

Funkce **jedné prom.**  $y = f(x)$  definovaná implicitně zadanou rovnicí  $F(x, y) = 0$ .  
(krátce: **implicitní funkce**)

## Věta 7.2

**Nechť 1.**  $F(x_0, y_0) = 0$

**2.** Derivace  $F_x, F_y$  jsou spojité v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ .

**3.**  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

**Potom existuje okolí**  $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

**a jediná fce**  $y = f(x)$  taková, že

**1.**  $f(x_0) = y_0$  a pro  $\forall x \in U(x_0)$  je

$$F(x, f(x)) = 0$$

**2.** funkce  $f, f'$  jsou spojité v okolí  $U(x_0)$ ,

**3.** pro každé  $x \in U(x_0)$  existuje derivace

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \text{ kde } y = f(x).$$

**Dodatek.** Má-li fce  $F$  v okolí  $U(x_0, y_0)$  spojité

PD až do řádu  $k$ , pak i implicitní funkce

$y = f(x)$  má spojité derivace do řádu  $k$ .

## Příklad.

a) Rovnicí

$$F(x, y) = x^3 + y^4 - \sin y - 8 = 0$$

je v okolí bodu  $[x_0, y_0] = [2, 0]$  implicitně určena funkce  $y = f(x)$ , která má spojité derivace  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  (v okolí bodu  $x_0 = 2$ ).

b) Hodnoty derivací  $f'(2)$ ,  $f''(2)$ .

c) Rovnice tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[2, 0]$ .

d) Taylorův polynom  $T_2(x)$  funkce  $f$  se středem v bodě  $x_0 = 2$ .

e) Pomocí rovnice tečny a pomocí  $T_2(x)$  vypočítejte přibližně hodnotu funkce  $f$  v bodě  $x = 1.9$ .

## Varianty zadání

d) Rovnice normály

e) Je funkce  $f$  konvexní nebo konkávní v okolí bodu  $x_0$ ?

Načrtněte tvar grafu funkce  $f$ .

f) Extrém funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ?

Funkce **dvou prom.**  $z = f(x, y)$  implicitně definovaná zadanou rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  v okolí bodu  $A = [x_0, y_0, z_0]$  (krátce: **implicitní funkce**)

## **Věta 7.5**

**Nechť** 1.  $F(A) = 0$

2. Derivace  $F_x, F_y, F_z$  jsou spojité v okolí  $U(A)$ .

3.  $F_z(A) \neq 0$ .

**Potom existuje okolí  $U(x_0, y_0)$  a jednoznačně určená fce  $z = f(x, y)$  taková, že**

1.  $f(x_0, y_0) = z_0, F(x, y, f(x, y)) = 0$  v  $U(x_0, y_0)$ ,

2. funkce  $f$  a derivace  $f_x, f_y$  jsou spojité v  $U(x_0, y_0)$ ,

3. pro každé  $[x, y] \in U(x_0, y_0)$  existují parciální

derivace  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ .

Derivace na levých stranách jsou v bodě  $[x, y]$ ,  
na pravých stranách v bodě  $[x, y, f(x, y)]$ .

**Příklad.** Ověřte, že rovnicí

$$F(x, y, z) = x + y^2 + z^3 + x^2yz - 4 = 0$$

je v okolí bodu  $A = [1, -2, 1]$  implicitně určena funkce  $z = f(x, y)$ , která má spojité PD v okolí bodu  $[1, -2]$ .

Proveďte potřebné výpočty a uveďte vše, co víte o implicitní funkci  $f$  v bodě  $[1, -2]$ : PD, gradient, geometrický význam, tečná rovina, diferenciál, přibl. výpočet hodnoty  $f(1.1, -2.1)$ , derivace ve směru  $\vec{s} = (1, -1)$ .

**Příklad.** Určete tečnou rovinu k ploše

$$z^3 + 3x^2z + 2xy = 0$$

v bodě  $A = [1, -2, 1]$ .

Výsledek:  $x + y + 3z - 2 = 0$