IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = \Big[x(t), y(t), z(t)\Big]$ *je zobrazení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *do* $\mathbb{E}_3$. *Platí-li :*

1) $P(t)$ *je spojité a je prosté na* $\langle a, b\rangle$
(k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek $x(t)$*,* $y(t)$*,* $z(t)$ *byla ryze monotónní na* $\langle a, b\rangle$*),*

2) derivace $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t), \dot{z}\,(t)\Big)$ *je omezené a spojité zobrazení na* (a, b)*,*

3) $\dot{\mathbf{P}}\,(t) \neq \vec{0}$ *pro všechna* $t \in (a, b)$*,*

potom množinu $c = \{X \in \mathbb{E}_3;\ X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle\}$ *nazveme* ***jednoduchou hladkou křivkou*** *v* $\mathbb{E}_3$ *a zobrazení* P *její* ***parametrizací.***
Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v E_2*.*
Řekneme, že křivka c *je* ***orientována souhlasně****, resp.* ***nesouhlasně****, s parametrizací* P*, jestliže počáteční bod této křivky je* $P(a)$*, resp.* $P(b)$*.*
Křivku c *v* $\mathbb{E}_3$ *(též v* $\mathbb{E}_2$ *) lze orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru* $\vec{\tau}$ *v bodě* $P(t)$*. Je-li* $\vec{\tau} = \dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je souhlasně orientována s parametrizací* P*. Je-li* $\vec{\tau} = -\dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je nesouhlasně orientována s parametrizací* P*.*

Poznámka : Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je ”proti směru pohybu hodinových ručiček ”, resp. ”ve směru pohybu hodinových ručiček.”

***Příklad* 424**. Je dána křivka $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^2, x \in \langle -4, 4\rangle\}$ s počátečním bodem $A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = \Big[x(t), y(t)\Big]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c, jestliže
a) $P(t) = [t, t^2]$, $\quad t \in \langle -4, 4\rangle$, $\quad$ b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $\quad t \in \langle -2, 2\rangle$,
c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $\quad t \in \langle 0, 16\rangle$.

Řešení:

a) $P(t) = [t, t^2], t \in \langle -4, 4\rangle$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c. Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.

b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in \langle -2, 2\rangle$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c. Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x-ovou souřadnici $-4 < 0$.

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in \langle 0, 16\rangle$ není parametrizací dané křivky, protože opět $x = \sqrt{t} \geq 0$. Kromě toho $\dot{\mathbf{P}}(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, 1\right)$ není omezená na $(0, 16)$.

■

***Příklad* 425**. Je dána půlkružnice $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže a) $P(t) = [a\cos t, a\sin t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$,
b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in \langle -a, a\rangle$, c) $P(t) = \left[\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right], t \in \mathbb{R}$.

Řešení:
a) Ano, $P(t)$ je parametrizací , protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.
b) Není parametrizací, protože $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(1, \dfrac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right)$ není omezená na $(-a, a)$.
c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{a}{1+t^2} = 0 \Longrightarrow$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{\mathbf{P}}\,(t)$.
Protože je $\dot{x}\,(t) = \dfrac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t, je funkce $x(t)$ monotónní a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t)\Big) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0.$$

■

• Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci :

***Příklad* 426**. Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2)$, $c : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Úsečku AB obdržíme pro $t \in \langle 0, 1\rangle$,
bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací.

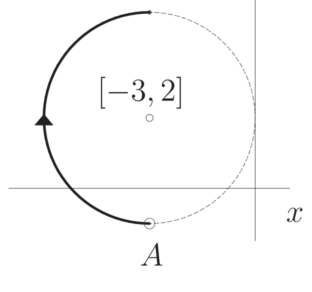
■

***Příklad* 427**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9,\ x \leq -3\}$, $A = [-3, -1]$

Řešení:

$P(t) : \begin{cases} x = -3 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}$, $t \in \langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\rangle$,

orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $P(\pi/2) \neq A$



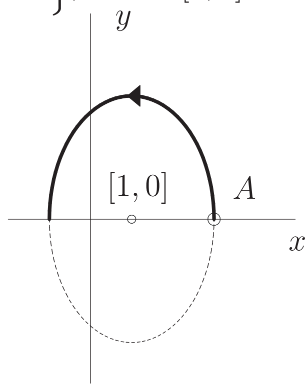
■

***Příklad* 428**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y \geq 0\right\}$, $A = [3,0]$

Řešení:

$$P(t):\quad \begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases},\quad t \in \langle 0, \pi\rangle,$$

orientace křivky je souhlasná s parametrizací, protože $P(0) = A$.



■

***Příklad* 429**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4x,\ y + z = 0,\ z \geq 0\}$, $A = [0,0,0]$

Řešení: Křivka c je řezem válcové plochy $x^2 + y^2 = 4x$ rovinou $y + z = 0$.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4, z = -y, z \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$P(t):\quad \begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = -2\sin t \quad \Longrightarrow -2\sin t \geq 0 \Longrightarrow \sin t \leq 0 \Longrightarrow t \in \langle \pi, 2\pi\rangle \end{cases}$$

$$A = [0,0,0] \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} 2 + 2\cos t = 0 & \Longrightarrow & \cos t = -1 \\ \sin t = 0 & \Longrightarrow & \sin t = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad t = \pi$$

$P(\pi) = A \quad \Longrightarrow \quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

***Příklad* 430**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x = y,\ x \geq 0\}$, $A = [0,0,-a]$

Řešení: Jde o řez kulové plochy rovinou procházející středem kulové plochy . Použijeme sférické souřadnice , v nichž $r = a, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$; ϑ označíme jako parametr t .

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y &= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z &= a\sin t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Longrightarrow x \geq 0 \Longrightarrow \cos t \geq 0 \Longrightarrow \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ &t = -\frac{\pi}{2} : A = [0,0,-a] \Longrightarrow \text{orientace křivky je} \\ &\qquad\qquad \text{souhlasná s parametrizací.} \end{aligned}$$

■

• Rovinná křivka c je dána v parametrickém tvaru. Najděte její implicitní rovnici a pojmenujte ji :

***Příklad* 431**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2t + 1,\ y = 3 - t,\quad t \in \langle 1, 4\rangle\}$, orientace je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Jde o úsečku s počátečním bodem $A = P(1) = [3,2]$ a koncovým bodem $B = P(4) = [9,-1]$. Vyloučením parametru t obdržíme :

$$t = 3 - y \Longrightarrow \quad x = 2(3-y) + 1 \Longrightarrow \quad x + 2y = 7$$

■

***Příklad* 432**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1,\quad t \in \langle 0, 3\rangle\}$, orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

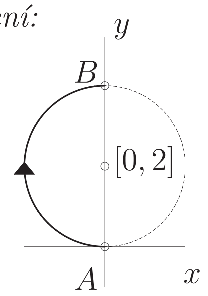
Řešení: Po odečtení dostáváme $x - y = 2$. Opět máme úsečku s počátečním bodem $A = P(3) = [6,4]$ a koncovým $B = P(0) = [3,1]$. ■

***Příklad* 433**. $c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\sin^2 t,\ y = 4\cos^2 t, \quad t \in \big\langle 0, \frac{\pi}{2}\big\rangle\Big\}$,
orientace c je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Sečteme $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4} = \sin^2 t+\cos^2 t \Longrightarrow 2x+y=4$. Znovu máme úsečku s počátečním bodem $A = P(0) = [0,4]$ a koncovým $B = P\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = [2,0]$. ■

***Příklad* 434**.* Křivka c je daná polární rovnicí $r(\varphi) = 4\sin\varphi, \quad \varphi \in \big\langle \frac{\pi}{2}, \pi\big\rangle$,
orientace křivky c je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení:



$$c: \begin{cases} x = r\cos\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = 4\sin^2\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} \text{poč.bod } A = [0,0], (\varphi = \pi) \\ \text{konc.bod } B = [0,4], (\varphi = \pi/2) \end{matrix}$$

$$x^2+y^2 = (4\sin\varphi\cos\varphi)^2 + (4\sin^2\varphi)^2 = 16\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 4\cdot 4\sin^2\varphi = 4y,$$

$$x^2+y^2 = 4y \quad \Longrightarrow x^2+(y-2)^2 = 4 \quad \text{(kružnice)}$$

Tutéž část kružnice jsme mohli parametrizovat i jinak :
$P(t) = [2\cos t, 2+2\sin t],\ t \in \big\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big\rangle$, orientace je nesouhlasná s parametrizací.
■

• Ověřte, že $c = c_1 \cup c_2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Najdětete parametrizace křivek c_1, c_2, nakreslete je a rozhodněte o jejich orientaci, jestliže A je počátečním bodem c_1 a též koncovým bodem c_2 :

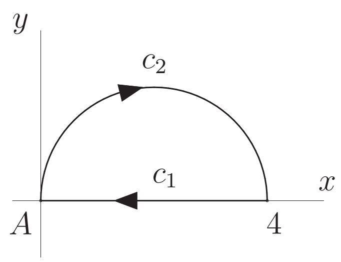
***Příklad* 435**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [0,0]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4x,\ y \geq 0\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0,4\rangle\}$

Řešení:

$$c_1 : (x-2)^2+y^2 = 4 \Longrightarrow P_1 : \begin{cases} x = 2+2\cos t_1 \\ y = 2\sin t_1 \end{cases}$$

$t_1 \in \langle 0,\pi\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací,

$$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} t_2 \in \langle 0,4\rangle, \text{orientace } c \text{ je} \\ \text{nesouhlasná s parametrizací.} \end{matrix}$$



