

IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládejme, že c je jednoduchá hladká křivka s parametrizací $P(t)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí

$$\int_c \vec{f}(X) \cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt.$$

Znaménko plus (resp. mínus) použijeme, když křivka c je orientována souhlasně (resp. nesouhlasně) s parametrizací $P(t)$.

POZNÁMKA: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat v diferenciálech, tj. ve tvaru

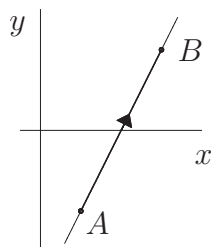
$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_c (U, V, W) \cdot (dx, dy, dz) = \int_c (U dx + V dy + W dz).$$

Analogicky pro křivku $c \in \mathbb{E}_2$.

- Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce c s počátečním bodem A .

Příklad 498. $\int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s}$, c je úsečka z bodu $A = [1, -2]$ do bodu $B = [3, 2]$.

Řešení:



Parametrické rovnice úsečky:

$$c : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Parametrizace křivky c :

$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [1 + 2t, -2 + 4t], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \dot{P}(t) = (2, 4) \\ P(0) = [1, -2] = A \Rightarrow \text{orientace křivky je} \\ \text{souhlasná se zvolenou parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \int_c (x, -y^2) \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \underbrace{\left((1 + 2t), -(-2 + 4t)^2 \right)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(2, 4)}_{\dot{P}(t)} dt = \\ &= \int_0^1 \left((1 + 2t) \cdot 2 - (4t - 2)^2 \cdot 4 \right) dt = 2 \int_0^1 \left(1 + 2t - 2(16t^2 - 16t + 4) \right) dt = \\ &= 2 \int_0^1 (-7 + 34t - 32t^2) dt = 2 \left[-7t + 17t^2 - \frac{32}{3}t^3 \right]_0^1 = -\frac{4}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 499. $\int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^3\}$ z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [3, 27]$.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 3 \rangle$$

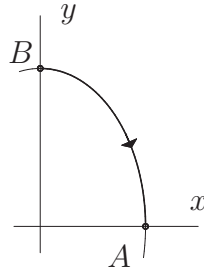
$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [t, t^3], \quad t \in \langle 0, 3 \rangle \\ \dot{P}(t) = (1, 3t^2), \quad P(0) = A \Rightarrow \text{souhlasná parametrizace} \end{array} \right|$$

$$\int_c (x^2 - y^2, 1) \cdot d\vec{s} = \int_c (t^2 - t^6, 1) \cdot (1, 3t^2) dt = \int_0^3 ((t^2 - t^6) \cdot 1 + 1 \cdot 3t^2) dt =$$

$$= \left[\frac{4}{3} t^3 - \frac{t^7}{7} \right]_0^3 = -\frac{1935}{7} \quad \blacksquare$$

Příklad 500. $\int_c (-y, x) \cdot d\vec{s}$, $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$, $A = [a, 0]$.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

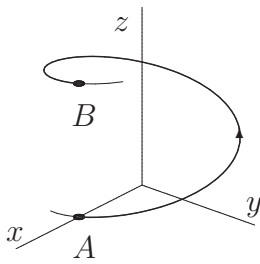
$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [a \cos t, b \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ \dot{P}(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad P(0) = [a, 0] = A \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_c (-y, x) \cdot d\vec{s} = - \int_0^{\pi/2} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt =$$

$$= - \int_0^{\pi/2} (b \sin t \cdot a \sin t + a \cos t \cdot b \cos t) dt = -ab \int_0^{\pi/2} 1 dt = -\frac{ab\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Příklad 501. $\int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s}$, c je část křivky $k = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = R \cos t, \right.$
 $y = R \sin t, z = \frac{at}{2\pi}, R > 0 \left. \right\}$, od průsečíku s rovinou $z = 0$ do průsečíku
s rovinou $z = a$, $a > 0$.

