IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = \Big[x(t), y(t), z(t)\Big]$ *je zobrazení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *do* $\mathbb{E}_3$. *Platí-li :*

1) $P(t)$ *je spojité a je prosté na* $\langle a, b\rangle$
(k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek x(t), y(t), z(t) byla ryze monotónní na $\langle a, b\rangle$*),*

2) derivace $\dot{P}\,(t) = \Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t), \dot{z}\,(t)\Big)$ *je omezené a spojité zobrazení na* (a, b),

3) $\dot{P}\,(t) \neq \vec{0}$ *pro všechna* $t \in (a, b)$,

potom množinu $c = \{X \in \mathbb{E}_3;\ X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle\}$ *nazveme* ***jednoduchou hladkou křivkou*** *v* $\mathbb{E}_3$ *a zobrazení* P *její* ***parametrizací.***

Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v $\mathbb{E}_2$.

Řekneme, že křivka c *je* ***orientována souhlasně*** *s parametrizací, resp.* ***nesouhlasně*** *s parametrizací* P, *jestliže počáteční bod této křivky je* $P(a)$, *resp.* $P(b)$.

Křivku c *v* $\mathbb{E}_3$ *(též v* $\mathbb{E}_2$ *) lze orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru* $\vec{\tau}$ *v bodě* $P(t)$. *Je-li* $\vec{\tau} = \dfrac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je souhlasně orientována s parametrizací* P. *Je-li* $\vec{\tau} = -\dfrac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ *pak říkáme, že křivka* c *je nesouhlasně orientována s parametrizací* P.

Poznámka : Je-li $P(a) = P(b)$, pak křivku nazýváme uzavřenou. Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je "proti směru pohybu hodinových ručiček", resp. "ve směru pohybu hodinových ručiček."

Příklad* 424. Je dána křivka $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y = x^2, x \in \langle -4, 4\rangle\}$ s počátečním bodem $A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = \Big[x(t), y(t)\Big]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c, jestliže

a) $P(t) = [t, t^2]$, $\quad t \in \langle -4, 4\rangle$, $\quad$ b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $\quad t \in \langle -2, 2\rangle$,

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $\quad t \in \langle 0, 16\rangle$.

Řešení:

a) $P(t) = [t, t^2], t \in \langle -4, 4\rangle$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c. Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.

b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in \langle -2, 2\rangle$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c. Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x-ovou souřadnici $-4 < 0$.

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in \langle 0, 16\rangle$ není parametrizací dané křivky, protože opět $x = \sqrt{t} \geq 0$. Kromě toho $\dot{\mathbf{P}}(t) = \Big(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, 1\Big)$ není omezená na $(0, 16)$.

■

Příklad* 425. Je dána půlkružnice $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže a) $P(t) = [a\cos t, a\sin t],\ t \in \langle 0, \pi\rangle$, b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in \langle -a, a\rangle$, c) $P(t) = \left[\dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right], t \in \mathbb{R}$.

Řešení:

a) Ano, $P(t)$ je parametrizací , protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.

b) Není parametrizací, protože $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(1, \dfrac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right)$ není omezená na $(-a, a)$.

c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a, \quad \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{a}{1+t^2} = 0 \Longrightarrow$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{P}\,(t)$. Protože je $\dot{x}\,(t) = \dfrac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t, je funkce $x(t)$ monotónní a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{P}\,(t) = \Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t)\Big) \neq (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0. \qquad \blacksquare$$

• Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci :

***Příklad* 426.** Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

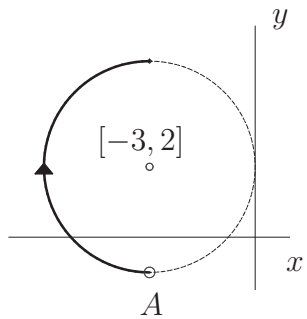
$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2), \quad c : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Úsečku AB obdržíme pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $\blacksquare$

***Příklad* 427.** $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9,\ x \leq -3\}, \quad A = [-3, -1]$

Řešení:

$P(t) : \quad \begin{cases} x = -3 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\rangle,$

orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $P\big(3\pi/2\big) = A$



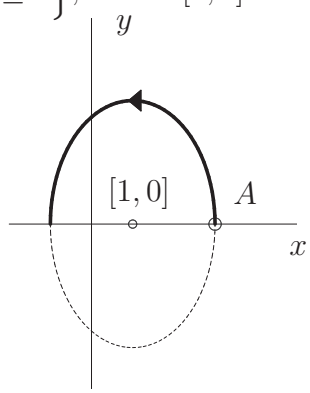
$\blacksquare$

***Příklad* 428**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y \geq 0\right\}, \quad A = [3,0]$

Řešení:

$$P(t): \quad \begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle,$$

orientace křivky je souhlasná s parametrizací, protože $P(0) = A$.



