IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládejme, že c je jednoduchá hladká křivka s parametrizací $P(t)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_c \vec{f}\big(X\big)\cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}\Big(P(t)\Big)\cdot \dot{P}(t)\,dt.$$

Znaménko plus (resp. mínus) použijeme, když křivka c je orientována souhlasně (resp. nesouhlasně) s parametrizací $P(t)$.

Poznámka: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat v diferenciálech, tj. ve tvaru

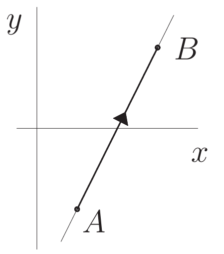
$$\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_c \big(U, V, W\big)\cdot(dx,\,dy,\,dz) = \int_c (U\,dx + V\,dy + W\,dz).$$

Analogicky pro křivku $c \in \mathbb{E}_2$.

- Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce c s počátečním bodem A.

***Příklad* 498**. $\displaystyle\int_c (x, -y^2)\cdot d\vec{s}$, c je úsečka z bodu $A = [1, -2]$ do bodu $B = [3, 2]$.

Řešení:



Parametrické rovnice úsečky:

$$c: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

Parametrizace křivky c:

$P(t) = \big[1 + 2t, -2 + 4t\big]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$,
$\dot{P}(t) = (2, 4)$
$P(0) = [1, -2] = A \Rightarrow$ orientace křivky je souhlasná se zvolenou parametrizací

$$\int_c (x, -y^2)\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \Big(\underbrace{(1 + 2t), -(-2 + 4t)^2}_{\vec{f}\left(P(t)\right)}\Big)\cdot \underbrace{(2, 4)}_{\dot{P}(t)}\,dt =$$

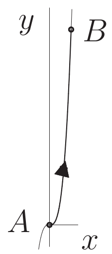
$$= \int_0^1 \Big((1 + 2t)\cdot 2 - (4t - 2)^2\cdot 4\Big)\,dt = 2\int_0^1 \Big(1 + 2t - 2(16t^2 - 16t + 4)\Big)\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 (-7 + 34t - 32t^2)\,dt = 2\Big[-7t + 17t^2 - \frac{32}{3}\,t^3\Big]_0^1 = -\frac{4}{3}$$

■

***Příklad* 499**. $\displaystyle\int_c (x^2 - y^2, 1)\cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^3\}$ z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [3, 27]$.

Řešení:



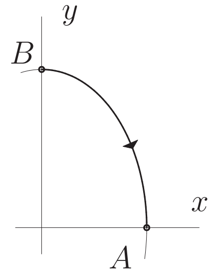
$$c: \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 3\rangle$$

$P(t) = [t, t^3]$, $t \in \langle 0, 3\rangle$
$\dot{P}(t) = (1, 3t^2)$, $P(0) = A \Rightarrow$ souhlasná parametrizace

$$\int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s} = \int_c (t^2 - t^6, 1) \cdot (1, 3t^2)\, dt = \int_0^3 \Big((t^2 - t^6) \cdot 1 + 1 \cdot 3t^2 \Big)\, dt =$$
$$= \left[\frac{4}{3} t^3 - \frac{t^7}{7} \right]_0^3 = -\frac{1935}{7} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 500.** $\displaystyle\int_c (-y, x) \cdot d\vec{s}, \quad c = \Big\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \Big\}, \quad B = [0, b].$

Řešení:



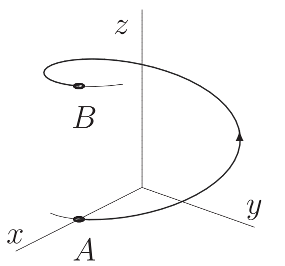
$$c : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

$P(t) = [a \cos t, b \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
$\dot{P}(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad P(0) = [a, 0] = A$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$\int_c (-y, x) \cdot d\vec{s} = -\int_0^{\pi/2} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t)\, dt =$$
$$= -\int_0^{\pi/2} (b \sin t \cdot a \sin t + a \cos t \cdot b \cos t)\, dt = -ab \int_0^{\pi/2} 1\, dt = -\frac{ab\pi}{2} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 501.** $\displaystyle\int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s}$, c je část křivky $k = \Big\{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = R \cos t,$ $\displaystyle y = R \sin t, z = \frac{at}{2\pi},\ R > 0 \Big\}$, od průsečíku s rovinou $z = 0$ do průsečíku s rovinou $z = a$, $a > 0$.