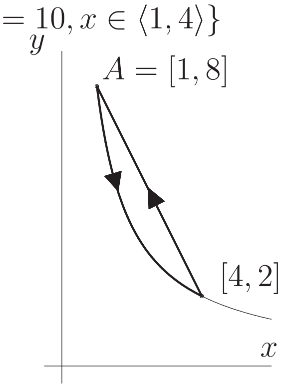
■

***Příklad* 436**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,8]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ xy = 8,\ x \in \langle 1,4\rangle\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y+2x = 10, x \in \langle 1,4\rangle\}$

Řešení:

$$P_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = \dfrac{8}{t_1} \end{cases}, \quad \begin{matrix} t_1 \in \langle 1,4\rangle, \text{orientace } c \text{ je} \\ \text{souhlasná s parametrizací,} \end{matrix}$$

$$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 10-2t_2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} t_2 \in \langle 1,4\rangle, \text{orientace } c \text{ je} \\ \text{nesouhlasná s parametrizací.} \end{matrix}$$



■

437. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,1];\quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \sqrt{x}, x \in \langle 0,1\rangle\};$
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = x^2, x \in \langle 0,1\rangle\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = t_1^1 \\ y = t_1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_1 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \Big|\ P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_2^2 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_2 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

438. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_3,\ A = [3,0,2];\ c_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9,\ x - z = 1,\ y \ge 0\};$
$c_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x - z = 1,\ y = 0\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = 3\cos t_1 \\ y = 3\sin t_1 \\ z = 3\cos t_1 - 1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_1 \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \Big|\ P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \\ z = t_2 - 1 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t_2 \in \langle -3,3\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

• Navrhněte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A :

439. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 3x + y = 1,\ x \in \langle -1,2\rangle\};\quad A = [-1,4]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle -1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

440. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x - y = 2,\ x + z = 3,\ y \in \langle 0,2\rangle;\quad A = [2,2,1]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle 1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

441. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 4x^2 + z^2 = 4,\ y + z = 0,\ y \le 0;\quad A = [-1,0,0]$

$$\left[\ c : \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2\sin t \\ z = 2\sin t \end{cases} \Big|\ \begin{matrix} t \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

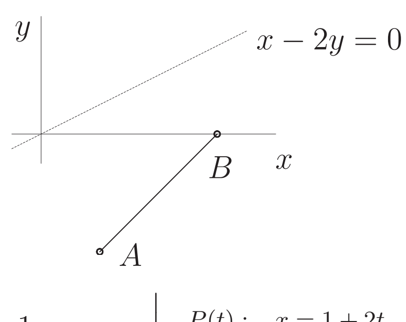
IV.2. Křivkový integrál skalární funkce

• Vyšetřete existenci křivkového integrálu $\displaystyle\int_c f\,ds$ a v kladném případě jej vypočítejte :

***Příklad* 442**. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x-2y}\,ds,\quad c$ je úsečka s krajními body $A,\ B$, kde
a) $A = [1,-2], B = [3,0]$, b) $A = [1,-2], B = [3,4]$.

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2$ s výjimkou přímky $x - 2y = 0$.
V okolí této přímky není funkce f omezená.

a)

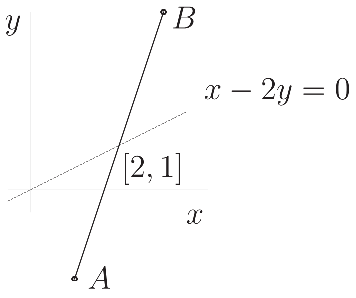


Integrál existuje, protože funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x-2y}$ je na úsečce AB spojitá.

$$\int_c \frac{1}{x-2y}\,ds = \left| \begin{matrix} P(t): & x = 1 + 2t \\ & y = -2 + 2t \\ & t \in \langle 0,1\rangle \end{matrix} \ \Big|\ \begin{matrix} ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \\ = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{4+4}\,dt = 2\sqrt{2}\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\,dt}{1 + 2t - 2(-2+2t)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{5-2t}\,dt = -\sqrt{2}\int_0^1 \frac{-2dt}{5-2t} = -\sqrt{2}\Big[\ln|5-2t|\Big]_0^1 = -\sqrt{2}\cdot(\ln 3 - \ln 5) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\ln\frac{5}{3}.$$

b)



Integrál neexistuje, protože úsečka AB protíná přímku $x - 2y = 0$ v bodě $[2, 1]$ a funkce f není v okolí bodu $[2, 1]$ omezená.

Např.: $\lim \dfrac{1}{x-2y} = +\infty$ je pro $y = 1$, $x \to 2^+$.

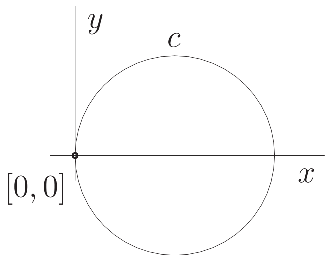
■

Příklad 443. $\displaystyle\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds,$ a) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4x\}$,

b) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4\}$

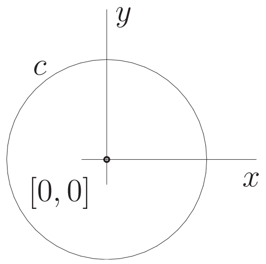
Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2 \setminus \{[0, 0]\}$.

a)



Bod $[0, 0] \in c$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$, takže integrál neexistuje;

b)



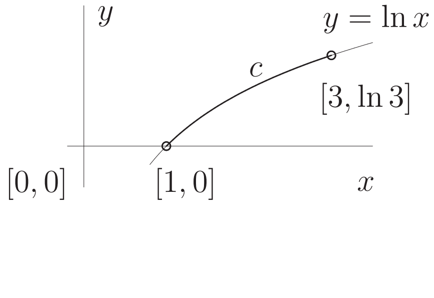
Daná funkce je spojitá na c, takže integrál existuje.

$$\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds =$$
$$= \left|\begin{array}{l} P(t) = [2\cos t, 2\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi) \\ ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{(4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 2\,dt \end{array}\right| =$$
$$= \int_0^1 \frac{2\cos t + 2}{2}\cdot 2\,dt = 2\Big[\sin t + t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

■

Příklad 444. $\displaystyle\int_c x^2\,ds,\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \ln x,\ x \in \langle 1, 3\rangle\}$

Řešení: Je zřejmé, že integrál existuje :



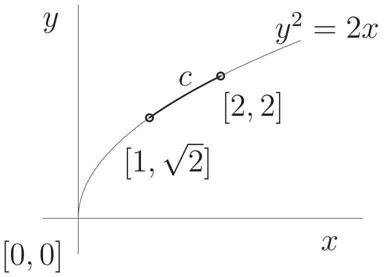
$$\left|\begin{array}{ll} P(t):\ \begin{array}{l} x = t \\ y = \ln t \\ t \in \langle 1, 3\rangle \end{array} & \left|\ \begin{array}{l} ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt \end{array}\right. \end{array}\right|$$

$$\int_c x^2\,ds = \int_1^3 t^2 \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \int_1^3 \sqrt{t^2+1}\cdot t\,dt = \left|\begin{array}{l|l} t^2+1=u & u\in\langle 2,10\rangle \\ 2t\,dt = du & \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[\frac{2u^{3/2}}{3}\Big]_2^{10} = \frac{1}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 445.** $\displaystyle\int_c \frac{x^2}{y}\,ds, \quad c = \big\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y^2 = 2x,\ y\in\langle\sqrt{2},2\rangle\big\}$

Řešení: Integrál existuje :



$$\int_c \frac{x^2}{y}\,ds =$$

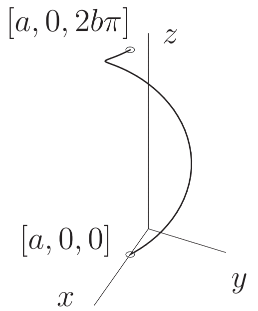
$$= \left|\begin{array}{l|l} P(t):\quad y = t & \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{t^2+1} = \\ \qquad\quad x = \dfrac{t^2}{2} & = \sqrt{1+t^2} \\ \qquad\quad t\in\langle\sqrt{2},2\rangle & ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^4}{4t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^2 t^2\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot t\,dt = \left|\begin{array}{l|l} \sqrt{1+t^2}=u & 2t\,dt = 2u\,du \\ 1+t^2 = u^2 & u\in\langle\sqrt{3},\sqrt{5}\rangle \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (u^2-1)\cdot u\cdot u\,du = \frac{1}{4}\Big[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{30}\,(25\sqrt{5}-6\sqrt{3}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 446.** $\displaystyle\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, c je první závit *šroubovice* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

Řešení:



Integrál existuje :

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \left|\begin{array}{l} P(t) = [a\cos t, a\sin t, bt], \quad t\in\langle 0, 2\pi) \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} \\ ds = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\Big[a^2t + \frac{b^2t^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\Big(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\,b^2\pi^3\Big). \qquad \blacksquare$$

• Zdůvodněte, na které z křivek c existuje integrál $\int_c f\,ds$. Příslušný integrál vypočítejte.

447. $\displaystyle\int_c \frac{3-y}{y-x+2}\,ds$, a) c je kružnice $x^2-2x+y^2 = 0$;

[neexistuje, daná funkce není na křivce C omezená]

b) c je úsečka AB, kde $A = [2,3]$, $B = [0,1]$.