Řešení: Jedná se o šroubovici s poloměrem vlnutí R a stoupáním a .



$$z = 0 \implies t_1 = 0$$

$$z = a \implies t_2 = 2\pi$$

$$\left| \begin{array}{l} P(t) = \left[R \cos t, R \sin t, \frac{at}{2\pi} \right], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = \left(-R \sin t, R \cos t, \frac{a}{2\pi} \right), \quad P(0) = [a, 0, 0] = A \\ \text{orientace je souhlasná} \end{array} \right|$$

$$\int_c (y, -x, z) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left(R \sin t, -R \cos t, \frac{at}{2\pi} \right) \cdot \left(-R \sin t, R \cos t, \frac{a}{2\pi} \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t + \frac{a^2 t}{4\pi^2} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(-R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} t \right) dt =$$

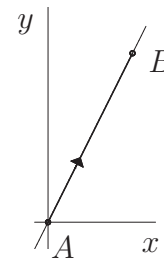
$$= \left[-R^2 t + \frac{a^2}{8\pi^2} t^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} - 2\pi R^2 \quad \blacksquare$$

Příklad 502. $\int_c -x \cos y dx + y \sin x dy$, c je úsečka z bodu $A = [0, 0]$ do bodu $B = [\pi, 2\pi]$.

Řešení: Daný integrál můžeme počítat dvojím způsobem:

1) Použijeme přímo zadání křivkového integrálu v diferenciálním tvaru.

Při parametrickém vyjádření dané křivky c dostaneme pro $t = 0$ počáteční bod A ,



$$c: \begin{cases} x = t, & t \in \langle 0, \pi \rangle \\ y = 2t, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{vypočítáme diferenciály,} \\ dx = dt, \\ dy = 2 dt, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_C -x \cos y dx + y \sin x dy &= \int_0^\pi (-t \cos 2t + 2 \cdot 2t \sin t) dt = \\ &= \int_0^\pi t(4 \sin t - \cos 2t) dt = \left| \begin{array}{l} u = t, \quad v' = 4 \sin t - \cos 2t \\ u' = 1, \quad v = -4 \cos t - \frac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| = \\ &= -\left[4t \cos t + \frac{t}{2} \sin 2t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(4 \cos t + \frac{\sin 2t}{2}\right) dt = 4\pi + \left[4 \sin t - \frac{\cos 2t}{4}\right]_0^\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

POZNÁMKA: Protože úsečka c je grafem explicitně zadané funkce $y = 2x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, můžeme ponechat proměnnou x jako parametr. Po výpočtu diferenciálu $dy = 2 dx$ dostáváme

$$\int_c -x \cos y dx + y \sin x dy = \int_0^\pi (-x \cos 2x + 2 \cdot 2x \sin x) dx = \dots,$$

což je stejný Riemannův integrál.

2) Daný integrál v diferenciálním tvaru přepíšeme do tvaru vektorového

$$\int_c -x \cos y dx + y \sin x dy = \int_c (-x \cos y, y \sin x) \cdot d\vec{s}.$$

Použijeme parametrizaci

$$c: \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle;$$

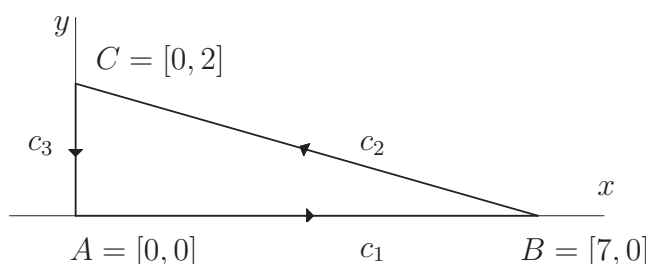
$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [t, 2t], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle; \quad \dot{P} = (1, 2) \\ P(0) = A \Rightarrow \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\int_0^\pi (-t \cos 2t, 2t \sin t) \cdot (1, 2) dt = \int_0^\pi (-t \cos 2t + 4t \sin t) dt = \dots$$

a dostaneme zase stejný Riemannův integrál. ■

Příklad 503. $\oint_c x dy$, c je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami $x = 0$, $y = 0$
a $2x + 7y = 14$, c je orientována kladně.

Řešení:



$$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

$$\oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

Podle poznámky z předchozího příkladu:

$$c_1 : y = 0, dy = 0 \cdot dx, x \in \langle 0, 7 \rangle \Rightarrow \int_{c_1} x dy = \int_0^7 0 dx = 0$$

$$c_2 : x = \frac{14 - 7y}{2}, y \in \langle 0, 2 \rangle \Rightarrow \int_{c_2} x dy = \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2} dy$$

$$c_3 : x = 0, y \in \langle 2, 0 \rangle \Rightarrow \int_{c_3} x dy = \int_2^0 0 \cdot dy$$

$$\oint_c x dy = 0 + \int_0^2 \frac{14 - 7y}{2} dy + 0 = \frac{1}{2} \left[14y - \frac{7y^2}{2} \right]_0^2 = 7 \quad \blacksquare$$