Řešení: Jedná se o šroubovici s poloměrem vinutí R a stoupáním a.



$$z = 0 \implies t_1 = 0$$
$$z = a \implies t_2 = 2\pi$$

$P(t) = \Big[R \cos t, R \sin t, \dfrac{at}{2\pi} \Big], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$\dot{P}(t) = \Big(-R \sin t, R \cos t, \dfrac{a}{2\pi} \Big), \quad P(0) = [a, 0, 0] = A$
orientace je souhlasná

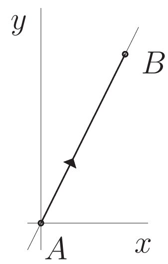
$$\int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \Big(R \sin t, -R \cos t, \frac{at}{2\pi} \Big) \cdot \Big(-R \sin t, R \cos t, \frac{a}{2\pi} \Big)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t + \frac{a^2 t}{4\pi^2} \Big)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(-R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\, t \Big)\, dt =$$
$$= \left[-R^2 t + \frac{a^2}{8\pi^2}\, t^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} - 2\pi R^2 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 502.** $\displaystyle\int_c -x \cos y\, dx + y \sin x\, dy$, c je úsečka z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [\pi, 2\pi]$.

Řešení: Daný integrál můžeme počítat dvojím způsobem:

1) Použijeme přímo zadání křivkového integrálu v diferenciálním tvaru.

Při parametrickém vyjádření dané křivky c dostaneme pro $t=0$ počáteční bod A,



vypočítáme diferenciály,

$$c: \; x=t, \quad t\in\langle 0,\pi\rangle \qquad dx = dt,$$
$$y = 2t, \qquad dy = 2\,dt,$$

$$\int_C -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_0^\pi (-t\,\cos 2t + 2\cdot 2t\,\sin t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi t(4\sin t - \cos 2t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} u=t, & v' = 4\sin t - \cos 2t \\ u'=1, & v = -4\cos t - \dfrac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -\Big[4t\cos t + \frac{t}{2}\sin 2t\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \Big(4\cos t + \frac{\sin 2t}{2}\Big)\,dt = 4\pi + \Big[4\sin t - \frac{\cos 2t}{4}\Big]_0^\pi = 4\pi.$$

Poznámka: Protože úsečka c je grafem explicitně zadané funkce $y=2x,\ x\in\langle 0,\,\pi\rangle$, můžeme ponechat proměnnou x jako parametr. Po výpočtu diferenciálu $dy = 2\,dx$ dostáváme

$$\int_c -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_0^\pi (-x\,\cos 2x + 2\cdot 2x\,\sin x)\,dx = \cdots,$$

což je stejný Riemannův integrál.

2) Daný integrál v diferenciálním tvaru přepíšeme do tvaru vektorového

$$\int_c -x\,\cos y\,dx + y\,\sin x\,dy = \int_c (-x\cos y,\ y\sin x)\cdot d\vec{s}.$$

Použijeme parametrizaci

$$c: \left\{ \begin{array}{l} x=t, \\ y=2t, \end{array} \right. \quad t\in\langle 0,\pi\rangle;$$

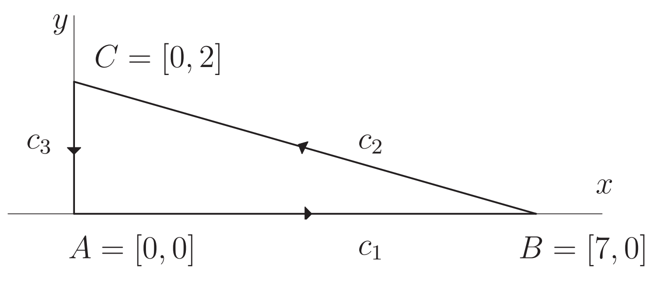
$$\left| \begin{array}{ll} P(t) = [t, 2t], & t\in\langle 0,\pi\rangle; \quad \dot{P} = (1,2) \\ P(0) = A \Rightarrow & \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_0^\pi (-t\cos 2t,\ 2t\,\sin t)\cdot(1,\ 2)\,dt = \int_0^\pi (-t\,\cos 2t + 4t\,\sin t)\,dt = \cdots$$

a dostaneme zase stejný Riemannův integrál. ∎

***Příklad* 503**. $\oint_c x\,dy$, $\;c$ je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami $x=0,\ y=0$ a $2x+7y=14$, c je orientována kladně.