[existuje,daná funkce je na úsečce AB spojitá, $\sqrt{8}/3$]

448. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2+y^2}\,ds$, a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t-3,\ y = 3-t,\ t \in \langle 1,4\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = a^2\}$ $\left[\text{existuje, } \dfrac{2\pi}{a}\right]$

449. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2-y}\,ds$, a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 2x,\ x \in \langle 1,3\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 9,\ x \in \langle 0,2\rangle\}$ $\left[\text{existuje, } -\dfrac{\ln 5}{6}\right]$

450. $\displaystyle\int_c xy\,ds$, $cc = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = a^2,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ $\left[-\dfrac{a^3}{2}\right]$

451. $\displaystyle\int_c \sqrt{2y}\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$

(oblouk cykloidy) $\left[4\pi a\sqrt{a}\right]$

452. $\displaystyle\int_c \sqrt{x}\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \sqrt{x},\ x \in \langle 1,2\rangle\}$ $\left[\dfrac{27-5\sqrt{5}}{12}\right]$

453. $\displaystyle\int_c (xy+2)\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = \cos t,\ y = 3\sin t,\ z = \sqrt{8}\cos t,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$

$[12\,\pi]$

454. $\displaystyle\int_c z\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0,\pi\rangle\}$

(kuželová šroubovice) $\left[\frac{1}{3}\left((2+\pi^2)\sqrt{2+\pi^2}-2\sqrt{2}\right)\right]$

455. $\displaystyle\int_c (x+y)\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ y = x,\ x \ge 0,\ y \ge 0, z \ge 0\}$

(Použijte parametrizaci z příkladu 430.) $\left[t \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,\ a^2\sqrt{2}\right]$

456. $\displaystyle\int_c xyz\,ds$, $c = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = \dfrac{a^2}{4},\ \text{v 1. oktantu}\right\}$

(c leží v rovině $z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pak $x = \frac{a}{2}\cos t,\ y = \frac{a}{2}\sin t$) $\left[\dfrac{a^4\sqrt{3}}{32}\right]$

- Je dána skalární funkce f, křivka c je průnikem daných dvou ploch.
  a) Navrhněte parametrizaci této křivky.
  b) Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
  c) Vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce f.

457. $f(x,y,z) = y^2+2z^2$, křivka c je průsečnicí rovin $x+y+2z = 5,\ 2x+5y-2z = 4$ v prvním oktantu.

[*a)* např. : $x = 7-4t, y = 2t-2, z = t, t \in \langle 1, 7/4\rangle$
b) $\dot{\mathbf{P}}(t) = (-4,2,1)$, $\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{21}$
c) $111\sqrt{21}/32$]

458. $f(x,y,z) = z^2$, křivka c je řez válcové plochy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25} = 1$ a rovinou $4x-3z = 0$.

[*a)* např. : $x = 3\cos t, y = 5\sin t, z = 4\cos t, t \in \langle 0,2\pi\rangle$
b) $\dot{\mathbf{P}}(t) = (-3\sin t, 4\sin t)$, $\|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = 5$
c) 80π]

IV.3. Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

• Vypočítejte délku ℓ křivky c, jestliže :

***Příklad* 459**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 2 - \ln(\cos x), \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\right\}$

Řešení:

$$\ell = \int_c 1\,ds = \left| \begin{array}{ll} P(t): & x = t \\ & y = 2 - \ln(\cos x), \\ & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{P}}(t) = \left(1, -\dfrac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)\right) \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sin t}{\cos t}\right)^2} = \left|\dfrac{1}{\cos t}\right| \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 t}\,dt = \left| \begin{array}{c} \sin t = s \\ \cos t\,dt = ds \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1\right) =$$

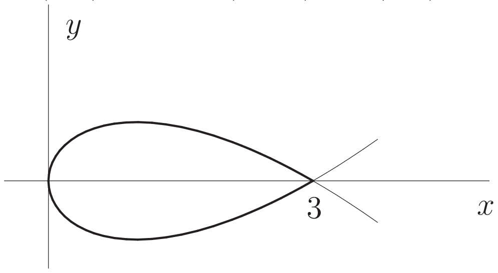
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln(3 + 2\sqrt{2})\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 460**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}, \quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle\right\}$

Řešení: Jde o délku smyčky, jelikož $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 3$ a $y(-\sqrt{3}) = y(\sqrt{3}) = 0$.

$$\ell = \int_c 1\,ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\,dt =$$

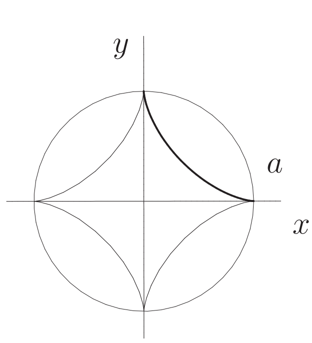


$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1+t^2)\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2)\,dt = 2\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 461**.* $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$

Řešení: Jde o asteroidu, skládající se ze čtyř stejně dlouhých oblouků. Proto



$$\ell = \int_c 1\,ds = 4\cdot\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

$\blacksquare$

Příklad* 462. c je část logaritmické spirály $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$, ležící uvnitř kruhu o poloměru $r = a,\ k > 0,\ a > 0.$

Řešení: Křivka c je zadána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$. V kartézských souřadnicích bude vyjádřena :

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot{y} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}.$$

Potom $ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,d\varphi = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$

$= \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi,$ kde $r' = \dfrac{d\,r}{d\,\varphi}.$

Z podmínky $|a\mathrm{e}^{k\varphi}| \le a$ plyne $\varphi \le 0$. Tedy

$$\ell = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(ak\mathrm{e}^{k\varphi})^2 + (a\mathrm{e}^{k\varphi})^2}\,d\varphi = \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}\,d\,\varphi = \lim_{\beta\to-\infty} a\sqrt{k^2+1}\int_{\beta}^{0} \mathrm{e}^{k\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{k\varphi}}{k}\right]_{\beta}^{0} = a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{\mathrm{e}^{k\beta}}{k}\right) = \frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}.$$

■

Příklad* 463. $c = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz,\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz,\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Stanovte vzdálenost od počátku souřadnic do nejbližšího bodu, v němž je tečna rovnoběžná s osou y.

Řešení: Tečna je rovnoběžná s osou y, když $\dot{x} = 0 \Longrightarrow \dot{x} = \dfrac{\cos t}{t} \Longrightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{2}, t_1 = 1$.

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{t} \quad \Longrightarrow \ell = \int_c 1\,ds = \int_1^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}.$$

■

• Vypočítejte obsahy daných částí válcových ploch omezených souřadnou rovinou (xy) a zadanými plochami :

Příklad* 464. $y^2 = 4x,\ z = 2\sqrt{x - x^2}$

Řešení: Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z je shora omezená plochou $z = f(x,y) = 2\sqrt{x - x^2}$. Obecně $P = \displaystyle\int_c f(x,y)\,ds =$

$$\left|\begin{array}{l} c: y^2 = 4x, c = c_1 \cup c_2, \quad c_1: y = 2\sqrt{x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_2: y = -2\sqrt{x} \\ ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx \\ z = 2\sqrt{x - x^2} \Longrightarrow x(1-x) \ge 0 \Longrightarrow x \in \langle 0, 1\rangle, \quad \int_{c_1} f\,ds = \int_{c_2} f\,ds \end{array}\right|$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{x - x^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{(1-x)(x+1)}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right| = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = 2\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \pi\ .$$

■

Příklad* 465. $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \quad z = xy, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Řešení: $P = \displaystyle\int_c xy\,ds = \left| \; c\,:\, x^2+y^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} P(t)=\Big[\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t\Big], & t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ \dot{\mathbf{P}}(t)=\Big(-\frac{1}{2}\sin t,\frac{1}{2}\cos t\Big), & ds=\frac{1}{2}\,dt \end{cases} \right|$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\,d\varphi = \frac{1}{8}\Big[\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\ . \qquad \blacksquare$$

• Vypočtěte hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho=\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 466**. $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\},\quad \varrho(x,y)=x$

Řešení: $m=\displaystyle\int_c \varrho\,ds=\int_c x\,ds = \left| \begin{array}{c} c: P(t)=\big[a\cos t, y=a\sin t\big],\ \ t\in\langle 0,\pi/2\rangle \\ \dot{\mathbf{P}}(t)=\big(-a\sin t, a\cos t\big),\quad \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|=a \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\,dt = a^2\cdot\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = a^2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 467**. $c=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x=at,\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,t^2,\ z=\dfrac{a}{3}\,t^3,\ t\in\langle 0,1\rangle\},$

$\varrho(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$

Řešení: $m=\displaystyle\int_c \varrho\,ds=\int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}\,ds =$

$$= \left| \begin{array}{lll} P(t): & x=at & \Longrightarrow \dot{x}=a \\ & y=\frac{a}{\sqrt{2}}\,t^2 & \Longrightarrow \dot{y}=\sqrt{2}at \\ & z=\frac{a}{3}t^3 & \Longrightarrow \dot{z}=at^2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}= \\ =a\sqrt{1+2t^2+t^4} \\ ds=a(1+t^2)\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{2at^2}{a\sqrt{2}}}\cdot a\cdot(1+t^2)\,dt = \sqrt[4]{2}\cdot\int_0^1 at(1+t^2)\,dt = a\sqrt[4]{2}\Big[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\,a\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 468**. Křivka c je první závit šroubovice $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at$ a hustota se rovná čtverci vzdálenosti od osy z .