504. $\int_c (x \cos y, 0) \cdot d\vec{s}$, c je orientovaná úsečka z bodu $A = [0, 1]$ do bodu $B = [1, 2]$.
[sin 2 + cos 2 - cos 1]

505. $\int_c (x^2 + y^2, x^2 - y^2) \cdot d\vec{s}$, c je orientovaná křivka $y = 1 - |1 - x|$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$,
počáteční bod je $A = [0, 0]$. [4/3]

506. $\int_c (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, c je oblouk paraboly $y = x^2$ z bodu $A = [-1, 1]$
do bodu $B = [1, 1]$. [-14/15]

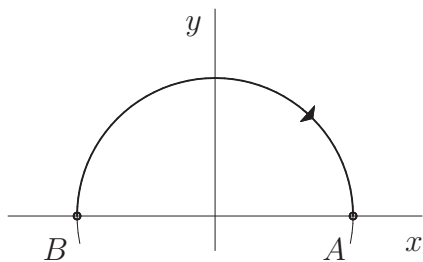
507. $\int_c (y, x) \cdot d\vec{s}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, a > 0\}$ a počáteční bod je
 $A = [a, 0]$. [0]

IV.5. Práce síly podél křivky

- Vypočtete práci W síly \vec{f} podél orientované křivky c :

Příklad 508. $\vec{f} = (x + y, 2x)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$, počáteční bod
 $B = [-R, 0]$.

Řešení: Práce W síly \vec{f} podél orientované křivky c je rovna integrálu $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$.



$$c : \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

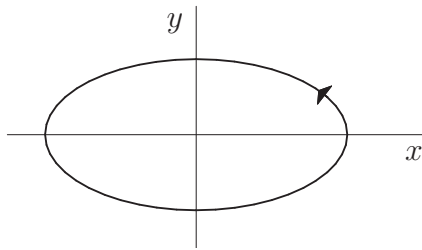
$$\left| \begin{array}{l} P(t) = [R \cos t, R \sin t], \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \\ \dot{P}(t) = (-R \sin t, R \cos t), \quad P(0) = [R, 0] = A \Rightarrow \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} W &= \int_c (x + y, 2x) \cdot d\vec{s} = - \int_0^\pi (R \cos t + R \sin t, 2R \cos t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = \\ &= - \int_0^\pi \left(-R^2 (\sin t + \cos t) \sin t + 2R^2 \cos^2 t \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -R^2 \int_0^\pi (-\sin^2 t - \sin t \cos t + 2 \cos^2 t) dt = \\
 &= -R^2 \int_0^\pi \left(-\frac{1 - \cos 2t}{2} - \sin t \cos t + 1 + \cos 2t \right) dt = \\
 &= -R^2 \left[-\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi = -\frac{\pi R^2}{2}
 \end{aligned}$$

Příklad 509. $\vec{f} = \left(\frac{2y}{x^2 + 4y^2}, \frac{-2x}{x^2 + 4y^2} \right)$, $c = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$, křivka c je orientovaná kladně.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\begin{cases} P(t) = [2 \cos t, y = \sin t], t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = (-2 \sin t, \cos t) \\ \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \left(\frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2} \right) \cdot d\vec{s} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \sin t}{4}, -\frac{4 \cos t}{4} \right) \cdot (-2 \sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4 \sin^2 t}{4} - \frac{4 \cos^2 t}{4} \right) dt = \\
 &= - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi
 \end{aligned}$$

Příklad 510. $\vec{f} = -y\vec{i} + x\vec{j} + a\vec{k}$, $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0, z = 2\}$, orientace křivky c je dána tečným vektorem $\vec{\tau}([2, 1, 2]) = -\vec{i}$.

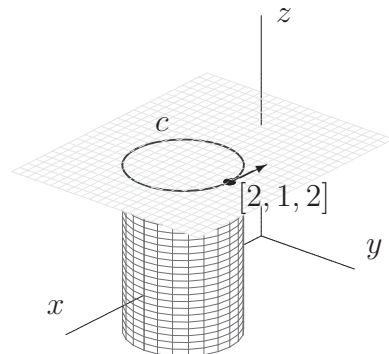
Řešení:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 &\implies \text{rovnice válcové plochy} \\
 z = 2 &\implies \text{rovnice roviny}
 \end{aligned}$$

Křivka c vznikne rovinným řezem válcové plochy.

