

III. Křivkové integrály

1. Jednoduchá křivka v \mathbb{E}_2 , v \mathbb{E}_3

Parametrizace, orientace

2. Křivkový integrál skalární funkce $\int_C f \, ds$

(délka, hmotnost, těžiště, momenty ...)

3. Křivkový integrál vektorové funkce

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ (práce vykonaná silou \vec{f} po křivce C)

4. Greenova věta

výpočet cirkulace $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pomocí dvojného integrálu $\int \int_{IntC}$

5. Potenciální vektorové pole

(nevířivé, konzervativní)

III.1 Jednoduché křivky

Definice. Jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_3 (v \mathbb{E}_2) je množina bodů $X = P(t)$, kde P je zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle$ do \mathbb{E}_3 (do \mathbb{E}_2) popsané vztahy

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$ přičemž platí
1. Zobrazení P je spojitě a prostě v $\langle a, b \rangle$ s možností $P(a) = P(b)$ (tzv. **uzavřená křivka**).

2. Derivace $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ je spojitá, omezená a nenulová v (a, b) .

Zobrazení P se nazývá **parametrizace křivky**.

Křivky značíme např. C, C_1, c, k, K, \dots

Jednoduchá po částech hladká křivka $C = \cup C_i$, kde C_i jsou JHK

Křivka - fyzikální interpretace

JHK je trajektorie, kterou proběhne pohybující se bod $\mathbf{X} = \mathbf{P}(t)$ v \mathbb{E}_2 (v \mathbb{E}_3) v časovém intervalu $\langle a, b \rangle$

Vlastnosti z definice znamenají:

1. Trajektorie není přerušovaná, žádným bodem neprochází dvakrát
2. Rychlost se mění spojitě, je omezená a nenulová

Znát parametrizaci křivek:

1. C je úsečka v \mathbb{E}_2 , v \mathbb{E}_3
2. C je kružnice, elipsa, šroubovice
3. C je graf funkce jedné proměnné $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$
nebo $x = g(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$
4. C je průnik ploch v \mathbb{E}_3 (pouze v Alfa)

III.2 Křivkový integrál skalární funkce (křivkový integrál 1. druhu)

$$\int_C f(x, y) ds, \text{ resp. } \int_C f(x, y, z) ds, \text{ stručně } \int_C f ds$$

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenní struny (drátu) tvaru JHK

Definice.

Nechť C je JHK v \mathbb{E}_2 (v \mathbb{E}_3) s parametrizací P v $\langle a, b \rangle$.

Funkce f se nazývá **integrovatelná na křivce C** , jestliže existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(P(t)) \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Značíme $\int_C f ds$ a nazýváme **křivkovým integrálem skalární funkce f na křivce C**

Poznámka: Existence a hodnota nezávisí na volbě parametrizace P .

Existence křivkového integrálu skalární funkce:

1. Nutná podm.: f je omezená na křivce C

2. Postačující podm.: Fce f je spojitá na křivce C

Slabší požadavek:

Fce f je spojitá a omezená na $(C - M)$, kde M je konečná mn.

Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

délka křivky, hmotnost, moment setrvačnosti, statický moment, těžiště
viz obecné vzorce pro všechny integrály

Př. 1. Křivka C je úsečka AB , kde $A = [1, 4]$, $B = [2, 2]$. Navrhněte parametrizaci křivky C a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Př. 2. Načrtněte křivku $C : y = \sqrt{x^5}$ mezi body $A = [0, ?]$, $B = [2, ?]$. Navrhněte parametrizaci. Vypočítejte hmotnost struny tvaru této křivky, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2$. $[8(51\sqrt{51} - 1)/225]$

Úloha navíc (v př. 1 a 2): Co jiného by mohl výsledek vyjadřovat ?

Př. 3. Vypočítejte délku jednoho závitu šroubovice s parametrizací $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = t/10$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, výsl. $[\sqrt{901} \pi/5]$

Př. 4. Navrhněte parametrizaci křivky (průnik válcové plochy a roviny) $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 4x^2 + 9y^2 = 36, 2z - \sqrt{5} y = 0\}$.