Řešení:



$$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

Podle poznámky z předchozího příkladu:

$$c_1 : y = 0,\ dy = 0 \cdot dx,\ x \in \langle 0, 7\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_1} x\,dy = \int_0^7 0\,dx = 0$$

$$c_2 : x = \frac{14-7y}{2},\ y \in \langle 0, 2\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_2} x\,dy = \int_0^2 \frac{14-7y}{2}\,dy$$

$$c_3 : x = 0,\ y \in \langle 2, 0\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_{c_3} x\,dy = \int_2^0 0 \cdot dy$$

$$\oint_c x\,dy = 0 + \int_0^2 \frac{14-7y}{2}\,dy + 0 = \frac{1}{2}\Big[14y - \frac{7y^2}{2}\Big]_0^2 = 7 \qquad \blacksquare$$

504. $\displaystyle\int_c (x\cos y, 0)\cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná úsečka z bodu $A = [0,1]$ do bodu $B = [1,2]$.
$[\sin 2 + \cos 2 - \cos 1]$

505. $\displaystyle\int_c (x^2+y^2,\ x^2-y^2)\cdot d\vec{s}$, $\quad c$ je orientovaná křivka $y = 1 - |1-x|,\ x \in \langle 0, 2\rangle$, počáteční bod je $A = [0,0]$.
$\left[\frac{4}{3}\right]$

506. $\displaystyle\int_c (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, $\quad c$ je oblouk paraboly $y = x^2$ z bodu $A = [-1, 1]$ do bodu $B = [1,1]$.
$\left[-\frac{14}{15}\right]$

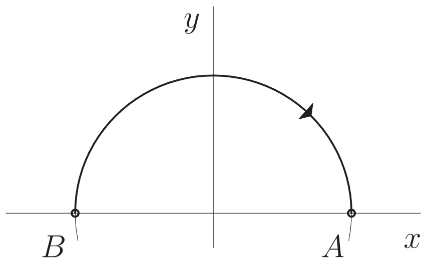
507. $\displaystyle\int_c (y, x)\cdot d\vec{s}$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ a > 0\}$ a počáteční bod je $A = [a, 0]$.
$[0]$

IV.5. Práce síly podél křivky

• Vypočtěte práci W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

***Příklad* 508**. $\vec{f} = (x+y, 2x)$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = R^2,\ y \geq 0\}$, počáteční bod $B = [-R, 0]$.

Řešení: Práce W síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c je rovna integrálu $\displaystyle\int_c \vec{f}\cdot d\vec{s}$.



$$c : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$$

$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [R\cos t, R\sin t], \quad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \dot{P}(t) = (-R\sin t, R\cos t), \quad P(0) = [R, 0] = A \Rightarrow \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array} \right| =$$

$$W = \int_c (x+y, 2x)\cdot d\vec{s} = -\int_0^\pi (R\cos t + R\sin t, 2R\cos t)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt =$$

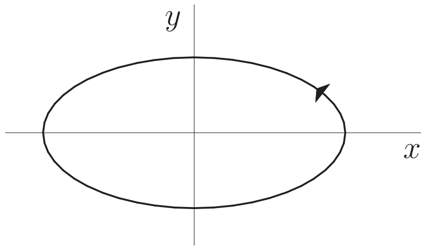
$$= -\int_0^\pi \Big(-R^2(\sin t + \cos t)\sin t + 2R^2\cos^2 t\Big)\,dt =$$

$$= -R^2 \int_0^\pi (-\sin^2 t - \sin t \cos t + 2\cos^2 t)\, dt =$$
$$= -R^2 \int_0^\pi \Big(-\frac{1-\cos 2t}{2} - \sin t \cos t + 1 + \cos 2t\Big)\, dt =$$
$$= -R^2 \Big[-\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^\pi = -\frac{\pi R^2}{2}$$

■

***Příklad* 509.** $\vec{f} = \Big(\dfrac{2y}{x^2+4y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+4y^2}\Big)$, $\quad c = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\Big\}$, křivka c je orientovaná kladně.

Řešení:



$$c: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

| $P(t) = [2\cos t, y = \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
| $\dot{P}(t) = (-2\sin t, \cos t)$
| orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \Big(\frac{2y}{x^2+4y^2}, -\frac{2x}{x^2+4y^2}\Big) \cdot d\vec{s} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{2\sin t}{4}, -\frac{4\cos t}{4}\Big) \cdot (-2\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{4\sin^2 t}{4} - \frac{4\cos^2 t}{4}\Big)\, dt =$$
$$= -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

■

***Příklad* 510.** $\vec{f} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + a\,\vec{k}$, $\quad c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0,\ z = 2\}$, orientace křivky c je dána tečným vektorem $\vec{\tau}([2,1,2]) = -\vec{i}$.

