

IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ je zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle$ do \mathbb{E}_3 . Platí-li :

- 1) $P(t)$ je spojitě a je prosté na $\langle a, b \rangle$
(k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ byla ryze monotónní na $\langle a, b \rangle$),
- 2) derivace $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ je omezené a spojitě zobrazení na (a, b) ,
- 3) $\dot{P}(t) \neq \vec{0}$ pro všechna $t \in (a, b)$,

potom množinu $c = \{X \in \mathbb{E}_3; X = P(t), t \in \langle a, b \rangle\}$ nazveme **jednoduchou hladkou křivkou** v \mathbb{E}_3 a zobrazení P její **parametrizací**.

Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v \mathbb{E}_2 .

Řekneme, že křivka c je **orientována souhlasně** s parametrizací, resp. **nesouhlasně** s parametrizací P , jestliže počáteční bod této křivky je $P(a)$, resp. $P(b)$.

Křivku c v \mathbb{E}_3 (též v \mathbb{E}_2) lze orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru $\vec{\tau}$

v bodě $P(t)$. Je-li $\vec{\tau} = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ pak říkáme, že křivka c je souhlasně orientována s parametrizací P . Je-li $\vec{\tau} = -\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ pak říkáme, že křivka c je nesouhlasně orientována s parametrizací P .

POZNÁMKA : Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je "proti směru pohybu hodinových ručiček", resp. "ve směru pohybu hodinových ručiček."

Příklad 424. Je dána křivka $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^2, x \in \langle -4, 4 \rangle\}$ s počátečním bodem

$A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = [x(t), y(t)]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c , jestliže

- a) $P(t) = [t, t^2]$, $t \in \langle -4, 4 \rangle$, b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $t \in \langle -2, 2 \rangle$,
- c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $t \in \langle 0, 16 \rangle$.

Řešení:

- a) $P(t) = [t, t^2]$, $t \in \langle -4, 4 \rangle$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c . Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.
- b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $t \in \langle -2, 2 \rangle$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c . Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x -ovou souřadnici $-4 < 0$.
- c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $t \in \langle 0, 16 \rangle$ není parametrizací dané křivky, protože opět $x = \sqrt{t} \geq 0$. Kromě toho $\dot{P}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1\right)$ není omezená na $(0, 16)$.

■

Příklad 425. Je dána půlkružnice $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže

a) $P(t) = [a \cos t, a \sin t], t \in \langle 0, \pi \rangle,$
 b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in \langle -a, a \rangle,$ c) $P(t) = \left[\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \right], t \in \mathbb{R}.$

Řešení:

- a) Ano, $P(t)$ je parametrizací, protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.
 b) Není parametrizací, protože $\dot{P}(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right)$ není omezená na $(-a, a)$.
 c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{\sqrt{1+t^2}} = 0 \implies \text{orientace}$$

křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{P}(t)$.

Protože je $\dot{x}(t) = \frac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t , je funkce $x(t)$ monotónní

a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0) \iff \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \implies$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2 t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

- Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci :

Příklad 426. Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2), \quad c : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}. \text{ Úsečku } AB \text{ obdržíme pro } t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

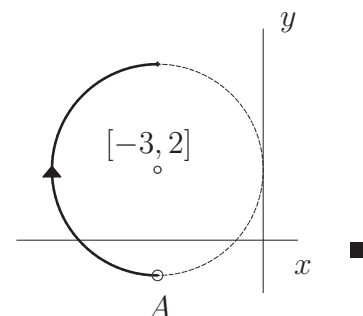
bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací. \blacksquare

Příklad 427. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9, x \leq -3\}, \quad A = [-3, -1]$

Řešení:

$$P(t) : \begin{cases} x = -3 + 3 \cos t \\ y = 2 + 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle,$$

orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $P(3\pi/2) = A$

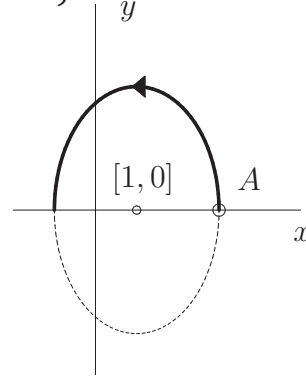


Příklad 428. $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0 \right\}, \quad A = [3, 0]$

Řešení:

$$P(t) : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

orientace křivky je souhlasná s parametrizací, protože $P(0) = A$.



Příklad 429. $c = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 4x, y + z = 0, z \geq 0 \}, \quad A = [0, 0, 0]$

Řešení: Křivka c je řezem válcové plochy $x^2 + y^2 = 4x$ rovinou $y + z = 0$.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \implies (x-2)^2 + y^2 = 4, z = -y, z \geq 0 \implies$$

$$P(t) : \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = -2 \sin t \end{cases} \implies -2 \sin t \geq 0 \implies \sin t \leq 0 \implies t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$$

$$A = [0, 0, 0] \implies \begin{aligned} 2 + 2 \cos t = 0 &\implies \cos t = -1 \\ \sin t = 0 &\implies \sin t = 0 \end{aligned} \implies t = \pi$$

$P(\pi) = A \implies$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

Příklad 430. $c = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y, x \geq 0 \}, \quad A = [0, 0, -a]$

Řešení: Jde o řez kulové plochy rovinou procházející středem kulové plochy. Použijeme sférické souřadnice, v nichž $r = a, \varphi = \frac{\pi}{4}$; ϑ označíme jako parametr t .