Rovina je kolmá na osu rotační válcové plochy, křivka c je tedy kružnice

$$\begin{aligned}
 c : \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} &\implies \\
 c : \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot \cos t, \\ y = 1 \cdot \sin t, \\ z = 2, \end{cases} & \quad 0 \leq t \leq 2\pi
 \end{aligned}$$



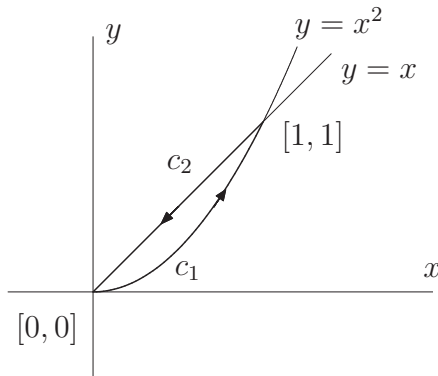
$$\begin{cases} P(t) = [2 + \cos t, \sin t, 2], t \in \langle 0, 2\pi \rangle & P\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2, 1, 2]; \quad \dot{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0) = -\vec{i} \\ \dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) & \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{cases}$$

$$W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c (-y, x, a) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, a) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + (2 + \cos t) \cos t + a \cdot 0) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos t) dt = 2\pi \quad \blacksquare$$

Příklad 511. $\vec{f} = (xy, x + y)$, $c = c_1 \cup c_2$, c je uzavřená křivka, kde c_1 je část paraboly $y = x^2$ a c_2 je část přímky $y = x$, c je kladně orientovaná.

Řešení:



$$c_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P_1(t) = [t, t^2], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \\ P_2(t) = (1, 2t), \quad P(0) = [0, 0] \\ \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right.$$

$$c_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P_2(t) = [t, t], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \\ P_2(t) = (1, 1), \quad P(0) = [0, 0] \\ \text{orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} W &= \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1} (xy, x + y) \cdot d\vec{s} + \int_{c_2} (xy, x + y) \cdot d\vec{s} = \\ &= \int_0^1 (t^3, t + t^2)(1, 2t) dt - \int_0^1 (t^2, 2t)(1, 1) dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 2t^3) dt - \\ &- \int_0^1 (t^2 + 2t) dt = \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Vypočítejte práci síly \vec{f} podél orientované křivky c :

512. $\vec{f} = \frac{(x - y, x + y)}{x^2 + y^2}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4\}$, křivka c je orientovaná záporně. [-2π]

513. $\vec{f} = \frac{2}{x^2 + y^2}(y, -x)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 16\}$, křivka c je kladně orientovaná. [-4π]

514. $\vec{f} = \left(\frac{1}{y}, -\frac{1}{x}\right)$, c je obvod $\triangle ABC$, kde $A = [1, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [2, 2]$, křivka c je kladně orientovaná. [$\frac{1}{2}$]

515. $\vec{f} = \frac{(y^2, -x^2)}{x^2 + y^2}$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = a^2, a > 0, y \geq 0\}$ z bodu $[a, 0]$ do bodu $[-a, 0]$. [- $\frac{4}{3} a$]

516. $\vec{f} = (y, 2)$, c je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná. [2π]

517. $\vec{f} = (x + y, 2x)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x = a \cos t, y = a \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, orientace je kladná. [πa^2]

518. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.
 $\left[\frac{3}{2} a^2 \right]$

519. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1, 0, 0]$
do bodu $[0, 1, 0]$.
 $\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} \right]$

520. $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2 - y^2}, xy)$, $c = \left\{ X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = \left(R \cos t, R \sin t, \frac{at}{2\pi} \right), \right.$
 $a > 0, R > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle \left. \right\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
 $[0]$

521. $\vec{f} = (x, y, xz - y)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = (t^2, 2t, 4t^3), t \in \langle 0, 1 \rangle\}$,
orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
 $\left[\frac{5}{2} \right]$

522. $\vec{f} = (x, y, z)$, c je čtvrtina elipsy $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x + z = 2\}$
z bodu $[2, 0, 0]$ do bodu $[0, 2, 2]$.
 $[2]$

523. $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, $c = \{X \in \mathbb{E}_3 : X = P(t); P(t) = (5, 2 + 4 \sin t, -3 + 4 \cos t),$
 $t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací.
 $[96\pi]$

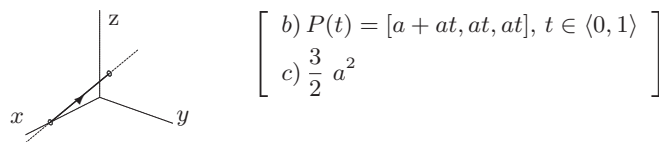
• Je dáno vektorové pole \vec{f} a orientovaná křivka c .

a) Načrtněte danou křivku $c \subset \mathbb{E}_2$.