Řešení: $m=\displaystyle\int_c \varrho\,ds=\int_c (x^2+y^2)\,ds = \left| \begin{array}{ll} P(t): & x=a\cos t \\ & y=a\sin t \\ & z=a\,t \end{array} \ \Big| \ \begin{array}{c} t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2} \\ ds=a\,\sqrt{2}\,dt \end{array} \right| =$

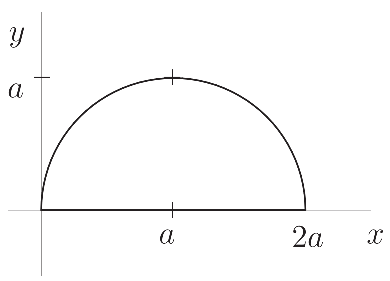
$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a\sqrt{2}\,dt = a^3\cdot 2\sqrt{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 469**. $c=c_1\cup c_2;\quad c_1=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=2ax,\ y\geq 0\};$

$c_2=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y=0,\ x\in\langle 0,2a\rangle, a>0\},\quad \varrho(x,y)=x^2+y^2$

Řešení:

$$m=\int_c \varrho\,ds=\int_{c_1}\varrho\,ds+\int_{c_2}\varrho\,ds=$$
$$=\int_{c_1}(x^2+y^2)\,ds+\int_{c_2}(x^2+y^2)\,ds=$$



$$= \left| \begin{array}{lll} c_1 : \begin{cases} x^2+y^2-2ax=0 \Longrightarrow (x-a)^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \\ y \geq 0 \end{cases} & \begin{array}{l} x=a+a\cos t \\ y=a\sin t \end{array} \Big| & \begin{array}{l} ds=a\,dt \\ t\in\langle 0,\pi\rangle \end{array} \\ c_2 : y=0 \Longrightarrow ds=dx, x\in\langle 0,2a\rangle & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big(a^2(1+\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\Big)\cdot a\,dt + \int_0^{2a} x^2\,dx = a^3\int_0^{\pi}(2+2\cos t)\,dt + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} =$$

$$= 2a^3\Big[t+\sin t\Big]_0^{\pi} + \frac{8a^3}{3} = 2a^3\pi + \frac{8a^3}{3}\ . \qquad \blacksquare$$

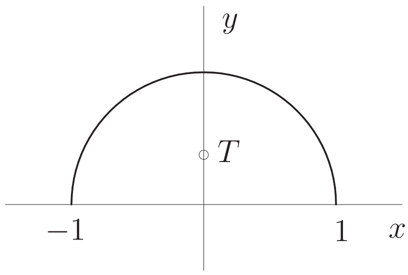
• Určete těžiště T křivky c při hustotě $\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 470**. $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=1,\ y\geq 0\},\quad \varrho(x,y)=a(1-y),\ a>0$

Řešení:

$T=[0,y_T]$, kde $y_T=\dfrac{M_x}{m}$.

(Všimněte si, že hustota nezáleží na x čili hmotnost levé a pravé čtvrtkružnice je stejná.)



$$\left| P(t) : \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \ \Big|\ \dot{\mathbf{P}}(t) : \begin{cases} \dot{x}=-\sin t \\ \dot{y}=\cos t \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{l} ds=\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|\,dt=dt \\ t\in\langle 0,\pi\rangle \end{array} \right|$$

$$m=\int_c \varrho\,ds = \int_c a(1-y)\,ds = \int_0^{\pi} a(1-\sin t)\,dt = a\Big[t+\cos t\Big]_0^{\pi} = a(\pi-2)$$

$$M_x = \int_c y\varrho\,ds = a\int_0^{\pi}(1-\sin t)\sin t\,dt = a\int_0^{\pi}\Big(\sin t - \frac{1-\cos 2t}{2}\Big)\,dt =$$

$$= a\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi} = a\,(2-\frac{\pi}{2})$$

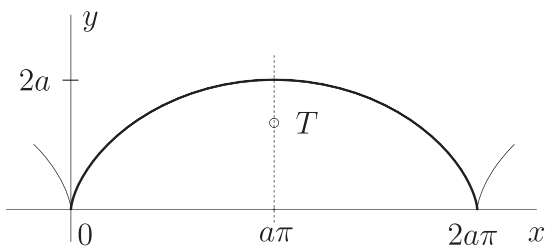
$$y_T = \frac{a\,(2-\frac{\pi}{2})}{a\,(\pi-2)} = \frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)} \qquad \boxed{T=\left[0,\frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)}\right]}\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 471**. $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x=a\,(t-\sin t),\ y=a\,(1-\cos t),\ a>0,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$, $\varrho(x,y)=1$

Řešení:

c je první oblouk cykloidy, $\quad T=[\pi a, y_T]$,

$y_T=\dfrac{M_x}{m}; \qquad m=\displaystyle\int_c \varrho(x,y)\,ds$



$$\left| \begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \\ t\in\langle 0,2\pi\rangle \end{array} \ \Big|\ \begin{array}{l} \dot{x}=a(1-\cos t) \\ \dot{y}=a\sin t \end{array} \ \Big|\ \begin{array}{l} \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} \\ ds=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \end{array} \right|$$

$$m=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\Big[-2\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 8a;$$

$$M_x = \int_c y\varrho(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\Big(1-\cos^2\frac{t}{2}\Big)\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[\begin{array}{c} \cos\frac{t}{2} = z \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = dz \end{array}\right] =$$

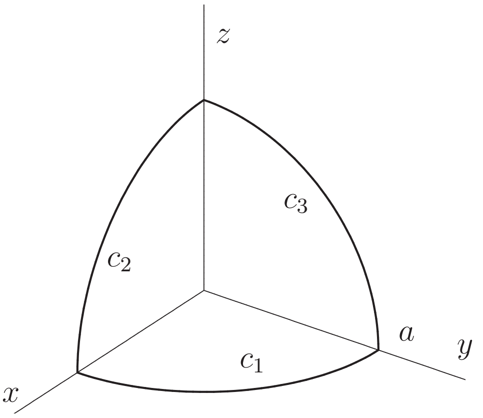
$$= -4\,a^2\cdot 2\cdot\int_1^{-1}(1-z^2)\,dz = 8a^2\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz = 16a^2\Big[z-\frac{z^3}{3}\Big]_0^1 = 16\,a^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{32a^2}{3};$$

$$y_T = \frac{32a^2}{3\cdot 8a} = \frac{4}{3}\,a, \qquad \boxed{T = \Big[\pi a, \frac{4}{3}\,a\Big]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 472**. $c = c_1 \cup c_2 \cup c_3,\ c_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+y^2 = a^2,\ z = 0, x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
$c_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2+z^2 = a^2, y = 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$,
$c_3 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ y^2+z^2 = a^2,\ x = 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ a > 0\}, \quad \varrho(x,y) = 1$

Řešení: Křivka c je je symetrická vzhledem k osám x, y, z tedy $x_T = y_T = z_T$. Omezíme se na $x_T = \dfrac{M_{yz}}{m}$. $\quad m = 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \dfrac{3}{2}\,\pi\,a$,

$$M_{yz} = \int_c x\varrho(x,y)\,ds = \int_{c_1} x\,ds + \int_{c_2} x\,ds + \int_{c_3} x\,ds =$$



$$\left|\begin{array}{ll} c_1: & \begin{array}{l} P_1(t) = [a\cos t, a\sin t, 0] \\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_1(t)\| = a \end{array} \\ c_2: & \begin{array}{l} P_2(t) = [a\cos t, 0, a\sin t] \\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_2(t)\| = a \end{array} \\ c_3: & \begin{array}{l} P_3(t) = [0, a\cos t, a\sin t] \\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle, \quad \|\dot{\mathbf{P}}_3(t)\| = a \end{array} \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} 0\,dt = 2a^2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 2a^2$$

$$x_T = y_T = z_T = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4\,a}{3\pi} \qquad \boxed{T = \Big[\frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}\Big]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 473**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k souřadnicové rovině (yz) prostorové křivky $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, je-li $\varrho(x,y,z) = x^2+y^2$.

Řešení:

$$I_{yz} = \int_c \varrho\cdot x^2\,ds = \int_c (x^2+y^2)x^2\,ds = \left|\begin{array}{c} ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \\ = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a^2\cos^2 t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^4\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big[t+\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = a^4\sqrt{a^2+b^2}\,\pi\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 474**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $c \subset \mathbb{E}_3$:
$$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}, \quad \text{je-li} \quad \varrho(x,y,z) = z\ .$$

Řešení: c je řez eliptické válcové plochy rovinou $x + z = 1$.

$$I_z = \int_c (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\,ds = \int_c (x^2+y^2)z\,ds =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} & x = \cos t \implies \dot{x} = -\sin t & \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2} \\ P(t): & y = \sqrt{2}\sin t \implies \dot{y} = \sqrt{2}\cos t \quad | & \\ & z = 1 - \cos t \implies \dot{z} = \sin t & t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t)(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)(1-\cos t)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big(1 + \frac{1-\cos 2t}{2} - \cos t - \sin^2 t\cos t\Big)\,dt = \sqrt{2}\Big[t + \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} - \sin t -$$

$$-\frac{\sin^3 t}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\sqrt{2}\,\pi\ . \qquad \blacksquare$$

- Je dána křivka c a délková hustota ϱ.
  - a) Navrhněte parametrizaci $X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle$ dané křivky c a určete délku vektoru $\dot{P}(t)$.
  - b) Vypočítejte hmotnost křivky c, je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ϱ.
  - c) Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

475. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [1,0]$, $B = [2,3]$, $\varrho(x,y) = x^2 + y^2$.

[*a)* $P(t) = [1+t, 3t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{10}$
b) $m = 6\sqrt{10}/3$
c) $J_0,\ \varrho = 1$]

476. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [0,1]$, $B = [1,2]$, $\varrho(x,y) = x^2 y$.

[*a)* $P(t) = [t, t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{2}$
b) $m = \sqrt{2}/4$
c) $M_x,\ \varrho = x^2;\ M_y,\ \varrho = xy;\ J_y,\ \ \varrho = y$]

477. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0\}$, $\varrho(x,y) = x$.