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos t = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos t = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ z &= a \sin t \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} x \geq 0 &\implies \cos t \geq 0 \implies t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ t = -\frac{\pi}{2} : A &= [0, 0, -a] \implies \text{orientace křivky je} \\ &\text{souhlasná s parametrizací.} \end{aligned}$$

• Rovinná křivka c je dána v parametrickém tvaru. Najděte její implicitní rovnici a křivku pojmenujte:

Příklad 431. $c = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 2t + 1, y = 3 - t, t \in \langle 1, 4 \rangle \},$ orientace je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Jde o úsečku s počátečním bodem $A = P(1) = [3, 2]$ a koncovým bodem $B = P(4) = [9, -1]$. Vyloučením parametru t obdržíme:

$$t = 3 - y \implies x = 2(3 - y) + 1 \implies x + 2y = 7$$

Příklad 432. $c = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1, t \in \langle 0, 3 \rangle \},$ orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení: Po odečtení dostáváme $x - y = 2$. Opět máme úsečku s počátečním bodem

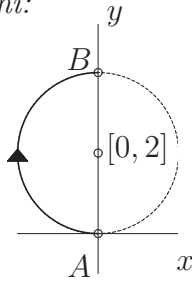
$$A = P(3) = [6, 4] \text{ a koncovým } B = P(0) = [3, 1].$$

Příklad 433. $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 2 \sin^2 t, y = 4 \cos^2 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$,
orientace c je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Sečteme $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \sin^2 t + \cos^2 t \implies 2x + y = 4$. Znovu máme úsečku s počátečním bodem $A = P(0) = [0, 4]$ a koncovým $B = P\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2, 0]$. ■

Příklad 434.* Křivka c je daná polární rovnicí $r(\varphi) = 4 \sin \varphi$, $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$,
orientace křivky c je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = r \cos \varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi = 4 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

počáteční bod $A = [0, 0]$, pro $\varphi = \pi$
koncový bod $B = [0, 4]$, pro $\varphi = \pi/2$

$$x^2 + y^2 = (4 \sin \varphi \cos \varphi)^2 + (4 \sin^2 \varphi)^2 = 16 \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4 \cdot 4 \sin^2 \varphi = 4y,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \implies x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad (\text{kružnice})$$

Tutéž část kružnice jsme mohli parametrizovat i jinak :

$P(t) = [2 \cos t, 2 + 2 \sin t]$, $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, orientace je nesouhlasná s parametrizací. ■

• Ověřte, že $c = c_1 \cup c_2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Najděte parametrizace křivek c_1, c_2 , nakreslete je a rozhodněte o jejich orientaci, jestliže A je počátečním bodem c_1 a též koncovým bodem c_2 :

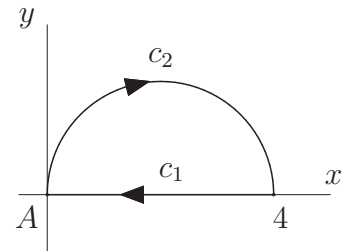
Příklad 435. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2$, $A = [0, 0]$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4x, y \geq 0\}$;
 $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 0, x \in \langle 0, 4 \rangle\}$

Řešení:

$$c_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 4 \implies P_1 : \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t_1 \\ y = 2 \sin t_1 \end{cases}$$

$t_1 \in \langle 0, \pi \rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací,

$$P_2 : \begin{cases} x = t_2 & t_2 \in \langle 0, 4 \rangle, \text{ orientace } c \text{ je} \\ y = 0 & \text{nesouhlasná s parametrizací.} \end{cases}$$

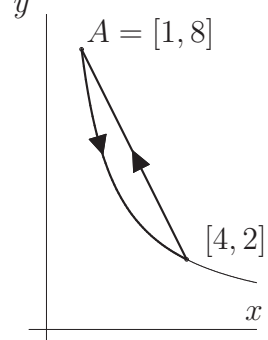


Příklad 436. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2$, $A = [1, 8]$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; xy = 8, x \in \langle 1, 4 \rangle\}$;
 $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y + 2x = 10, x \in \langle 1, 4 \rangle\}$

Řešení:

$$P_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = \frac{8}{t_1} \end{cases}, \quad t_1 \in \langle 1, 4 \rangle, \text{ orientace } c \text{ je} \\ \text{souhlasná s parametrizací,}$$

$$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 10 - 2t_2 \end{cases}, \quad t_2 \in \langle 1, 4 \rangle, \text{ orientace } c \text{ je} \\ \text{nesouhlasná s parametrizací.}$$



■

437. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2, A = [1, 1];$ $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle\};$
 $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle\}$

$$\left[\begin{array}{l} P_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = t_1 \\ y = t_1 \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t_1 \in \langle 0, 1 \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \quad \mid \quad P_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = t_2 \\ y = t_2^2 \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t_2 \in \langle 0, 1 \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \end{array} \right]$$

438. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_3, A = [3, 0, 2];$ $c_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9, x - z = 1, y \geq 0\};$
 $c_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x - z = 1, y = 0\}$

$$\left[\begin{array}{l} P_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \cos t_1 \\ y = 3 \sin t_1 \\ z = 3 \cos t_1 - 1 \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t_1 \in \langle 0, \pi \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \quad \mid \quad P_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = t_2 \\ y = 0 \\ z = t_2 - 1 \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t_2 \in \langle -3, 3 \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \end{array} \right]$$

• Navrhněte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A :

439. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 3x + y = 1, x \in \langle -1, 2 \rangle\};$ $A = [-1, 4]$

$$\left[P(t) : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - 3t \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t \in \langle -1, 2 \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

440. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2x - y = 2, x + z = 3, y \in \langle 0, 2 \rangle\};$ $A = [2, 2, 1]$

$$\left[P(t) : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t \in \langle 1, 2 \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

441. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 4x^2 + z^2 = 4, y + z = 0, y \leq 0\};$ $A = [-1, 0, 0]$

$$\left[P(t) : \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = -2 \sin t \\ z = 2 \sin t \end{array} \right. \mid \begin{array}{l} t \in \langle 0, \pi \rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

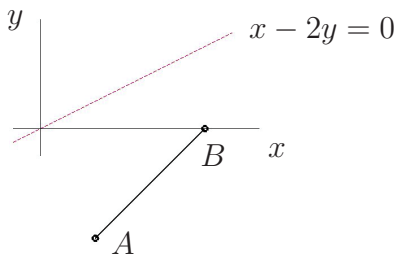
IV.2. Křivkový integrál skalární funkce

• Vyšetřete existenci křivkového integrálu $\int_c f ds$. Pokud existuje, tak jej vypočítejte :

Příklad 442. $\int_c \frac{1}{x - 2y} ds,$ c je úsečka s krajními body A, B , kde
 a) $A = [1, -2], B = [3, 0],$ b) $A = [1, -2], B = [3, 4].$

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v \mathbb{E}_2 s výjimkou přímky $x - 2y = 0$.
 V okolí této přímky není funkce f omezená.

a)

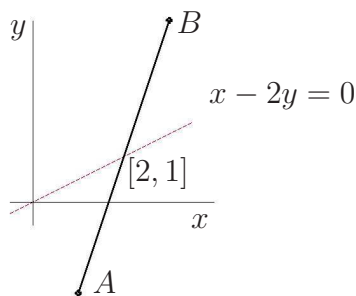


Integrál existuje, protože funkce $f(x, y) = \frac{1}{x - 2y}$ je na úsečce AB spojitá.

$$\int_c \frac{1}{x - 2y} ds = \left| \begin{array}{l} P(t) : \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ t \in \langle 0, 1 \rangle \end{array} \mid \begin{array}{l} ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \\ = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \\ = \sqrt{4 + 4} dt = 2\sqrt{2} dt \end{array} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2} dt}{1 + 2t - 2(-2 + 2t)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{5-2t} dt = -\sqrt{2} \int_0^1 \frac{-2dt}{5-2t} = -\sqrt{2} \left[\ln |5-2t| \right]_0^1 = -\sqrt{2} \cdot (\ln 3 - \ln 5) = \\
 &= \sqrt{2} \cdot \ln \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

b)



Integrál neexistuje, protože úsečka AB protíná přímku $x - 2y = 0$ v bodě $[2, 1]$ a funkce f není v okolí bodu $[2, 1]$ omezená.

Např.: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2y} = +\infty$ je pro $y = 1, x \rightarrow 2^+$.

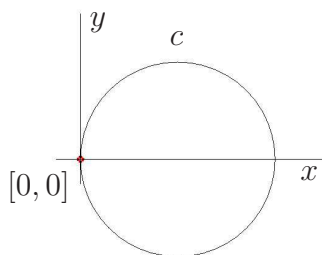
■

Příklad 443. $\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds,$ a) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4x\},$

b) $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4\}$

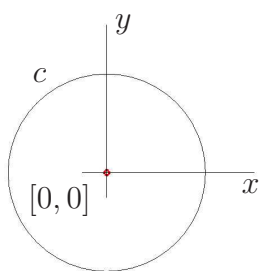
Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2 \setminus \{[0, 0]\}.$

a)



Bod $[0, 0] \in c$ a $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty,$
takže integrál neexistuje;

b)



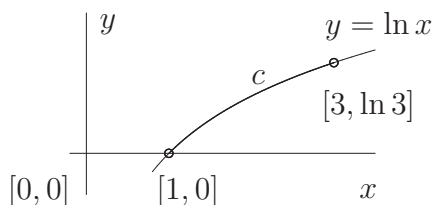
Daná funkce je spojitá na $c,$ takže integrál existuje.

$$\begin{aligned}
 &\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \\
 &= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2 \cos t, 2 \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \sqrt{(4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) dt} = 2 dt \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos t + 2}{2} \cdot 2 dt = 2 \left[\sin t + t \right]_0^{2\pi} = 4\pi.
 \end{aligned}$$

