

## Integrace racionální funkce ( pracovní text )

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )

Jedná se o integrály  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , kde  $P, Q$  jsou dané polynomy, stupeň ( $P$ ) < stupeň ( $Q$ ).

Stručný přehled možných situací je popsán v textu [3] na webové stránce Kombinované studium takto:

- I. Speciální případy, které řešíme vhodnou substitucí,
- II. st ( $Q$ ) = 2, tj. kvadratický polynom ve jmenovateli,
- III. st ( $Q$ ) = 3, tj. kubický polynom ve jmenovateli (ve zkoušce Alfa).

**Ia.** Speciální případ: **Integrál má tvar**  $\int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx$ .

Použijeme substituci  $Q(x) = t$ ,  $Q'(x) dx = dt$ .

$$\boxed{\text{Př. 1.}} \int \frac{x^3}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{4} \ln |x^4 - 16| + C.$$

Platí pro  $x \neq \pm 2$ , tj. na intervalech  $I_1 = (-\infty, -2)$ ,  $I_2 = (-2, 2)$ ,  $I_3 = (2, \infty)$ .

**Ib.** Speciální případ: **Integrál má tvar**  $\int \frac{\text{konst}}{(ax + b)^n} dx$ .

Použijeme substituci  $ax + b = t$ ,  $a dx = dt$ .

$$\boxed{\text{Př. 2.}} \int \frac{5}{(x + 5)^4} dx = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(x + 5)^3} + C.$$

Platí pro  $x \neq -5$ , tj. na intervalech  $I_1 = (-\infty, -5)$ ,  $I_2 = (-5, \infty)$ .

**II.** Stupeň polynomu  $Q$  je dva, tj. kvadratický polynom ve jmenovateli. Předpokládejme, že koeficient u nejvyšší mocniny je roven 1. V závislosti na diskriminantu  $D$  kvadratické rovnice  $Q(x) = 0$  nastane právě jeden ze tří případů:

**II.a.**  $D > 0$ , tj. rovnice  $Q(x) = 0$  má dva různé reálné kořeny  $\alpha, \beta$ .

Lze tedy rozložit polynom  $Q(x)$  na kořenové činitele:  $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ . Tím je pak umožněn rozklad integrované funkce na součet tzv. parciálních zlomků ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

Určíme konstanty  $A, B$  a parciální zlomky integrujeme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln |x - \alpha| + B \ln |x - \beta| + C, \quad x \neq \alpha, x \neq \beta.$$

Celý postup ještě ukážeme na příkladu.

$$\boxed{\text{Př. 3.}} \int \frac{1}{x^2 + x} dx$$

Řešení: Rovnice  $Q(x) = x^2 + x = x(x + 1) = 0$  má dva různé reálné kořeny  $\alpha = 0, \beta = -1$ . Definiční obor  $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . V každém z těchto intervalů je tedy integrovaná funkce spojitá, takže k ní existuje funkce primitivní a neurčitý integrál. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků. Ten má tvar se dvěma neznámými  $A, B$ :

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem  $x(x + 1)$  získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů:  $1 = A(x + 1) + Bx$ .

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např.  $x := -1$ , resp.  $x := 0$  určíme, že  $A = 1, B = -1$ .

$$\text{Je tedy } \int \frac{1}{x^2 + x} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Po úpravě výrazů s logaritmy lze vypočítanou primitivní funkci napsat ve tvaru  $F(x) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$ .

**II.b.**  $D = 0$ , tj. rovnice  $Q(x) = 0$  má jeden (dvojnásobný) reálný kořen  $\alpha$ .

Lze tedy rozložit polynom  $Q(x)$  takto:  $Q(x) = (x-\alpha)^2$ . Tím je pak umožněn rozklad integrované funkce na součet parciálních zlomků ve tvaru, v němž druhý zlomek má ve jmenovateli druhou mocninu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Určíme konstanty  $A, B$  a parciální zlomky integrujeme:

$$\boxed{\text{Př. 4.}} \int \frac{x+3}{x^2-2x+1} dx$$

Řešení: Rovnice  $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$  má dvojnásobný reálný kořen  $\alpha = 1$ . Definiční obor  $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ . Primitivní funkce a neurčitý integrál tedy existují na intervalech  $I_1 = (-\infty, 1), I_2 = (1, +\infty)$ , neboť v nich je integrovaná funkce spojitá. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků se dvěma neznámými  $A, B$ :

$$\frac{x+3}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem  $(x-1)^2$  získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů:  $x+3 = A(x-1) + B$ .