[*a)* $P(t) = [3\cos t, 3\sin t],\ t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = 3$
b) $m = 18$
c) $M_y,\ \varrho = 1$]

478. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t/3,\ t \in \langle 0, 3\rangle\}$,
$\varrho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

[*a)* $P(t) = [3\cos t, 3\sin t, t/3],\ t \in \langle 0,3\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{82}/3$
b) $m = 28\sqrt{82}/3$
c) $J_0,\ \varrho = 1$]

479. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/4;\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
$\varrho(x,y,z) = z^2/(x^2 + y^2)$

[*a)* $P(t) = [2\cos t, 2\sin t, t/4],\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{17}/2$
b) $m = \sqrt{65}\,\pi^3/96$
c) $M_{xy},\ \varrho = z/(x^2+y^2);\ J_{xy},\ \varrho = 1/(x^2+y^2)$]

480. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{x^2}{2} + 2$ mezi body $A = [0,2]$, $B = [2,4]\}$, $\varrho(x,y) = x$

[*a)* $P(t) = [t, t^2/2 + 2],\ t \in \langle 0, 2\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{1+t^2}$
b) $m = (5\sqrt{5} - 1)/3$
c) $M_y,\ \varrho = 1$]

481. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = t\cos t, y = t\sin t, z = t;\ t \in \langle 0, 1\rangle\},\quad \varrho(x, y, z) = z$
$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t\cos t, t\sin t, t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| = \sqrt{2+t^2}/2 \\ b)\ m = (\sqrt{27}-\sqrt{8})/3 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = 1 \end{array}\right]$

• Vypočítejte délku ℓ dané křivky c :

482. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x},\quad x \in \langle 0, 5\rangle\right\}$ $\left[\dfrac{19}{3}\right]$

483. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\quad t \in \langle 0, 1\rangle\}$ $[5]$

484. $c = \{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi),\ \varphi \in \langle 0, \pi\rangle,\ a > 0\}$ (horní polovina kardioidy) $[4a]$

485. $c = \left\{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = \sin^3\dfrac{\varphi}{3},\quad \varphi \in \langle 0, 3\pi\rangle\right\}$ $\left[\dfrac{3}{2}\pi\right]$

486. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\ dx\right\}$ $\left[4;\ \text{použijte}\cos x \geq 0 \Longrightarrow x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle\right]$

487. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/2,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ $[\pi\sqrt{17}]$

488. $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x}, x \in \langle 0; 5\rangle\right\}$ $[19/3]$

489. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = at,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ $[2\pi\sqrt{R^2 + a^2}]$

• Určete hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y)$:

490. $\varrho = x(y^2 + z^2),\quad c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ y^2 + 2z^2 = 4,\ x = z,\ x \geq 0\}$ $\left[\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right]$

491. $\varrho = x(y + 2),\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$ $[16]$

492. $\varrho = x^{4/3} + y^{4/3},\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle\}$ $\left[a^{\frac{7}{3}}\right]$

493. $\varrho = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}},\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ $\left[\mathrm{e}^a \cdot a \cdot \dfrac{\pi}{2}\right]$

494. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti homogenní půlkružnice o poloměru a. $\left[\dfrac{a^3\pi}{2}\right]$

495. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x části asteriody ležící v prvním kvadrantu (tj. křivky $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle$), při hustotě $\varrho = 1$. $\left[\dfrac{3a^3}{8}\right]$

• Určete těžiště T křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y, z)$:

496. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ a > 0,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
$\varrho = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ $\left[m = \dfrac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3},\ M_{xy} = 4\sqrt{2}a^2\pi^4,\ T = \left[0, 0, \dfrac{3}{2}a\pi\right]\right]$

497. $c = c_1 \cup c_2,\ c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 6\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 6\rangle\}$;
$c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = -6\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 6\rangle\},\ \varrho = 1$ $\left[m = 10,\ M_y = 35,\ T = \left[\dfrac{7}{2}, 0\right]\right]$

IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládejme, že c je jednoduchá hladká křivka s parametrizací $P(t)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_c \vec{f}(X)\cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}\Big(P(t)\Big)\cdot \dot{P}(t)\,dt.$$

Znaménko plus (resp. mínus) použijeme, když křivka c je orientována souhlasně (resp. nesouhlasně) s parametrizací $P(t)$.

Poznámka: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat v diferenciálech, tj. ve tvaru

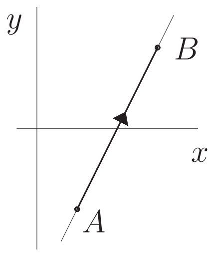
$$\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_c \big(U, V, W\big)\cdot(dx,\, dy,\, dz) = \int_c (U\,dx + V\,dy + W\,dz).$$

Analogicky pro křivku $c \in \mathbb{E}_2$.

• Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce c s počátečním bodem A.

***Příklad* 498.** $\displaystyle\int_c (x, -y^2)\cdot d\vec{s}$, c je úsečka z bodu $A = [1, -2]$ do bodu $B = [3, 2]$.

Řešení:



Parametrické rovnice úsečky:

$$c : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

Parametrizace křivky c:

| $P(t) = \big[1 + 2t, -2 + 4t\big]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$,
| $\dot{P}(t) = (2, 4)$
| $P(0) = [1, -2] = A \Rightarrow$ orientace křivky je souhlasná se zvolenou parametrizací |

$$\int_c (x, -y^2)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \Big(\underbrace{(1 + 2t), -(-2 + 4t)^2}_{\vec{f}(P(t))}\Big)\cdot \underbrace{(2, 4)}_{\dot{P}(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \Big((1 + 2t)\cdot 2 - (4t - 2)^2\cdot 4\Big)\,dt = 2\int_0^1 \Big(1 + 2t - 2(16t^2 - 16t + 4)\Big)\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 (-7 + 34t - 32t^2)\,dt = 2\Big[-7t + 17t^2 - \frac{32}{3}\,t^3\Big]_0^1 = -\frac{4}{3} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 499.** $\displaystyle\int_c (x^2 - y^2, 1)\cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^3\}$ z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [3, 27]$.

Řešení:

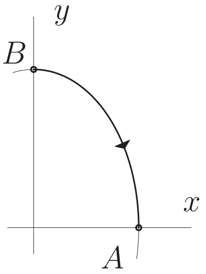
$$c : \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 3\rangle$$

| $P(t) = [t, t^3]$, $t \in \langle 0, 3\rangle$
| $\dot{P}(t) = (1, 3t^2)$, $P(0) = A \Rightarrow$ souhlasná parametrizace |

$$\int_c (x^2-y^2,1)\cdot d\vec{s} = \int_c (t^2-t^6,1)\cdot(1,3t^2)\,dt = \int_0^3 \Big((t^2-t^6)\cdot 1 + 1\cdot 3t^2\Big)\,dt =$$
$$= \left[\frac{4}{3}\,t^3 - \frac{t^7}{7}\right]_0^3 = -\frac{1935}{7} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 500.** $\displaystyle\int_c (-y,x)\cdot d\vec{s}, \quad c = \Big\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\Big\}, \quad A=[a,0].$

Řešení:



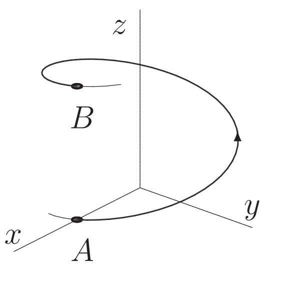
$$c: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t\in\langle 0,\pi/2\rangle$$

$P(t) = [a\cos t, b\sin t], \quad t\in\langle 0,\pi/2\rangle$
$\dot{P}(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad P(0)=[a,0]=A$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$\int_c (-y,x)\cdot d\vec{s} = -\int_0^{\pi/2} (-b\sin t, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt =$$
$$= -\int_0^{\pi/2} (b\sin t\cdot a\sin t + a\cos t\cdot b\cos t)\,dt = -ab\int_0^{\pi/2} 1\,dt = -\frac{ab\pi}{2} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 501.** $\displaystyle\int_c (y,-x,z)\cdot d\vec{s}$, c je část křivky $k = \Big\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x = R\cos t,$ $y = R\sin t, z = \dfrac{at}{2\pi},\ R>0\Big\}$, od průsečíku s rovinou $z=0$ do průsečíku s rovinou $z=a$, $a>0$.

Řešení: Jedná se o šroubovici s poloměrem vinutí R a stoupáním a.



$z=0 \implies t_1 = 0$
$z=a \implies t_2 = 2\pi$

$P(t) = \Big[R\cos t, R\sin t, \dfrac{at}{2\pi}\Big], \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$
$\dot{P}(t) = \Big(-R\sin t, R\cos t, \dfrac{a}{2\pi}\Big), \quad P(0)=[a,0,0]=A$
orientace je souhlasná

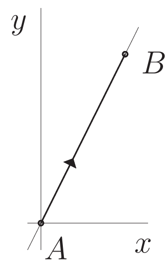
$$\int_c (y,-x,z)\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \Big(R\sin t, -R\cos t, \frac{at}{2\pi}\Big)\cdot\Big(-R\sin t, R\cos t, \frac{a}{2\pi}\Big)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t + \frac{a^2 t}{4\pi^2}\Big)\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(-R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\,t\Big)\,dt =$$
$$= \Big[-R^2 t + \frac{a^2}{8\pi^2}\,t^2\Big]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} - 2\pi R^2 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 502.** $\displaystyle\int_c -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$, c je úsečka z bodu $A=[0,0]$ do bodu $B=[\pi,2\pi]$.

Řešení: Daný integrál můžeme počítat dvojím způsobem:

1) Použijeme přímo zadání křivkového integrálu v diferenciálním tvaru.