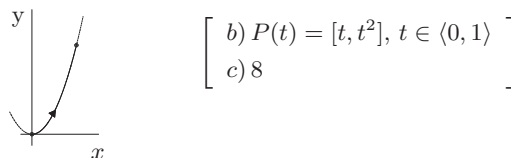
b) Navrhněte její parametrizaci $P(t)$ a zdůvodněte, zda je křivka c orientována souhlasně s touto parametrizací.

c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{f} působením po dané orientované křivce c .

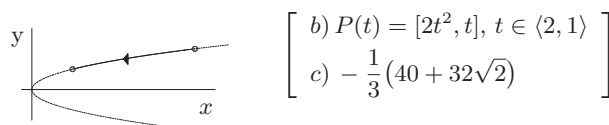
524. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a, 0, 0]$ a koncovým bodem $[a, a, a]$.



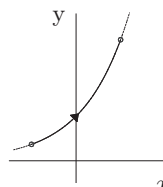
525. $\vec{f} = (xy, y - 1)$, c je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$



526. $\vec{f} = (\sqrt{x+y}, x + \sqrt{y})$, c je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$

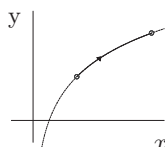


527. $\vec{f} = \left(x^3, \frac{1}{y} \ln y \right)$, křivka c je daná rovnicí $y = e^x$, kde $|x| \leq 1$ a počáteční bod má $x = -1$



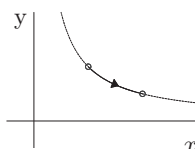
$$\left[\begin{array}{l} b) P(t) = [t, e^t], t \in \langle -1, 1 \rangle \\ c) 0 \end{array} \right]$$

528. $\vec{f} = (2, xy)$; $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y = \ln x + 1, x \in \langle 1, e \rangle\}$,



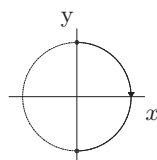
$$\left[\begin{array}{l} b) P(t) = [t, \ln t + 1], t \in \langle 1, e \rangle \\ c) 3e - 2 \end{array} \right]$$

529. $\vec{f} = (0, x)$; $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy = 1, x \in \langle 2, 1 \rangle\}$



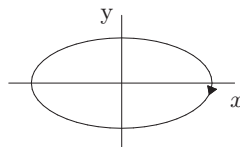
$$\left[\begin{array}{l} b) P(t) = \left[t, \frac{1}{t} \right], t \in \langle 2, 1 \rangle \\ c) -\ln 2 \end{array} \right]$$

530. $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\}$ orientovaná od bodu $[0, 2]$ k bodu $[0, -2]$



$$\left[\begin{array}{l} b) P(t) = [2 \cos t, 2 \sin t], t \in \langle \pi, -\pi \rangle \\ c) -\pi \end{array} \right]$$

531. $\vec{f} = \left(\frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2} \right)$; $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$, která je záporně orientovaná



$$\left[\begin{array}{l} b) P(t) = [2 \cos t, \sin t], t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ c) 2\pi \end{array} \right]$$

- Je dána úsečka AB , vektorová funkce \vec{f} a skalární funkce ρ .
 - a) Navrhněte parametrizaci $P(t)$ úsečky k a vypočítejte tečný vektor $\dot{P}(t)$.
 - b) Užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{f} působením podél úsečky AB od bodu A do bodu B .
 - c) Vypočítejte hmotnost křivky k , je-li délková hustota $\rho(x, y)$.

532. $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$, $\vec{f} = (x, y) = (x^2, xy)$, $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [1 + t, 3t], t \in \langle 0, 1 \rangle \\ b) \frac{232}{15} \\ c) m = \frac{16}{3}\sqrt{10} \end{array} \right]$$

533. $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ $\vec{f}(x, y) = (x\sqrt{y^2 - 2x}, 0)$, $\varrho(x, y) = xy$

$$\left[\begin{array}{l} a) P(t) = [t, 1 + t], t \in \langle 0, 1 \rangle \\ b) \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1) \\ c) m = \frac{5}{6}\sqrt{2} \end{array} \right]$$