■

Příklad 444. $\int_c x^2 ds,$ $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \ln x, x \in \langle 1, 3 \rangle\}$

Řešení: Je zřejmé, že integrál existuje :



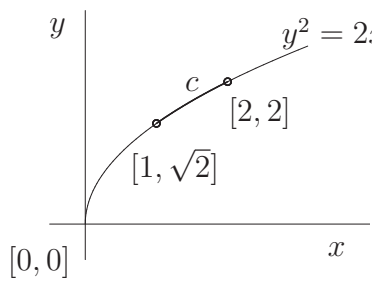
$$\left. \begin{array}{l} P(t): \quad x = t \\ \quad \quad y = \ln t \\ \quad \quad t \in \langle 1, 3 \rangle \end{array} \right| \begin{array}{l} ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \\ = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} dt \end{array}$$

$$\int_c x^2 ds = \int_1^3 t^2 \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} dt = \int_1^3 \sqrt{t^2+1} \cdot t dt = \left| \begin{array}{l} t^2+1 = u \\ 2t dt = du \end{array} \right|_{u \in (2, 10)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^{10} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2u^{3/2}}{3} \right]_2^{10} = \frac{1}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}). \quad \blacksquare$$

Příklad 445. $\int_c \frac{x^2}{y} ds$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y^2 = 2x, y \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle\}$

Řešení: Integrál existuje :



$$\int_c \frac{x^2}{y} ds =$$

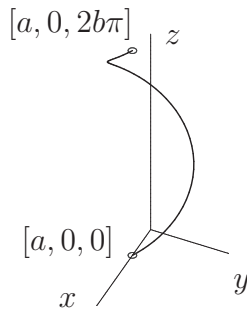
$$= \left| \begin{array}{l} P(t): \quad y = t \\ \quad \quad x = \frac{t^2}{2} \\ \quad \quad t \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{t^2+1} = \\ = \sqrt{1+t^2} \\ ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \sqrt{1+t^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^4}{4t} \cdot \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \int_{\sqrt{2}}^2 t^2 \cdot \sqrt{1+t^2} \cdot t dt = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+t^2} = u \\ 1+t^2 = u^2 \\ 2t dt = 2u du \end{array} \right|_{u \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{5} \rangle} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (u^2 - 1) \cdot u \cdot u du = \frac{1}{4} \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{30} (25\sqrt{5} - 6\sqrt{3}). \quad \blacksquare$$

Příklad 446. $\int_c (x^2 + y^2 + z^2) ds$, c je první závit šroubovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

Řešení:



Integrál existuje :

$$\int_c (x^2 + y^2 + z^2) ds =$$

$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [a \cos t, a \sin t, bt], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} \\ ds = \|\dot{P}(t)\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left[a^2 t + \frac{b^2 t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} b^2 \pi^3 \right). \quad \blacksquare$$

• Zdůvodněte, na které z křivek c existuje integrál $\int_c f ds$. Příslušný integrál vypočítejte.

447. $\int_c \frac{3-y}{y-x+2} ds$, a) c je kružnice $x^2 - 2x + y^2 = 0$;

[neexistuje, daná funkce není na křivce C omezená]

b) c je úsečka AB , kde $A = [2, 3]$, $B = [0, 1]$.

[existuje, daná funkce je na úsečce AB spojitá, $\sqrt{8}/3$]

$$448. \int_c \frac{1}{x^2 + y^2} ds, \quad \begin{array}{l} \text{a) } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = t - 3, y = 3 - t, t \in \langle 1, 4 \rangle\} \quad [\text{neexistuje}] \\ \text{b) } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2\} \quad \left[\text{existuje, } \frac{2\pi}{a} \right] \end{array}$$

$$449. \int_c \frac{1}{x^2 - y} ds, \quad \begin{array}{l} \text{a) } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 2x, x \in \langle 1, 3 \rangle\} \quad [\text{neexistuje}] \\ \text{b) } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 9, x \in \langle 0, 2 \rangle\} \quad \left[\text{existuje, } -\frac{\ln 5}{6} \right] \end{array}$$

$$450. \int_c xy ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, x \leq 0, y \geq 0\} \quad \left[-\frac{a^3}{2} \right]$$

$$451. \int_c \sqrt{2y} ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \\ \text{(oblouk cykloidy)} \quad [4\pi a\sqrt{a}]$$

$$452. \int_c \sqrt{x} ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \sqrt{x}, x \in \langle 1, 2 \rangle\} \quad \left[\frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \right]$$

$$453. \int_c (xy + 2) ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = \cos t, y = 3 \sin t, z = \sqrt{8} \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \\ [12\pi]$$

$$454. \int_c z ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, t \in \langle 0, \pi \rangle\} \\ \text{(kuželová šroubovice)} \quad \left[\frac{1}{3} \left((2 + \pi^2) \sqrt{2 + \pi^2} - 2\sqrt{2} \right) \right]$$

$$455. \int_c (x + y) ds, \quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \\ \text{(Použijte parametrizaci z příkladu 430.)} \quad \left[t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, a^2\sqrt{2} \right]$$

$$456. \int_c xyz ds, \quad c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ v 1. oktantu} \} \\ \text{(} c \text{ leží v rovině } z = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ pak } x = \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t) \quad \left[\frac{a^4\sqrt{3}}{32} \right]$$

- Je dána skalární funkce f , křivka c je průnikem daných dvou ploch.