Při parametrickém vyjádření dané křivky c dostaneme pro $t = 0$ počáteční bod A,



$$c: \; x = t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \qquad \text{vypočítáme diferenciály,} \; dx = dt,$$
$$y = 2t, \qquad dy = 2\,dt,$$

$$\int_C -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_0^\pi (-t\,\cos 2t + 2\cdot 2t\,\sin t)\,dt =$$
$$= \int_0^\pi t(4\sin t - \cos 2t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = 4\sin t - \cos 2t \\ u' = 1, & v = -4\cos t - \frac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| =$$
$$= -\Big[4t\cos t + \frac{t}{2}\sin 2t\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \Big(4\cos t + \frac{\sin 2t}{2}\Big)\,dt = 4\pi + \Big[4\sin t - \frac{\cos 2t}{4}\Big]_0^\pi = 4\pi.$$

Poznámka: Protože úsečka c je grafem explicitně zadané funkce $y = 2x,\; x \in \langle 0,\, \pi\rangle$, můžeme ponechat proměnnou x jako parametr. Po výpočtu diferenciálu $dy = 2\,dx$ dostáváme

$$\int_c -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_0^\pi (-x\,\cos 2x + 2\cdot 2x\,\sin x)\,dx = \cdots,$$

což je stejný Riemannův integrál.

2) Daný integrál v diferenciálním tvaru přepíšeme do tvaru vektorového

$$\int_c -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_c (-x\cos y,\; y\sin x)\cdot d\vec{s}.$$

Použijeme parametrizaci

$$c: \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi\rangle;$$

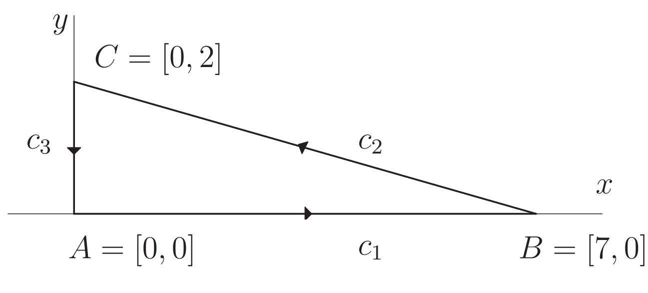
$$\left| \begin{array}{ll} P(t) = [t, 2t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle; & \dot{P} = (1, 2) \\ P(0) = A \Rightarrow & \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_0^\pi (-t\cos 2t,\; 2t\,\sin t)\cdot(1,\,2)\,dt = \int_0^\pi (-t\,\cos 2t + 4t\,\sin t)\,dt = \cdots$$

a dostaneme zase stejný Riemannův integrál. ■

***Příklad* 503**. $\oint_c x\,dy$, c je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami $x = 0,\; y = 0$ a $2x + 7y = 14$, c je orientována kladně.

Řešení:



$$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

Podle poznámky z předchozího příkladu:

$$c_1 : y = 0,\ dy = 0 \cdot dx,\ x \in \langle 0, 7\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_1} x\, dy = \int_0^7 0\, dx = 0$$

$$c_2 : x = \frac{14 - 7y}{2},\ y \in \langle 0, 2\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_2} x\, dy = \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2}\, dy$$

$$c_3 : x = 0,\ y \in \langle 2, 0\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_3} x\, dy = \int_2^0 0 \cdot dy$$

$$\oint_c x\, dy = 0 + \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2}\, dy + 0 = \frac{1}{2}\Big[14y - \frac{7y^2}{2}\Big]_0^2 = 7 \qquad \blacksquare$$

504. $\displaystyle\int_c (x\cos y, 0) \cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná úsečka z bodu $A = [0, 1]$ do bodu $B = [1, 2]$. $[\sin 2 + \cos 2 - \cos 1]$

505. $\displaystyle\int_c (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2) \cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná křivka $y = 1 - |1 - x|,\ x \in \langle 0, 2\rangle$, počáteční bod je $A = [0, 0]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

506. $\displaystyle\int_c (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$, $\quad c$ je oblouk paraboly $y = x^2$ z bodu $A = [-1, 1]$ do bodu $B = [1, 1]$. $\left[-\frac{14}{15}\right]$

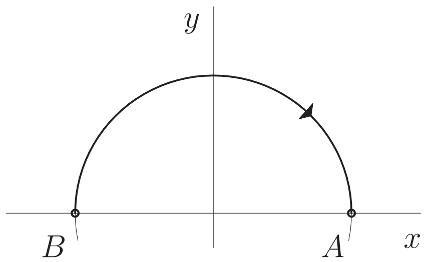
507. $\displaystyle\int_c (y, x) \cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ a > 0\}$ a počáteční bod je $A = [a, 0]$. $[0]$

IV.5. Práce síly podél křivky

• Vypočtěte práci W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

***Příklad* 508**. $\vec{f} = (x + y, 2x)$, $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0\}$, počáteční bod $B = [-R, 0]$.

Řešení: Práce W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c je rovna integrálu $\displaystyle\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.



$$c : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2\rangle$$

$$\left|\begin{array}{l} P(t) = [R\cos t, R\sin t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \dot{P}(t) = (-R\sin t, R\cos t), \quad P(0) = [R, 0] = A \Rightarrow \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array}\right| =$$

$$W = \int_c (x + y, 2x) \cdot d\vec{s} = -\int_0^\pi (R\cos t + R\sin t, 2R\cos t) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^\pi \Big(-R^2(\sin t + \cos t)\sin t + 2R^2\cos^2 t\Big)\, dt =$$

$$= -R^2 \int_0^{\pi} (-\sin^2 t - \sin t \cos t + 2\cos^2 t)\, dt =$$

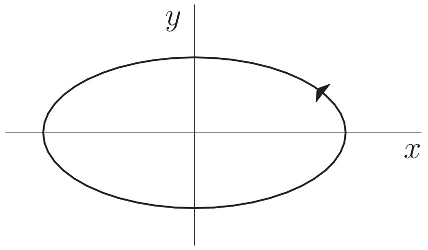
$$= -R^2 \int_0^{\pi} \Big(-\frac{1-\cos 2t}{2} - \sin t \cos t + 1 + \cos 2t\Big)\, dt =$$

$$= -R^2 \Big[-\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi} = -\frac{\pi R^2}{2}$$

■

***Příklad* 509**. $\vec{f} = \Big(\dfrac{2y}{x^2+4y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+4y^2}\Big)$, $\quad c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\Big\}$, křivka c je orientovaná kladně.

Řešení:



$$c: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

| $P(t) = [2\cos t, y = \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
| $\dot{P}(t) = (-2\sin t, \cos t)$
| orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \Big(\frac{2y}{x^2+4y^2}, -\frac{2x}{x^2+4y^2}\Big) \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{2\sin t}{4}, -\frac{4\cos t}{4}\Big) \cdot (-2\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{4\sin^2 t}{4} - \frac{4\cos^2 t}{4}\Big)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

■

***Příklad* 510**. $\vec{f} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + a\,\vec{k}$, $\quad c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0,\ z = 2\}$, orientace křivky c je dána tečným vektorem $\vec{\tau}([2,1,2]) = -\vec{i}$.

Řešení:

$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ rovnice válcové plochy

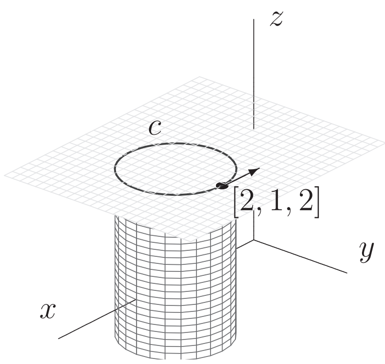
$z = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ rovnice roviny

Křivka c vznikne rovinným řezem válcové plochy.

Rovina je kolmá na osu rotační válcové plochy, křivka c je tedy kružnice

$$c: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$c: \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot \cos t, \\ y = 1 \cdot \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



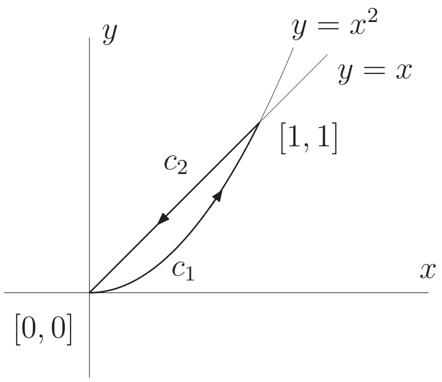
| $P(t) = [2 + \cos t, \sin t, 2]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad P\big(\frac{\pi}{2}\big) = [2,1,2]$; $\quad \dot{P}\big(\frac{\pi}{2}\big) = (-1,0,0) = -\vec{i}$
| $\dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ $\quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (-y, x, a) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, a) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin^2 t + (2+\cos t)\cos t + a\cdot 0\Big)\,dt = \int_0^{2\pi} (1+2\cos t)\,dt = 2\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 511**. $\vec{f} = (xy, x+y)$, $c = c_1 \cup c_2$, c je uzavřená křivka, kde c_1 je část paraboly $y = x^2$ a c_2 je část přímky $y = x$, c je kladně orientovaná.

Řešení:



$c_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_1(t) = [t, t^2]$, $t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 2t)$, $P(0) = [0,0]$
orientace křivky je souhlasná s parametrizací

$c_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_2(t) = [t, t]$, $t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 1)$, $P(0) = [0,0]$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$W = \oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} + \int_{c_2} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} =$$
$$= \int_0^1 (t^3, t+t^2)(1,2t)\,dt - \int_0^1 (t^2, 2t)(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3)\,dt -$$
$$- \int_0^1 (t^2 + 2t)\,dt = \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{12} \qquad \blacksquare$$

• Vypočtěte práci síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

512. $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 4\}$, křivka c je orientovaná záporně.

$[-2\pi]$

513. $\vec{f} = \dfrac{2}{x^2+y^2}(y, -x)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 16\}$, křivka c je kladně orientovaná.

