac{y^2}{2} - x^2y - 1 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 1.2$

$$\left[\begin{array}{l} b) f'(1) = f''(1) = 1, \\ c) T_2(x) = 1 + x + \frac{(x-1)^2}{2}, \\ f(1.2) \doteq 2.22 \end{array} \right]$$


185. $F(x, y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $x_1 = 0.9$

$$\left[\begin{array}{l} b) f'(1) = -\frac{9}{5}, f''(1) = \frac{138}{125}, \\ c) T_2(x) = 2 - \frac{9}{5}(x-1) + \frac{69}{125}(x-1)^2, \\ f(1.2) \doteq \frac{27319}{12500} \end{array} \right]$$


186. $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$, $x_1 = 1.2$

$$\left[\begin{array}{l} b) f'(1) = 0, f''(1) = -2, \\ \text{v bodě nastává lokální maximum} \\ c) T_2(x) = 1 - (x-1)^2, f(1.2) \doteq 0.96 \end{array} \right]$$


- Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x, y, z) = 0$ v bodě A :

187. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$, $A = [1, 2, 2]$

$$[\tau : x + 4y + 6z - 21 = 0, n : [x, y, z] = (1, 2, 2) + t(1, 4, 6), t \in \mathbb{R}]$$

188. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $A = [1, 2, -1]$

$$[\tau : x + 11y + 5z - 18 = 0, n : [x, y, z] = (1, 2, -1) + t(1, 11, 5), t \in \mathbb{R}]$$

189. $xyz^2 - x - y - z = 0$, $A = [1, -1, -1]$

$$[\tau : -2x + z + 3 = 0, n : [x, y, z] = (1, -1, -1) + t(-2, 0, 1), t \in \mathbb{R}]$$

- Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x, y, z) = 0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ .

190. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $\varrho : x + 2y + z = 0$

$$[x + 2y + z \pm \sqrt{6} = 0, \text{ body dotyku } T_{1,2} = [\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}]]$$

191. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$ $[x + 4y + 6z \pm 21 = 0, T_{1,2} = [\pm 1, \pm 2, \pm 2]]$

192. Je dána funkce $z = f(x, y)$ v implicitním tvaru $e^z - xyz = e$. Určete $f_x(A)$, $f_y(A)$, kde bod $A = [0, e, 1]$. $[f_x(A) = 1, f_y(A) = 0]$

193. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x + 2y - \ln z + 4 = 0$

a) $x^2 - xy - 8x + \frac{1}{2}z^2 + \frac{11}{2} = 0$. Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch

ve společném bodě $T = [2, -3, 1]$.

$[x + 2y - z + 5 = 0$ je společná tečná rovina]

Úlohy s implicitní funkcí dvou proměnných nejsou v požadavcích zkoušky úrovně Beta.

• Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [x_0, y_0, z_0]$ a má spojité partiální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

b) Vypočítejte derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a určete grad $f(x_0, y_0)$.

c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = 0$).

d) Určete diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v daném bodě $[x_1, y_1]$.

e) Určete derivaci funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru \vec{u} . Napište směr \vec{s} , ve kterém funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru \vec{s} .

194. $F(x, y, z) = 2x^3yz - x + y^3 + z^3 - 2 = 0$, $A = [1, 2, -1]$, $[x_1, y_1] = [0.9, 2.1]$, $\vec{u} = (2, 4)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x^2yz - 1}{2x^3y + 3z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^3z + 3y^2}{2x^3y + 3z^2}, \quad \text{grad } f(1, 2) = \left(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}\right) \\ \text{c) } \tau: 13x - 10y - 7z = 0, \quad n: [x, y, z] = [1, 2, -1] + t(13, -10, -7), \quad t \in \mathbb{R} \\ \text{d) } df(A) = \frac{13}{7}(x-1) - \frac{10}{7}(y-2), \quad f(0.9, 2.1) \doteq -\frac{93}{70} \doteq -1.328 \\ \text{e) } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \vec{s} = (-13, 10), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 2) = -\frac{\sqrt{269}}{7} \end{array} \right]$$

195. $F(x, y, z) = x^3 + 3xy^2z + 2yz^3 = 0$, $A = [1, -1, -1]$, $[x_1, y_1] = [0.9, -1.1]$, $\vec{u} = (1, -2)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 3y^2z}{3xy^2 + 6yz^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6xyz + 2z^3}{3xy^2 + 6yz^2}, \quad \text{grad } f(1, -1) = \left(0, \frac{4}{3}\right) \\ \text{c) } \tau: 4y - 3z + 1 = 0, \quad n: [x, y, z] = [1, -1, -1] + t(0, 4, -3), \quad t \in \mathbb{R} \\ \text{d) } df(A) = \frac{4}{3}(y+1), \quad f(0.9, -1.1) \doteq -1.13 \\ \text{e) } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1) = -\frac{8}{3\sqrt{5}}, \quad \vec{s} = \left(0, -\frac{4}{3}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, -1) = -\frac{4}{3} \end{array} \right]$$

196. $F(x, y, z) = ze^{x+y} - xy + z^2 - 6 = 0$, $A = [0, 0, 2]$, $[x_1, y_1] = [-0.2, 0.1]$, $\vec{u} = (-1, -1)$

$$\left[\begin{array}{l} \text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{ze^{x+y} - y}{e^{x+y} + 2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{ze^{x+y} - x}{e^{x+y} + 2z}, \quad \text{grad } f(0, 0) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right) \\ \text{c) } \tau: 2x + 2y + 5z = 10, \quad n: [x, y, z] = [0, 0, 2] + t(2, 2, 5), \quad t \in \mathbb{R} \\ \text{d) } df(A) = -\frac{2}{5}(x-0) - \frac{2}{5}(y-0), \quad f(-0.2, 0.1) \doteq 2.04 \\ \text{e) } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \frac{2}{5}\sqrt{2}, \quad f \text{ je rostoucí, sklon přibližně } 30^\circ \\ \vec{s} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = -\frac{\sqrt{8}}{5} \end{array} \right]$$