- Navrhnete parametrizaci této křivky.
- Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
- Vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce f .

$$457. f(x, y, z) = y^2 + 2z^2, \text{ křivka } c \text{ je průsečnicí rovin } x + y + 2z = 5, 2x + 5y - 2z = 4 \\ \text{v prvním oktantu.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) např. : } x = 7 - 4t, y = 2t - 2, z = t, t \in \langle 1, 7/4 \rangle \\ \text{b) } \dot{P}(t) = (-4, 2, 1), \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{21} \\ \text{c) } 111\sqrt{21}/32 \end{array} \right]$$

$$458. f(x, y, z) = z^2, \text{ křivka } c \text{ je řez válcové plochy } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ a rovinou } 4x - 3z = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) např. : } x = 3 \cos t, y = 5 \sin t, z = 4 \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \text{b) } \dot{P}(t) = (-3 \sin t, 5 \cos t, -4 \sin t), \|\dot{P}(t)\| = 5 \\ \text{c) } 80\pi \end{array} \right]$$

IV.3. Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

- Vypočítejte délku ℓ křivky c , jestliže :

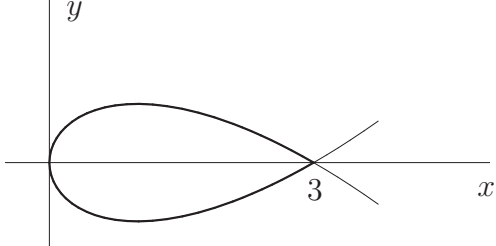
Příklad 459. $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 2 - \ln(\cos x), \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \right\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_c 1 \, ds = \left| \begin{array}{l} P(t): \quad x = t \\ \quad y = 2 - \ln(\cos t), \\ \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{P}(t) = \left(1, -\frac{1}{\cos t} \cdot (-\sin t) \right) \\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{\cos t} \right)^2} = \left| \frac{1}{\cos t} \right| \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t} \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t} \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 t} \, dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = s \\ \cos t \, dt = ds \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right| \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln(3 + 2\sqrt{2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 460. $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, \quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle \right\}$

Řešení: Jde o délku smyčky, jelikož $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 3$ a $y(-\sqrt{3}) = y(\sqrt{3}) = 0$.

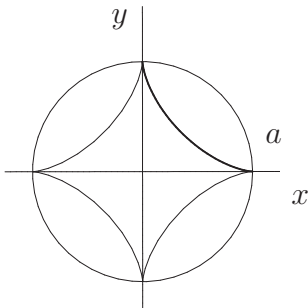
$$\begin{aligned} \ell &= \int_c 1 \, ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \, dt = \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} \, dt = \end{aligned} \quad \begin{array}{c} y \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array}$$


$$\begin{aligned} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} \, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} \, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + t^2) \, dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2) \, dt = 2 \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 461.* $c = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \}$

Řešení: Jde o asteroidu, skládající se ze čtyř stejně dlouhých oblouků. Proto

$$\begin{aligned} \ell &= \int_c 1 \, ds = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \, dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} \, dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \, dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t \, dt = 12a \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Příklad 462.* c je část logaritmické spirály $r = ae^{k\varphi}$, ležící uvnitř kruhu o poloměru $r = a$, $k > 0$, $a > 0$.

Řešení: Křivka c je zadána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$. V kartézských souřadnicích bude vyjádřena :

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \dot{y} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Potom } ds &= \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} d\varphi = \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi, \text{ kde } r' = \frac{dr}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Z podmínky $|ae^{k\varphi}| \leq a$ plyne $\varphi \leq 0$. Tedy

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{(ake^{k\varphi})^2 + (ae^{k\varphi})^2} d\varphi = \int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi} \sqrt{k^2 + 1} d\varphi = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} a\sqrt{k^2 + 1} \int_{\beta}^0 e^{k\varphi} d\varphi = \\ &= a\sqrt{k^2 + 1} \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{k\varphi}}{k} \right]_{\beta}^0 = a\sqrt{k^2 + 1} \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{e^{k\beta}}{k} \right) = \frac{a\sqrt{k^2 + 1}}{k}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 463.* $c = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz, y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz, t \in \mathbb{R} \right\}$. Stanovte vzdálenost od počátku souřadnic do nejbližšího bodu, v němž je tečna rovnoběžná s osou y .

Řešení: Tečna je rovnoběžná s osou y , když $\dot{x} = 0 \implies \dot{x} = \frac{\cos t}{t} \implies t_2 = \frac{\pi}{2}, t_1 = 1$.