$[-4\pi]$

514. $\vec{f} = \left(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{x}\right)$, $\quad c$ je obvod $\triangle ABC$, kde $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [2,2]$, křivka c je kladně orientovaná.

$\left[\frac{1}{2}\right]$

515. $\vec{f} = \dfrac{(y^2, -x^2)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = a^2,\ a > 0,\ y \ge 0\}$ z bodu $[a, 0]$ do bodu $[-a, 0]$.

$\left[-\frac{4}{3}\,a\right]$

516. $\vec{f} = (y, 2)$, $\quad c$ je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná.

$[2\pi]$

517. $\vec{f} = (x+y, 2x)$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace je kladná.

$[\pi a^2]$

518. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.
$\left[\frac{3}{2}\, a^2\right]$

519. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1, 0, 0]$ do bodu $[0, 1, 0]$.
$\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right]$

520. $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2 - y^2}, xy)$, $c = \Big\{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \Big(R\cos t, R\sin t, \dfrac{at}{2\pi}\Big),$ $a > 0,\ R > 0, t \in \langle 0, 2\pi\rangle\Big\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$[0]$

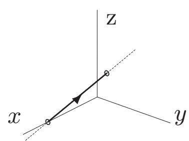
521. $\vec{f} = (x, y, xz - y)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \big(t^2, 2t, 4t^3\big),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$\left[\frac{5}{2}\right]$

522. $\vec{f} = (x, y, z)$, c je čtvrtina elipsy $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 2\}$ z bodu $[2, 0, 0]$ do bodu $[0, 2, 2]$.
$[2]$

523. $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \big(5, 2 + 4\sin t, -3 + 4\cos t\big),$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
$[96\pi]$

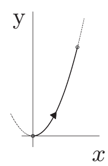
- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a orientovaná křivka c.
  - a) Načrtněte danou křivku $c \subset \mathbb{E}_2$.
  - b) Navrhněte její parametrizaci $P(t)$ a zdůvodněte, zda je křivka c orientována souhlasně s touto parametrizací.
  - c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po dané orientované křivce c.

524. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.



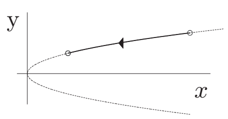
[b) $P(t) = [a + at, at, at]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
c) $\frac{3}{2}\, a^2$]

525. $\vec{f} = (xy, y-1)$, c je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$



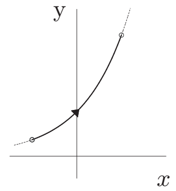
[b) $P(t) = [t, t^2]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
c) 8]

526. $\vec{f} = \big(\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y}\big)$, c je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$



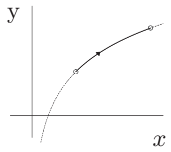
[b) $P(t) = [2t^2, t]$, $t \in \langle 2, 1\rangle$
c) $-\frac{1}{3}\big(40 + 32\sqrt{2}\big)$]

527. $\vec{f} = \left(x^3, \dfrac{1}{y}\ln y\right)$, křivka c je daná rovnicí $y = \mathrm{e}^x$, kde $|x| \le 1$ a počáteční bod má $x = -1$



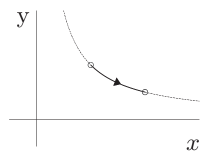
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \mathrm{e}^t],\ t \in \langle -1, 1\rangle \\ c)\ 0 \end{array}\right]$

528. $\vec{f} = (2, xy)$; $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y = \ln x + 1,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle\}$,



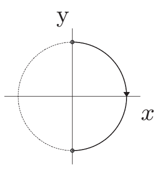
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \ln t + 1],\ t \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle \\ c)\ 3\mathrm{e} - 2 \end{array}\right]$

529. $\vec{f} = (0, x)$; $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1,\ x \in \langle 2, 1\rangle\}$



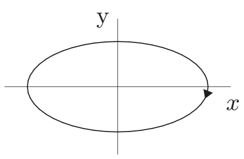
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = \left[t, \dfrac{1}{t}\right],\ t \in \langle 2, 1\rangle \\ c)\ -\ln 2 \end{array}\right]$

530. $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x \ge 0\}$ orientovaná od bodu $[0,2]$ k bodu $[0,-2]$



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, 2\sin t],\ t \in \langle \pi, -\pi\rangle \\ c)\ -\pi \end{array}\right]$

531. $\vec{f} = \left(\dfrac{2y}{x^2+4y^2}, -\dfrac{2x}{x^2+4y^2}\right)$; $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$, která je záporně orientovaná



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, \sin t],\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ c)\ 2\pi \end{array}\right]$

- Je dána úsečka AB, vektorová funkce $\vec{f}$ a skalární funkce ϱ.
  - a) Navrhněte parametrizaci $P(t)$ úsečky k a vypočítejte tečný vektor $\dot{P}(t)$.
  - b) Užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením podél úsečky AB od bodu A do bodu B.
  - c) Vypočítejte hmotnost křivky k, je-li délková hustota $\varrho(x,y)$.

532. $A = [1, 0],\ B = [2, 3], \quad \vec{f} = (x, y) = (x^2,\ xy), \quad \varrho(x, y) = x^2 + y^2$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [1 + t, 3t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \dfrac{232}{15} \\ c)\ m = \dfrac{16}{3}\sqrt{10} \end{array}\right]$$

533. $A = [0, 1],\ B = [1, 2] \quad \vec{f}(x, y) = (x\sqrt{y^2 - 2x},\ 0), \quad \varrho(x, y) = xy$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, 1 + t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) \\ c)\ m = \dfrac{5}{6}\sqrt{2} \end{array}\right]$$

IV.6. Greenova věta

Křivkový integrál vektorového pole po uzavřené křivce c nazýváme ***cirkulací vektorového pole*** $\vec{f}$ *po křivce c a zapisujeme* $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Nechť : 1) vektorová funkce $\vec{f} = \big(U(x,y),\, V(x,y)\big)$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $G \subset \mathbb{E}_2$,
2) křivka $c \subset G$ *je kladně orientovaná, uzavřená, jednoduchá, po částech hladká,*
3) $int\, c \subset G$.
Potom

$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{int\, c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

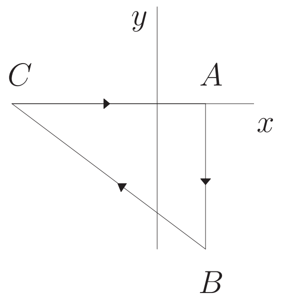
POZNÁMKA: *Je-li křivka c orientovaná záporně, pak má integrál napravo znaménko mínus.*

POZNÁMKA: *Vyjádřením křivkového integrálu v diferenciálech má tvrzení Greenovy věty tvar:*

$$\oint_c U\, dx + V\, dy = \iint_{int\, c} \Big(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

***Příklad* 534**. Pomocí Greenovy věty spočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (2x+3y, 5x-y-4)$ po obvodu $\triangle ABC$ ve směru $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, kde $A = [1,0], B = [1,-3], C = [-3,0]$.

Řešení:



Cirkulace, tj. $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (2x+3y, 5x-y-4)\, d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=}$

$$= -\iint_{int\, c} (5-3)\, dx\, dy = -2 \iint_{\triangle ABC} 1\, dx\, dy =$$

$$= -2 \cdot P_{\triangle} = -2\,\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -12$$

(orientace křivky c je záporná, proto před dvojným integrálem je znaménko minus) .

■

***Příklad* 535**. Vyšetřete existenci integrálu $\oint_c \Big(\ln(x^2+y^2), -2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\Big) \cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty k jeho výpočtu, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je kladně orientovaná křivka daná rovnicí a) $x^2+y^2=1$, b) $(x-1)^2+y^2 = 1$, c) $(x-2)^2+y^2 = 1$, d) c je obvod čtverce s vrcholy $A = [1,0], B = [0,1], C = [-1,0], D = [0,-1]$. Jestliže integrál existuje, vypočtěte jej pomocí Greenovy věty.

Řešení: Definiční obor vektorové funkce $\vec{f} = \Big(\ln(x^2+y^2), -2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\Big)$ je $D(\vec{f}) = D_1 \cup D_2$,
$D_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\, x > 0\}, \qquad D_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\, x < 0\}$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

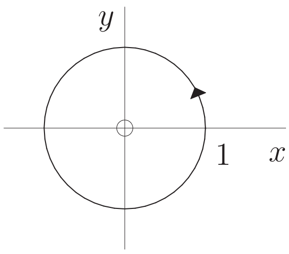
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial\big(-2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial x} = \frac{2}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial\big(-2\text{arctg}\,\frac{y}{x}\big)}{\partial y} = \frac{-2}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

V oblasti D_1 i v oblasti D_2 je daná funkce spojitá a má spojité parciální derivace 1. řádu.

Pro libovolnou uzavřenou křivku v D_1 tedy existuje $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ a pro výpočet lze použít

Greenovu větu. Totéž platí i pro oblast D_2.

a)

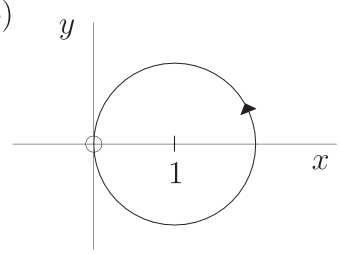


Funkce $\vec{f}$ je spojitá na množině $C \setminus M$, kde $M = \{[0,1],[0,-1]\}$ (M je dvouprvková množina). Na množině $C \setminus M$ je však funkce $\vec{f}$ omezená, neboť pro každý bod $[x,y]$ ležící mimo osu y je $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right| < \dfrac{\pi}{2}$.

Křivkový integrál tedy existuje.