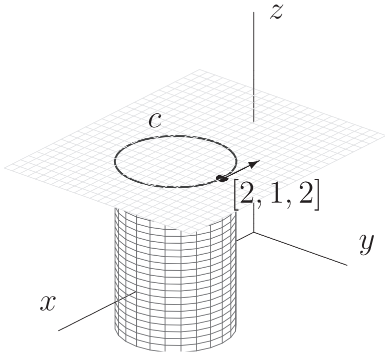
Řešení:

$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \implies$ rovnice válcové plochy

$z = 2 \implies$ rovnice roviny

Křivka c vznikne rovinným řezem válcové plochy.

Rovina je kolmá na osu rotační válcové plochy, křivka c je tedy kružnice



$$c: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \implies$$

$$c: \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot \cos t, \\ y = 1 \cdot \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

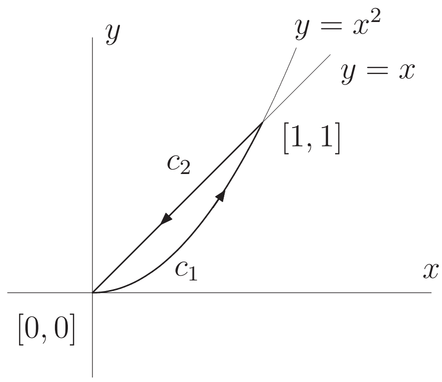
| $P(t) = [2 + \cos t, \sin t, 2]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad P\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = [2,1,2]$; $\quad \dot{P}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = (-1,0,0) = -\vec{i}$
| $\dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ $\quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací |

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (-y, x, a) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, a) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\sin^2 t + (2+\cos t)\cos t + a\cdot 0\Big)\,dt = \int_0^{2\pi} (1+2\cos t)\,dt = 2\pi \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 511.** $\vec{f} = (xy, x+y)$, $c = c_1 \cup c_2$, c je uzavřená křivka, kde c_1 je část paraboly $y = x^2$ a c_2 je část přímky $y = x$, c je kladně orientovaná.

Řešení:



$c_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \langle 0,1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_1(t) = [t, t^2], \quad t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 2t), \quad P(0) = [0,0]$
orientace křivky je souhlasná s parametrizací

$c_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \langle 0,1\rangle; \quad \Rightarrow$

$P_2(t) = [t, t], \quad t \in \langle 0,1\rangle$
$\dot{P}_2(t) = (1, 1), \quad P(0) = [0,0]$
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací

$$W = \oint_c \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} + \int_{c_2} (xy, x+y)\cdot d\vec{s} =$$
$$= \int_0^1 (t^3, t+t^2)(1,2t)\,dt - \int_0^1 (t^2, 2t)(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3)\,dt -$$
$$- \int_0^1 (t^2 + 2t)\,dt = \Big[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3}\Big]_0^1 - \Big[\frac{t^3}{3} + t^2\Big]_0^1 = \frac{1}{12} \qquad \blacksquare$$

• Vypočtěte práci síly $\vec{f}$ podél orientované křivky c :

512. $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 4\}$, křivka c je orientovaná záporně. $[-2\pi]$

513. $\vec{f} = \dfrac{2}{x^2+y^2}(y, -x)$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2; x^2+y^2 = 16\}$, křivka c je kladně orientovaná. $[-4\pi]$

514. $\vec{f} = \Big(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{x}\Big)$, $\quad c$ je obvod $\triangle ABC$, kde $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [2,2]$, křivka c je kladně orientovaná. $\left[\frac{1}{2}\right]$

515. $\vec{f} = \dfrac{(y^2, -x^2)}{x^2+y^2}$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = a^2,\ a > 0,\ y \geq 0\}$ z bodu $[a,0]$ do bodu $[-a,0]$. $\left[-\frac{4}{3}\,a\right]$

516. $\vec{f} = (y, 2)$, $\quad c$ je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná. $[2\pi]$

517. $\vec{f} = (x+y, 2x)$, $\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace je kladná. $[\pi a^2]$

518. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$. $\left[\frac{3}{2}\, a^2\right]$

519. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1, 0, 0]$ do bodu $[0, 1, 0]$. $\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right]$

520. $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2 - y^2}, xy)$, $c = \Big\{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \Big(R\cos t, R\sin t, \dfrac{at}{2\pi}\Big),$ $a > 0,\ R > 0, t \in \langle 0, 2\pi\rangle\Big\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $[0]$