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{t} \implies \ell = \int_c 1 ds = \int_1^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^{\pi/2} = \ln \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

• Vypočítejte obsahy daných částí válcových ploch omezených souřadnou rovinou (xy) a zadanými plochami :

Příklad 464.* $y^2 = 4x, z = 2\sqrt{x - x^2}$

Řešení: Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z je "shora" omezená plochou

$$z = f(x, y) = 2\sqrt{x - x^2}. \text{ Obecně } P = \int_c f(x, y) ds =$$

$$\left| \begin{array}{l} c : y^2 = 4x, c = c_1 \cup c_2, \quad c_1 : y = 2\sqrt{x} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad c_2 : y = -2\sqrt{x} \\ ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx \\ z = 2\sqrt{x - x^2} \implies x(1-x) \geq 0 \implies x \in (0, 1), \quad \int_{c_1} f ds = \int_{c_2} f ds \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^1 2\sqrt{x - x^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{(1-x)(x+1)} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 465.* $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = xy, x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } P &= \int_c xy \, ds = \left| c : x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \implies \begin{cases} P(t) = \left[\frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t \right], & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \dot{P}(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t \right), & ds = \frac{1}{2} dt \end{cases} \right| \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{8} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Vypočtete hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho = \varrho(x, y)$, resp. $\varrho(x, y, z)$:

Příklad 466. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\varrho(x, y) = x$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } m &= \int_c \varrho \, ds = \int_c x \, ds = \left| c : P(t) = [a \cos t, y = a \sin t], & t \in \langle 0, \pi/2 \rangle \right| = \\ & \left| \dot{P}(t) = (-a \sin t, a \cos t), & \|\dot{P}(t)\| = a \right| = \\ &= \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \, dt = a^2 \cdot [\sin t]_0^{\pi/2} = a^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 467. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = at, y = \frac{a}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{a}{3} t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$,

$$\varrho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } m &= \int_c \varrho \, ds = \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}} \, ds = \\ &= \left| \begin{array}{l} P(t) : \quad x = at \quad \implies \dot{x} = a \\ \quad \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} t^2 \implies \dot{y} = \sqrt{2}at \\ \quad \quad z = \frac{a}{3} t^3 \quad \implies \dot{z} = at^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} = \\ = a\sqrt{1 + 2t^2 + t^4} \\ ds = a(1 + t^2) dt \end{array} \right. \right| = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{2at^2}{a\sqrt{2}}} \cdot a \cdot (1 + t^2) \, dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 at(1 + t^2) \, dt = a\sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{4} a. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

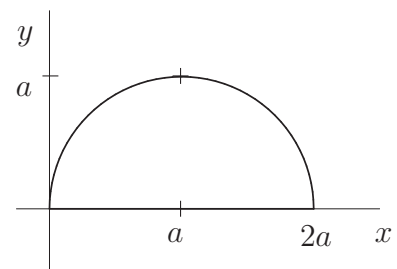
Příklad 468. Křivka c je první závit šroubovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$ a hustota se rovná čtverci vzdálenosti od osy z .

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } m &= \int_c \varrho \, ds = \int_c (x^2 + y^2) \, ds = \left| \begin{array}{l} P(t) : \quad x = a \cos t \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \quad \quad y = a \sin t \quad \left| \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \right. \\ \quad \quad z = at \quad \quad \quad \left. ds = a\sqrt{2} dt \right. \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a\sqrt{2} \, dt = a^3 \cdot 2\sqrt{2}\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 469. $c = c_1 \cup c_2$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 2ax, y \geq 0\}$;
 $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 0, x \in \langle 0, 2a \rangle, a > 0\}$, $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$

Řešení:

$$\begin{aligned} m &= \int_c \varrho \, ds = \int_{c_1} \varrho \, ds + \int_{c_2} \varrho \, ds = \\ &= \int_{c_1} (x^2 + y^2) \, ds + \int_{c_2} (x^2 + y^2) \, ds = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} c_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax = 0 \implies (x-a)^2 + y^2 = a^2 \implies \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = a + a \cos t \\ y = a \sin t \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} ds = a dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \right. \\ c_2 : y = 0 \implies ds = dx, x \in \langle 0, 2a \rangle \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^\pi \left(a^2(1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \right) \cdot a dt + \int_0^{2a} x^2 dx = a^3 \int_0^\pi (2 + 2 \cos t) dt + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} = \\
 &= 2a^3 \left[t + \sin t \right]_0^\pi + \frac{8a^3}{3} = 2a^3 \pi + \frac{8a^3}{3}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

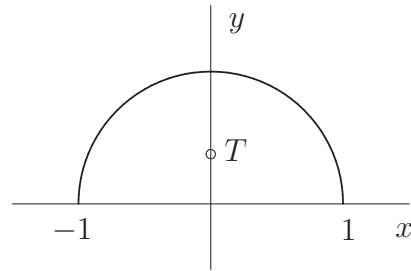
- Určete těžiště T křivky c při hustotě $\varrho(x, y)$, resp. $\varrho(x, y, z)$:

Příklad 470. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $\varrho(x, y) = a(1 - y)$, $a > 0$

Řešení:

$$T = [0, y_T], \text{ kde } y_T = \frac{M_x}{m}.$$

(Všimněte si, že hustota nezáleží na x čili hmotnost levé a pravé čtvrtkružnice je stejná.)