Vypočítejte křivkové integrály a) $\int_C (xy + 1) ds$ výsl. $[6\pi]$

b) $\int_C y^2 ds$ výsl. $[12\pi]$ c) $\int_C (4x^2 + 9y^2) ds$ výsl. $[216\pi]$

vhodná parametrizace: $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = \sqrt{5} \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

III.3 Křivkový integrál vektorové funkce (integrál 2. druhu)

značíme $\int_C \vec{f}(X) \cdot d\vec{s}$, stručně $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$

Orientovaná JHK. Tečný vektor

Vektorová funkce (vektorové pole) \vec{f} v \mathbb{E}_2

je funkce dvou proměnných x, y se souřadnicovými funkcemi U, V :

$$\vec{f}(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$$

stručný zápis: $\vec{f} = (U, V)$

Vektorová funkce \vec{f} v \mathbb{E}_3 je funkce tří proměnných x, y, z

stručný zápis: $\vec{f} = (U, V, W)$ nebo $\vec{f} = U \vec{i} + V \vec{j} + W \vec{k}$

Definice.

Křivkový integrál vekt. funkce je definován hodnotou křivk. integrálu skalární funkce:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) ds,$$

podrobněji

$$\int_C \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{f}(X) \cdot \vec{\tau}(X) ds,$$

kde $\vec{\tau}(X)$ je tečný vektor ke křivce C v bodě $X = [x, y, z]$

resp. $X = [x, y]$.

Aplikace: práce vykonaná (spotřebovaná) silou \vec{f} při pohybu po křivce C ve směru zadané orientace.

Výpočet:
$$\int_C \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt,$$

kde $X = P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ je parametrické vyjádření křivky C .

Znaménko **mínus** napravo platí, je-li křivka C orientována **nesouhlasně** s parametrizací P .

Křivkový integrál vektorové funkce po uzavřené křivce C se nazývá **cirkulace vektorového pole** \vec{f} po křivce C , zapisujeme $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Další možnosti výpočtu

2. Využití jiného zápisu integrálu (tvar v diferenciálech)

$$\int_C \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \int_C U dx + V dy + W dz$$

3. Pomocí **Greenovy věty**: (pouze pro **UZAVŘENOU** křivku v \mathbb{E}_2)

křivkový integrál \oint_C převedeme na dvojný integrál $\int \int_{IntC}$

4. Pomocí **potenciálu** v \mathbb{E}_2 , v \mathbb{E}_3

to však **pouze pro POTENCIÁLNÍ** vektorové pole

Příklady Určete práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (U, V)$ po orientované křivce C

1. $\vec{f} = (1, 2y)$, křivka C je část grafu $x = y^2$ s počát. bodem $L = [4, 2]$ a koncovým bodem $M = [1, 1]$. [Výsl. $A = -6$]
2. $\vec{f} = (x^2, y^2)$, křivka C je úsečka AB , od $A = [0, 1]$ do $B = [-2, 2]$. [Výsl. $A = -1/3$]
3. $\vec{f} = (x^2, x^2y)$, křivka C je část grafu $y = 1/x$ od bodu $[1, ?]$ do bodu $M = [2, ?]$. [Výsl. $A = 7/3 - \ln 2$]
4. $\vec{f} = (y^2, -xy)$,
 - a) $C: x^2 + y^2 = 9, y \geq 0$ s počát. bodem $[-3, 0]$.
 - b) C je záporně orientovaná kružnice: $x^2 + y^2 = 9$.
 - c) C je kladně orientovaná kružnice: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Věta Greenova.

Nechť 1. Souřadnicové funkce U, V vektorového pole \vec{f} mají **spojité parc. derivace** v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$.

2. C je kladně orientovaná **uzavřená křivka**, která leží i se svým vnitřkem $\text{Int } C$ v oblasti O .

Pak platí

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Int}C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy$$

!!! Poznámka: Je-li křivka **orientována záporně**, pak napravo přidáme **znaménko mínus**.

Poznámka. "Křivka" zde znamená: Jednoduchá **po částech hladká**

Předpoklady stručně:

Kladně (záporně) orientovaná uzavřená křivka C leží i se svým vnitřkem $\text{Int } C$ v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$, ve které jsou spojité PD vektorového pole $\vec{f} = (U, V)$.

Poznámka: Předpoklady vyžadují, aby se vše "odehrávalo" v oblasti, v níž má dané vekt. pole spojité PD.

Otázka: Kdy nelze Greenovu větu použít ?