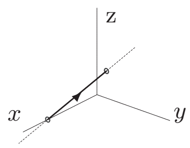
521. $\vec{f} = (x, y, xz - y)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \big(t^2, 2t, 4t^3\big),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $\left[\frac{5}{2}\right]$

522. $\vec{f} = (x, y, z)$, c je čtvrtina elipsy $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 2\}$ z bodu $[2, 0, 0]$ do bodu $[0, 2, 2]$. $[2]$

523. $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t);\ P(t) = \big(5, 2 + 4\sin t, -3 + 4\cos t\big),$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $[96\pi]$

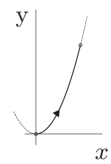
- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a orientovaná křivka c.
  a) Načrtněte danou křivku $c \subset \mathbb{E}_2$.
  b) Navrhněte její parametrizaci $P(t)$ a zdůvodněte, zda je křivka c orientována souhlasně s touto parametrizací.
  c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po dané orientované křivce c.

524. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.



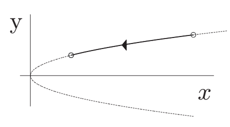
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [a + at, at, at],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ c)\ \frac{3}{2}\, a^2 \end{array}\right]$

525. $\vec{f} = (xy, y - 1)$, c je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$



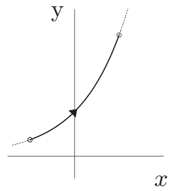
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, t^2],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ c)\ 8 \end{array}\right]$

526. $\vec{f} = \big(\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y}\big)$, c je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$



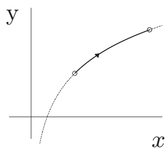
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2t^2, t],\ t \in \langle 2, 1\rangle \\ c)\ -\frac{1}{3}\big(40 + 32\sqrt{2}\big) \end{array}\right]$

527. $\vec{f} = \left(x^3, \ \dfrac{1}{y} \ln y\right)$, křivka c je daná rovnicí $y = \mathrm{e}^x$, kde $|x| \leq 1$ a počáteční bod má $x = -1$



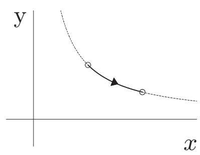
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \mathrm{e}^t],\ t \in \langle -1, 1\rangle \\ c)\ 0 \end{array}\right]$

528. $\vec{f} = (2, xy)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y = \ln x + 1,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle\}$,



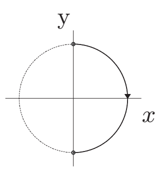
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [t, \ln t + 1],\ t \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle \\ c)\ 3\mathrm{e} - 2 \end{array}\right]$

529. $\vec{f} = (0, x)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1,\ x \in \langle 2, 1\rangle\}$



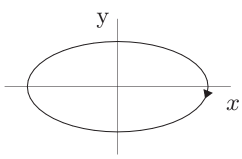
$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = \left[t, \dfrac{1}{t}\right],\ t \in \langle 2, 1\rangle \\ c)\ -\ln 2 \end{array}\right]$

530. $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$ orientovaná od bodu $[0, 2]$ k bodu $[0, -2]$



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, 2\sin t],\ t \in \langle \pi, -\pi\rangle \\ c)\ -\pi \end{array}\right]$

531. $\vec{f} = \left(\dfrac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\dfrac{2x}{x^2 + 4y^2}\right)$; $\quad c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$, která je záporně orientovaná



$\left[\begin{array}{l} b)\ P(t) = [2\cos t, \sin t],\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ c)\ 2\pi \end{array}\right]$

- Je dána úsečka AB, vektorová funkce $\vec{f}$ a skalární funkce ϱ.
  - a) Navrhněte parametrizaci $P(t)$ úsečky k a vypočítejte tečný vektor $\dot{P}(t)$.
  - b) Užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením podél úsečky AB od bodu A do bodu B.
  - c) Vypočítejte hmotnost křivky k, je-li délková hustota $\varrho(x, y)$.

532. $A = [1, 0],\ B = [2, 3], \quad \vec{f} = (x, y) = (x^2,\ xy), \quad \varrho(x, y) = x^2 + y^2$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [1 + t, 3t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \frac{232}{15} \\ c)\ m = \frac{16}{3}\sqrt{10} \end{array}\right]$$

533. $A = [0, 1],\ B = [1, 2] \quad \vec{f}(x, y) = (x\sqrt{y^2 - 2x},\ 0), \quad \varrho(x, y) = xy$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, 1 + t],\ t \in \langle 0, 1\rangle \\ b)\ \frac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) \\ c)\ m = \frac{5}{6}\sqrt{2} \end{array}\right]$$