$$\left| \begin{array}{l} P(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{P}(t) : \begin{cases} \dot{x} = -\sin t \\ \dot{y} = \cos t \end{cases} \\ ds = \|\dot{P}(t)\| dt = dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \right. \\ m = \int_c \varrho ds = \int_c a(1 - y) ds = \int_0^\pi a(1 - \sin t) dt = a \left[t + \cos t \right]_0^\pi = a(\pi - 2) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_c y \varrho ds = a \int_0^\pi (1 - \sin t) \sin t dt = a \int_0^\pi \left(\sin t - \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= a \left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^\pi = a \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$y_T = \frac{a \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)}{a(\pi - 2)} = \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

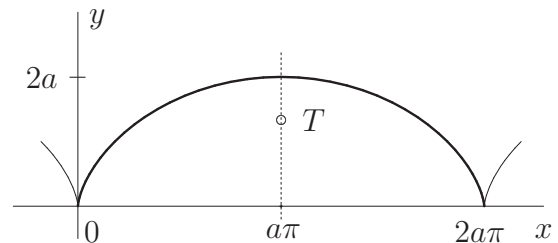
$$T = \left[0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \right]. \quad \blacksquare$$

Příklad 471. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, $\varrho(x, y) = 1$

Řešení:

c je první oblouk cykloidy, $T = [\pi a, y_T]$,

$$y_T = \frac{M_x}{m}; \quad m = \int_c \varrho(x, y) ds$$



$$\left| \begin{array}{l} \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = a(1 - \cos t) \\ \dot{y} = a \sin t \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \|\dot{P}(t)\| = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ ds = a\sqrt{2 - 2\cos t} dt = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} dt \end{array} \right. \end{array} \right|$$

$$m = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a;$$

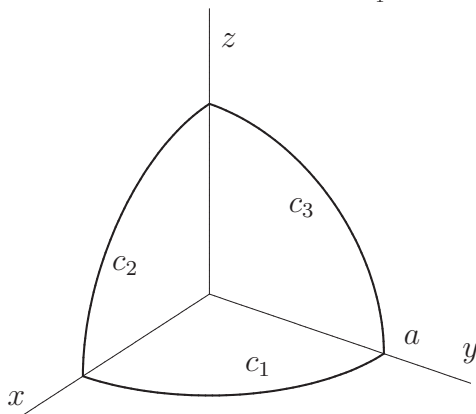
$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_c y \varrho(x, y) ds = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} dt = a^2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} dt = \\
 &= a^2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \cdot \sin^3 \frac{t}{2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = \left[\begin{array}{l} \cos \frac{t}{2} = z \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = dz \end{array} \right] = \\
 &= -4a^2 \cdot 2 \cdot \int_1^{-1} (1 - z^2) dz = 8a^2 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 16a^2 \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = 16a^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32a^2}{3}; \\
 y_T &= \frac{32a^2}{3 \cdot 8a} = \frac{4}{3} a, \quad \boxed{T = \left[\pi a, \frac{4}{3} a \right]} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Příklad 472. $c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$, $c_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = a^2, z = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$,
 $c_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 = a^2, y = 0, x \geq 0, z \geq 0\}$,
 $c_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2 + z^2 = a^2, x = 0, y \geq 0, z \geq 0, a > 0\}$, $\varrho(x, y) = 1$

Řešení: Křivka c je symetrická vzhledem k osám x, y, z tedy $x_T = y_T = z_T$. Omezíme se

$$\text{na } x_T = \frac{M_{yz}}{m}. \quad m = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{3}{2} \pi a,$$

$$M_{yz} = \int_c x \varrho(x, y) ds = \int_{c_1} x ds + \int_{c_2} x ds + \int_{c_3} x ds =$$



$$\left. \begin{array}{l}
 c_1: \quad P_1(t) = [a \cos t, a \sin t, 0] \\
 \quad \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \quad \|\dot{P}_1(t)\| = a \\
 c_2: \quad P_2(t) = [a \cos t, 0, a \sin t] \\
 \quad \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \quad \|\dot{P}_2(t)\| = a \\
 c_3: \quad P_3(t) = [0, a \cos t, a \sin t] \\
 \quad \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \quad \|\dot{P}_3(t)\| = a
 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2 \cos t dt + \int_0^{\pi/2} a^2 \cos t dt + \int_0^{\pi/2} 0 dt = 2a^2 \left[\sin t \right]_0^{\pi/2} = 2a^2$$

$$x_T = y_T = z_T = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\boxed{T = \left[\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi} \right]} \quad \blacksquare$$

Příklad 473. Určete moment setrvačnosti vzhledem k souřadnicové rovině (yz) prostoro-
 rově křivky $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
 je-li $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \int_c \varrho \cdot x^2 ds = \int_c (x^2 + y^2)x^2 ds = \left| \begin{array}{l} ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \\ = \sqrt{a^2 + b^2} dt \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a^2 \cos^2 t \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = a^4 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= \frac{a^4 \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = a^4 \sqrt{a^2 + b^2} \pi. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Příklad 474. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $c \subset \mathbb{E}_3$:

$$c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}, \text{ je-li } \varrho(x, y, z) = z.$$

Řešení: c je řez eliptické válcové plochy rovinou $x + z = 1$.

$$\begin{aligned} I_z &= \int_c (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) ds = \int_c (x^2 + y^2) z ds = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \cos t \quad \implies \quad \dot{x} = -\sin t \\ P(t) : \quad y = \sqrt{2} \sin t \quad \implies \quad \dot{y} = \sqrt{2} \cos t \\ \quad \quad z = 1 - \cos t \quad \implies \quad \dot{z} = \sin t \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 2 \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2} \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right. \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2 \sin^2 t)(1 - \cos t) \cdot \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)(1 - \cos t) dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 - \cos 2t}{2} - \cos t - \sin^2 t \cos t \right) dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} - \sin t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\sqrt{2} \pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Je dána křivka c a délková hustota ϱ .