Pro výpočet ale nelze použít Greenovu větu, neboť v bodech množiny M, která je částí křivky c není funkce $\vec{f}$ definovaná.

b)

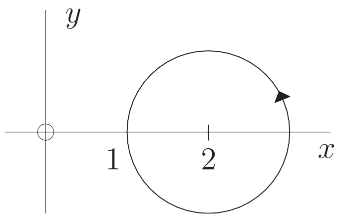


V okolí bodu $[0,0]$ není funkce $\vec{f}$ omezená, neboť
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \ln(x^2+y^2) = -\infty.$$

Daný integrál tedy neexistuje.

To platí pro libovolnou křivku, která obsahuje bod $[0,0]$.

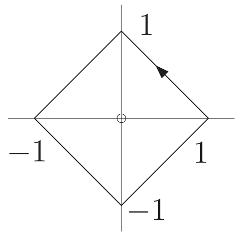
c)



Integrál existuje a lze použít Greenovu větu, neboť křivka c leží v oblasti D_1. Proveďme tedy výpočet.

$$\oint_c (U,\,V)\cdot d\vec{s} = \iint_{int\,c} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{int\,c} \left(\frac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$$
$$= \iint_{int\,c} 0\,dx\,dy = 0.$$

d)

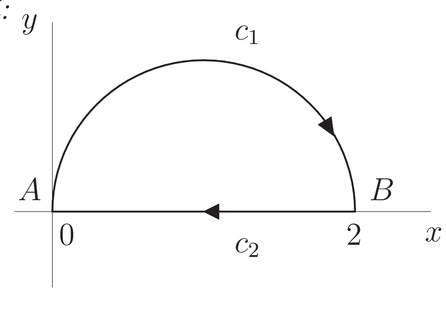


Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu. Důvod je stejný jako v úloze a).

■

***Příklad* 536**. Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (-y, x)$ po záporně orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$, kde $c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 - 2x + y^2 = 0,\ y \geq 0\}$; $c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0, 2\rangle\}$,
a) přímým výpočtem, b) pomocí Greenovy věty.

Řešení:



$c_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$,
počáteční bod je $A = [0,0]$

$c_2 : y = 0, x \in \langle 0, 2\rangle$
počáteční bod je $B = [2,0]$

$$c_1 : \begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_1(t) = [1+\cos t, \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \dot{P}_1(t) = (-\sin t, \cos t) \\ P_1(0) = [2,0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

$$c_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x \in \langle 0, 2\rangle \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_2(t) = [t, 0], \quad t \in \langle 0, 2\rangle \\ \dot{P}_2(t) = (1, 0) \\ P_2(0) = [0,0] \Rightarrow \text{nesouhlasná orientace} \end{array} \right|$$

a) $$\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{c_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_0^\pi (-\sin t,\ 1+\cos t)\cdot(-\sin t,\ \cos t)\,dt - \int_0^2 0\,dt =$$

$$= -\int_0^\pi \Big(\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t\Big)\,dt = -\int_0^\pi (1+\cos t)\,dt = -\Big[t + \sin t\Big]_0^\pi = -\pi$$

b) Souřadnicové funkce U, V daného vektorového pole $\vec{f}$ mají spojité parciální derivace v $\mathbb{E}_2$. Daná křivka c je uzavřená, po částech hladká. Lze tedy použít Greenovu větu.

$$\oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=} -\iint_{int\ c} (1+1)\,dx\,dy = -2\cdot \text{(obsah půlkruhu)} = -2\cdot\frac{1}{2}\,\pi\cdot 1^2 = -\pi$$

■

***Příklad* 537**.* Vypočítejte pomocí křivkového integrálu plošný obsah vnitřku asteriody

$$c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\, x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0\}.$$

Řešení: Použijeme parametrizaci asteriody :

$$c : \begin{cases} x = a^3\cos^3 t, \\ y = a^3 \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P(t) = [a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t] \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \dot{P}(t) = \big(-3a^3\cos^2 t\sin t, 3a^3\sin^2 t\cos t\big) \end{array} \right|$$

Pro výpočet použijeme důsledku Greenovy věty, podle kterého lze obsah vnitřku křivky c vypočítat pomocí křivkového integrálu:

$$P = \iint_{int\ c} 1\,dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_c -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(-a^3\sin^3 t\cdot\big(-3a^3\cos^2 t\sin t\big) + a^3\cos^3 t\cdot 3a^3\sin^2 t\cos t\Big)\,dt =$$

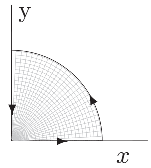
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3a^2\cos^2 t\sin^4 t + 3a^2\sin^2 t\cos^4 t)\,dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4}\,dt = \frac{3}{8}\,a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3}{16}\,a^2\Big[t - \frac{\sin 4t}{4}\Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\,a^2\pi$$

■

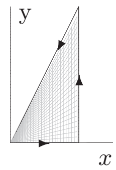
- Je dána množina D a vektorové pole $\vec{f}$.
  a) Napište Greenovu větu (předpoklady a tvrzení).
  b) Načrtněte množinu D a vyznačte křivku c, která je kladně orientovanou hranicí této množiny D.
  c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f}$ podél křivky c.

538. $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ $\quad \vec{f} = (xy,\ x^2 + 2x)$



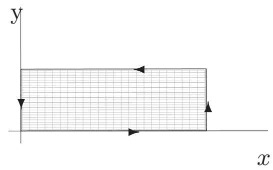
$\left[\frac{8}{3} + 2\pi\right]$

539. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\, 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2x\}, \quad \vec{f} = (y^2 - 3y,\, xy)$



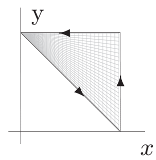
$\left[\frac{14}{3}\right]$

540. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\, 0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 1\}, \quad \vec{f} = \left(\frac{1}{3}\, y^3,\, x^2 + y^2\right).$



$[8]$

541. $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\, 0 \le x \le 4,\, 4 - 4x \le y \le 4\}, \quad \vec{f} = \big(y^2,\, (x + y)^2\big)$



$\left[\frac{128}{3}\right]$

542. Vyšetřete existenci integrálu $\displaystyle\oint_c \Big(-\frac{1}{x^2}, 2x\Big) \cdot d\vec{s}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty, jestliže $c \subset \mathbb{E}_2$ je záporně orientovaná křivka :
a) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 1\}$,
b) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\; x^2 + (y - 2)^2 = 1\}$,
c) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\; (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$.
V kladném případě vypočtěte integrál pomocí Greenovy věty.

[a) neexistuje, nelze
b) neexistuje, nelze
c) existuje, lze; $\;-2\pi$]

- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a křivka c.
  a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet daného integrálu $\displaystyle\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
  b) Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
  c) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.

543. $\vec{f} = (-y,\, x), \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 16\}$, která je orientovaná záporně.

$[-32\pi]$

544. $\vec{f} = \big(1 - x^2, x(1 + y^2)\big), \quad c = \partial\, D$ je hranice množiny $D = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle\}$, která je orientovaná záporně. $\left[\frac{32}{3}\right]$

545.* $\vec{f} = \Big(\frac{2y^3}{3} + g(x),\, xy^2 + h(y)\Big)$, kde g, h jsou libovolné funkce jedné proměnné se spojitou derivací v $\mathbb{R}$, $\;c\;$ je záporně orientovaná hranice množiny

$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y \geq 0,\ y \leq 2 - x,\ x \geq y^2\}$. $\left[\frac{13}{60}\right]$

546. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 1\,,\ 2y)$ působením po dané orientované křivce:
a) c_1: úsečka AB, s počátečním bodem $A = [-1, 0]$ a koncovým bodem $B = [1, 0]$.
b) $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ s počátečním bodem $B = [1, 0]$.
c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$.
[a) 2, b) -2, c) 0]

547. Vypočtěte cirkulaci $\vec{f} = \dfrac{2(y, -x)}{x^2 + y^2}$ po kladně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;$ $x^2 + y^2 = 16\}$. Lze použít Greenovu větu ? Odpověď zdůvodněte! [-4π, nelze]

548. Pomocí Greenovy věty vypočtěte cirkulaci vektoru $\vec{f} = \Big(y, (x - y)^2\Big)$ po záporně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$. [$-\pi$]

549.* Odvoďte pomocí křivkového integrálu vzorec pro plošný obsah obrazce, který je ohraničen elipsou $c = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. [$\pi\, ab$]

550.* Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah obrazce omezeného obloukem cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a úsečkou z bodu $[0, 0]$ do bodu $[2\pi a, 0]$. [$3\pi a^2$]

551.* Nechť c_1 je úsečka z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 1]$, c_2 je část paraboly $y = x^2$ opět z $[0, 0]$ do $[1, 1]$ a $I_1 = \displaystyle\int_{c_1} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy, I_2 = \int_{c_2} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$.
Užitím Greenovy věty vypočtěte $I_1 - I_2$.

$$\left[\pm\frac{1}{3}.\quad \begin{array}{l} \text{Návod: } \displaystyle\oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_1} - \int_{c_2} \text{ (záp.orient.)} \\ \text{nebo } \displaystyle\oint_{c_1\cup c_2} = \int_{c_2} - \int_{c_1} \text{ (klad.orient.)} \end{array}\right]$$

552.* Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c \left(x\mathrm{e}^{-y^2},\ -x^2y\mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot d\vec{s}$, kde c je kladně orientovaný obvod čtverce s vrcholy $[1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[1, 1]$.
$\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

553. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c (y^2\mathrm{e}^x - y^3, 2y\mathrm{e}^x - 3) \cdot d\vec{s}$, kde $c = c_1 \cup c_2$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 0,\ y \in \langle -2, 2\rangle\}$, $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4x^2 + y^2 = 4,$ $x \geq 0\}$, přičemž $[0, 2]$ je počáteční bod křivky c_1. [3π]