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např.  $x := 1$ , resp.  $x := 0$  určíme, že  $A = 1, B = 4$ .

$$\text{Je tedy } \int \frac{x+3}{x^2-2x+1} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C.$$

**II.c.**  $D < 0$ , tj. rovnice  $Q(x) = 0$  má dva komplexně sdružené kořeny  $a \pm bi$ .

Polynom  $Q(x)$  je v tomto případě nerozložitelný v množině reálných čísel a integrovanou funkci nelze vyjádřit jako součet parciálních zlomků.

Má-li integrovaná funkce tvar  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{konst}}{ax^2+bx+c}$ , pak po vhodné úpravě a následné substituci získáme tabulkový integrál  $\int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctg t + C$ .

$$\boxed{\text{Př. 5.}} \int \frac{dx}{x^2+8} = \int \frac{dx}{8(x^2/8+1)} = \left\{ \text{subst. : } x/\sqrt{8} = t, dx = \sqrt{8} dt \right\} = \frac{\sqrt{8}}{8} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg t = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg \frac{x}{\sqrt{8}} + C, x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{Př. 6.}} \int \frac{dx}{9x^2+1} = \int \frac{dx}{(3x)^2+1} = \left\{ \text{subst. : } 3x = t, 3 dx = dt \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{3} \arctg t = \frac{1}{3} \arctg 3x + C, x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{Př. 7.}} \int \frac{5}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{5}{(x-2)^2+1} dx = \left\{ \text{subst. : } x-2 = t, dx = dt \right\} = \int \frac{5}{t^2+1} dt = 5 \arctg t = 5 \arctg (x-2) + C, x \in \mathbb{R}$$

Je-li polynom  $P(x)$  v čitateli lineární, pak ho nejprve upravíme, aby se rovnal derivaci polynomu  $Q(x)$ . Výraz v čitateli pak doplníme, aby zůstala zachována rovnost. Novou racionální funkci napíšeme ve tvaru součtu dvou racionálních funkcí a pak integrujeme.

$$\boxed{\text{Př. 8.}} \int \frac{4x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx = 2 \ln |x^2 + 6x + 13| + K \operatorname{arctg} \frac{x + 3}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Upozornění:** Následující úlohy předpokládají znalost integrace racionální funkce s polynomem stupně 3 ve jmenovateli, která je v požadavcích ke zkoušce Alfa. Stručný přehled je v textu [3]. V níže uvedené Sbírce [2] jsou v odstavci III.4 řešené příklady pro všechny možnosti této zmíněné typové úlohy integrace.

$$\boxed{\text{Př. 9. Alfa}} \int \frac{16x + 20}{(x - 4)(x + 3)(x - 1)} dx = -\infty.$$

V tomto příkladu se jedná o tři reálné různé kořeny a tedy následující rozklad na součet parciálních zlomků.

$$\frac{16x + 20}{(x - 4)(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} = \frac{4}{x - 4} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{-3}{x - 1}.$$

$$\boxed{\text{Př. 10. Alfa}} \int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = -3 + \ln 9.$$

V tomto příkladu se jedná o dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný. Rozklad na součet parciálních zlomků vede k následujícímu vyjádření dané funkce:

$$\frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x - 2} + \frac{-3}{(x - 2)^2}.$$

Další příklady, řešené i neřešené, jsou ve Sbírce [2].

#### Literatura:

- [1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
- [2] S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
- [3] F. Mráz: Integrace racionálních funkcí (stručné prezentace z přednášek). Webová stránka předmětu Matematika I, odkaz Kombinované studium.