Funkce jedné prom. $y = f(x)$ definovaná implicitně zadanou rovnicí $F(x, y) = 0$.
(krátce: implicitní funkce)

Věta 7.2

Nechť 1. $F(x_0, y_0) = 0$

2. Derivace F_x, F_y jsou spojité v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

a jediná fce $y = f(x)$ taková, že

1. $f(x_0) = y_0$ a pro $\forall x \in U(x_0)$ je

$F(x, f(x)) = 0$

2. funkce f, f' jsou spojité v okolí $U(x_0)$,

3. pro každé $x \in U(x_0)$ existuje derivace

$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$, kde $y = f(x)$.

Dodatek. Má-li fce F v okolí $U(x_0, y_0)$ spojité PD až do řádu k, pak i implicitní funkce $y = f(x)$ má spojité derivace do řádu k.

Příklad. IF 5

a) Rovnicí

$F(x, y) = x^3 + y^4 - \sin y - 8 = 0$

je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojité derivace $f'(x), f''(x)$ (v okolí bodu $x_0 = 2$).

b) Hodnoty derivací $f'(2), f''(2)$.

c) Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[2, 0]$.

d) Taylorův polynom $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 2$.

e) Pomocí rovnice tečny a pomocí $T_2(x)$ vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = 1.9$.

Varianty zadání

d) Rovnice normály

e) Je funkce f konvexní nebo konkávní v okolí bodu x_0?

Načrtněte tvar grafu funkce f.

f) Extrém funkce f v bodě x_0 ?

Funkce dvou prom. $z = f(x, y)$ implicitně definovaná zadanou rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ (krátce: implicitní funkce)

Věta 7.5

Nechť 1. $F(A) = 0$

2. Derivace F_x, F_y, F_z jsou spojité v okolí $U(A)$.

3. $F_z(A) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U(x_0, y_0)$ a jednoznačně určená fce $z = f(x, y)$ taková, že

1. $f(x_0, y_0) = z_0, F(x, y, f(x, y)) = 0$ v $U(x_0, y_0)$,

2. funkce f a derivace f_x, f_y jsou spojité v $U(x_0, y_0)$,

3. pro každé $[x, y] \in U(x_0, y_0)$ existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$.

Derivace na levých stranách jsou v bodě $[x, y]$, na pravých stranách v bodě $[x, y, f(x, y)]$.

Příklad. Ověřte, že rovnicí

$$\boldsymbol{F(x, y, z) = x + y^2 + z^3 + x^2yz - 4 = 0}$$

je v okolí bodu $A = [1, -2, 1]$ implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, která má spojité PD v okolí bodu $[1, -2]$.

Proveďte potřebné výpočty a uveďte vše,
co víte o implicitní funkci f v bodě $[1, -2]$:
PD, gradient, geometrický význam,
tečná rovina, diferenciál,
přibl. výpočet hodnoty $f(1.1, -2.1)$,
derivace ve směru $\overrightarrow{s} = (1, -1)$.

Příklad. Určete tečnou rovinu k ploše

$$\boldsymbol{z^3 + 3x^2z - 2xy = 0}$$

v bodě $A = [-1, -2, 1]$.

Výsledek: $\boldsymbol{x - y - 3z = -2}$