- Navrhněte parametrizaci $X = P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ dané křivky c a určete délku vektoru $\dot{P}(t)$.
- Vypočítejte hmotnost křivky c , je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ϱ .
- Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

475. Křivka c je úsečka AB , kde $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$, $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [1 + t, 3t], t \in \langle 0, 1 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{10} \\ b) m = 6\sqrt{10}/3 \\ c) J_0, \varrho = 1 \end{array} \right]$$

476. Křivka c je úsečka AB , kde $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, $\varrho(x, y) = x^2 y$.

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [t, 1 + t], t \in \langle 0, 1 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{2} \\ b) m = 7\sqrt{2}/12 \\ c) M_x, \varrho = x^2; M_y, \varrho = xy; J_y, \varrho = y \end{array} \right]$$

477. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 9, x \geq 0\}$, $\varrho(x, y) = x$.

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [3 \cos t, 3 \sin t], t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = 3 \\ b) m = 18 \\ c) M_y, \varrho = 1 \end{array} \right]$$

478. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = t/3, t \in \langle 0, 3 \rangle\}$,
 $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [3 \cos t, 3 \sin t, t/3], t \in \langle 0, 3 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{82}/3 \\ b) m = 28\sqrt{82}/3 \\ c) J_0, \varrho = 1 \end{array} \right]$$

479. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/4; t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
 $\varrho(x, y, z) = z^2/(x^2 + y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [2 \cos t, 2 \sin t, t/4], t \in \langle 0, 2\pi \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{17}/2 \\ b) m = \sqrt{65} \pi^3 / 96 \\ c) M_{xy}, \varrho = z/(x^2 + y^2); J_{xy}, \varrho = 1/(x^2 + y^2) \end{array} \right]$$

480. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \frac{x^2}{2} + 2 \text{ mezi body } A = [0, 2], B = [2, 4]\}$, $\varrho(x, y) = x$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [t, t^2/2 + 2], t \in \langle 0, 2 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + t^2} \\ b) m = (5\sqrt{5} - 1)/3 \\ c) M_y, \varrho = 1 \end{array} \right]$$

481. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = t \cos t, y = t \sin t, z = t; t \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $\varrho(x, y, z) = z$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [t \cos t, t \sin t, t], t \in \langle 0, 1 \rangle; \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{2+t^2}/2 \\ b) m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3 \\ c) M_{xy}, \varrho = 1 \end{array} \right]$$

• Vypočítejte délku ℓ dané křivky c :

482. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}, x \in \langle 0, 5 \rangle\}$ [19/3]

483. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ [5]

484.* $c = \{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2; r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi), \varphi \in \langle 0, \pi \rangle, a > 0\}$ (horní polovina kardioidy) [4a]

485.* $c = \{[\varphi, r] \in \mathbb{E}_2; r(\varphi) = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \varphi \in \langle 0, 3\pi \rangle\}$ (křivka je dána v polárních souřadnicích)
[3/2 π]

486. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ [16]

487. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/2, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ [π√17]

488. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{4}\}$ mezi body [2, ?], [4, ?] [6 + (ln 2)/4]

489. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = R \cos t, y = R \sin t, z = at, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ [2π√R² + a²]

• Určete hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y)$:

490. $\varrho(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$, $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2 + 2z^2 = 4, x = z, x \geq 0\}$ [32√2/3]

491. $\varrho(x, y) = x(y + 2)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$ [16]

492. $\varrho(x, y) = x^{4/3} + y^{4/3}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle\}$ [a^{7/3}]

493. $\varrho(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ [e^a · a · π/2]

494. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti homogenní půlkružnice o poloměru a , $\varrho(x, y) = k$. [k a³ π/2]

495. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x části asteriody ležící v prvním kvadrantu (tj. křivky $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$), při hustotě $\varrho(x, y) = 1$. [3a³/8]

• Určete těžiště T křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y, z)$:

496. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = a \cos t, y = a \sin t, z = at, a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
 $\varrho = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$ [m = 8√2a³π³/3, M_{xy} = 4√2a²π⁴, T = [0, 0, 3/2 aπ]]

497.* $c = c_1 \cup c_2$, $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = 6\sqrt{x}, x \in \langle 1, 6 \rangle\}$;
 $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = -6\sqrt{x}, x \in \langle 1, 6 \rangle\}$, $\varrho = 1$ [m = 10, M_y = 35, T = [7/2, 0]]