Implicitní funkce

Funkce jedné prom. $y = f(x)$ definovaná implicitně zadanou rovnicí $F(x, y) = 0$. (krátce: implicitní funkce)

Věta 7.2

Nechť 1. $F(x_0, y_0) = 0$

2. Derivace F_x, F_y jsou spojité v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U(x_0)$ a jediná fce $y = f(x)$ taková, že

1. $f(x_0) = y_0$ a pro $\forall x \in U(x_0)$ je $F(x, f(x)) = 0$

2. funkce f, f' jsou spojité v okolí $U(x_0)$,

3. pro každé $x \in U(x_0)$ existuje derivace $\boldsymbol{y' = f'(x) = -\dfrac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}}$,

kde $y = f(x)$.

Dodatek. Má-li fce F v okolí $U(x_0, y_0)$ spojité PD až do řádu k, pak implicitní funkce $y = f(x)$ má též spojité derivace do řádu k.

Výpočet derivací $y' = f'(x),\ y'' = f''(x)$

V textu ”Implicitní funkce-výpočet 2.derivace stručný přehled”na web stránce Matematika II – Literatura - Sbírka příkladů z MAT II jsou tři postupy.

V postupech č. 1. a 2. je nutná znalost toho, že **při derivování podle** x **není** y **konstantní, ale naopak** $y = y(x)$ je funkce proměnné x.

1. Derivujeme 1. derivaci $\boldsymbol{y' = f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$

2. Přímo (dvakrát) derivujeme rovnici $F(x, y) = 0$.

Tyto postupy lze zkombinovat, tj. 1. derivaci podle vzorce $y' = -F_x/F_y$ (je obsažen už v základní větě o existenci) a pak 2. derivace přímým derivováním rovnice $F_y \cdot y' = -F_x$.

3. Vzorec (J. Neustupa)

$$\boldsymbol{y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}\,(F_y)^2 - 2F_{xy}\,F_x\,F_y + F_{yy}\,(F_x)^2}{(F_y)^3}}$$

v němž jsou **pouze parciální derivace zadané funkce F.**

Př. 1.

a) Rovnicí

$$\boldsymbol{F(x,y) = x^3 + y^4 - \sin y - 8 = 0}$$

je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$ (v okolí bodu $x_0 = 2$). Ověřte !

b) Hodnoty derivací $f'(2)$, $f''(2)$.

c) Monotónie funkce f v okolí bodu x_0.

d) Taylorův polynom $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 2$.

e) Přibližná hodnota funkce f v bodě $x = 1.9$ pomocí $T_2(x)$.

Varianty zadání

c) Rovnice tečny a normály ke grafu funkce f

d) Je funkce f konvexní nebo konkávní v okolí bodu x_0?

Tvar grafu funkce f.

e) Extrém funkce f v bodě x_0 ?

f*) Body $[x, y]$, ve kterých nejsou splněny postačující podmínky pro existenci implicitní funkce.

Př. 2. a) Ověřte, že rovnicí

$$\boldsymbol{F(x,y) = x^2 + 3x^2y - 10y^2 - 6x + 6 = 0}$$

je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0] = [2, 1]$ a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu $x_0 = 2$.

b) Určete hodnotu derivace $f'(1)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[2, 1]$. Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu $f(2.2)$.

c) Určete 2. derivaci $f''(2)$. Je funkce f konvexní nebo konkávní v okolí bodu $x_0 = 2$? Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Funkce dvou prom.$z = f(x,y)$ implicitně definovaná zadanou rovnicí $\boldsymbol{F(x,y,z) = 0}$ v okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ (krátce: implicitní funkce)

Věta 7.5

Nechť 1. $F(A) = 0$

2. Derivace $\boldsymbol{F_x}, \boldsymbol{F_y}, \boldsymbol{F_z}$ jsou spojité v okolí $U(A)$.

3. $F_z(A) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U(x_0, y_0)$ a jednoznačně určená fce $z = f(x,y)$ taková, že

1.$\boldsymbol{f(x_0, y_0) = z_0, F(x, y, f(x,y)) = 0}$ v $U(x_0, y_0)$,

2. funkce f a derivace $\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f_y}$ jsou spojité v $U(x_0, y_0)$,

3. pro každé $[x,y] \in U(x_0, y_0)$ existují parciální

derivace $\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}}, \quad \boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}}.$

Derivace na levých stranách jsou v bodě $[x,y]$, na pravých stranách v bodě $[x, y, f(x,y)]$.

Př. 2. Určete tečnou rovinu k ploše

$\boldsymbol{z^3 + 3x^2z + 2xy = 0}$ v bodě $A = [1, -2, 1]$.
Výsledek: $\boldsymbol{x + y + 3z - 2 = 0}$

Př. 3. Ověřte, že rovnicí $\boldsymbol{F(x, y, z) = x + y^2 + z^3 + x^2yz - 4 = 0}$ je v okolí bodu $A = [1, -2, 1]$ implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, která má spojité PD v okolí bodu $[1, -2]$.

Proveďte potřebné výpočty a **uveďte vše,** co víte o implicitní funkci f v bodě $[1, -2]$:

a) PD, gradient, geometrický význam,

b) směr v němž funkce f nejrychleji roste (klesá), derivace v tomto směru

c) tečná rovina, diferenciál, rovnice normály

d) přibl. výpočet hodnoty $f(1.1, -2.1)$,

e) derivace ve směru $\overrightarrow{s} = (1,\ -1)$.