■

***Příklad* 429**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 = 4x,\ y + z = 0,\ z \geq 0\}, \quad A = [0,0,0]$

Řešení: Křivka c je řezem válcové plochy $x^2 + y^2 = 4x$ rovinou $y + z = 0$.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4, z = -y, z \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$P(t): \quad \begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = -2\sin t \quad \Longrightarrow -2\sin t \geq 0 \Longrightarrow \sin t \leq 0 \Longrightarrow t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

$$A = [0,0,0] \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} 2 + 2\cos t = 0 & \Longrightarrow & \cos t = -1 \\ \sin t = 0 & \Longrightarrow & \sin t = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad t = \pi$$

$P(\pi) = A \quad \Longrightarrow \quad$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

***Příklad* 430**. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x = y,\ x \geq 0\},\ A = [0,0,-a]$

Řešení: Jde o řez kulové plochy rovinou procházející středem kulové plochy . Použijeme sférické souřadnice , v nichž $r = a, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$; ϑ označíme jako parametr t .

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y &= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z &= a\sin t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x \geq 0 \Longrightarrow \cos t \geq 0 \Longrightarrow \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ &t = -\frac{\pi}{2} : A = [0,0,-a] \Longrightarrow \text{orientace křivky je} \\ &\qquad\qquad \text{souhlasná s parametrizací.} \end{aligned}$$

■

• Rovinná křivka c je dána v parametrickém tvaru. Najděte její implicitní rovnici a křivku pojmenujte:

***Příklad* 431**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2t + 1,\ y = 3 - t, \quad t \in \langle 1, 4 \rangle\}$, orientace je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Jde o úsečku s počátečním bodem $A = P(1) = [3,2]$ a koncovým bodem $B = P(4) = [9,-1]$. Vyloučením parametru t obdržíme :

$$t = 3 - y \Longrightarrow \quad x = 2(3-y) + 1 \Longrightarrow \quad x + 2y = 7$$ ■

***Příklad* 432**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1, \quad t \in \langle 0, 3 \rangle\}$, orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

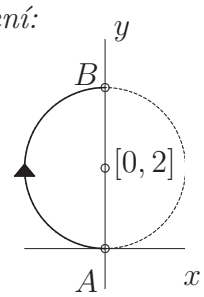
Řešení: Po odečtení dostáváme $x - y = 2$. Opět máme úsečku s počátečním bodem $A = P(3) = [6,4]$ a koncovým $B = P(0) = [3,1]$. ■

***Příklad* 433**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\sin^2 t,\ y = 4\cos^2 t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle\right\}$,
orientace c je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Sečteme $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \sin^2 t + \cos^2 t \Longrightarrow 2x + y = 4$. Znovu máme úsečku s počátečním bodem $A = P(0) = [0,4]$ a koncovým $B = P\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2,0]$. ■

***Příklad* 434**.* Křivka c je daná polární rovnicí $r(\varphi) = 4\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$,
orientace křivky c je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení:



$$c : \begin{cases} x = r\cos\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = 4\sin^2\varphi \end{cases},$$

počáteční bod $A = [0,0]$, pro $\varphi = \pi$
koncový bod $B = [0,4]$, pro $\varphi = \pi/2$

$$x^2 + y^2 = (4\sin\varphi\cos\varphi)^2 + (4\sin^2\varphi)^2 = 16\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4 \cdot 4\sin^2\varphi = 4y,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \quad \Longrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{(kružnice)}$$

Tutéž část kružnice jsme mohli parametrizovat i jinak :
$P(t) = [2\cos t, 2 + 2\sin t],\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$, orientace je nesouhlasná s parametrizací. ■

• Ověřte, že $c = c_1 \cup c_2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Najdětete parametrizace křivek c_1, c_2, nakreslete je a rozhodněte o jejich orientaci, jestliže A je počátečním bodem c_1 a též koncovým bodem c_2 :

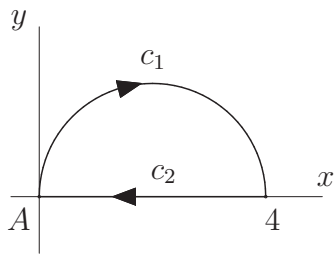
***Příklad* 435**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [0,0]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4x,\ y \geq 0\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 0,\ x \in \langle 0, 4\rangle\}$

Řešení:

$c_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow P_1 : \begin{cases} x = 2 + 2\cos t_1 \\ y = 2\sin t_1 \end{cases}$

$t_1 \in \langle 0, \pi\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací,

$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \end{cases}$, $t_2 \in \langle 0, 4\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací.



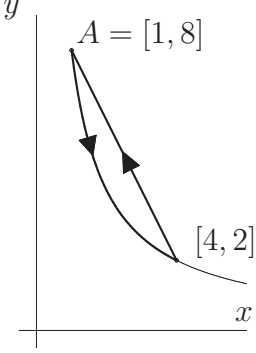
■

***Příklad* 436**. $c_1, c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,8]; \quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ xy = 8,\ x \in \langle 1, 4\rangle\}$;
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y + 2x = 10, x \in \langle 1, 4\rangle\}$

Řešení:

$P_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = \frac{8}{t_1} \end{cases}$, $t_1 \in \langle 1, 4\rangle$, orientace c je souhlasná s parametrizací,

$P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 10 - 2t_2 \end{cases}$, $t_2 \in \langle 1, 4\rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací.



■

437. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_2,\ A = [1,1];\quad c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \sqrt{x}, x \in \langle 0,1\rangle\};$
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = x^2, x \in \langle 0,1\rangle\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1 \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t_1 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \ \Big|\ P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_2^2 \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t_2 \in \langle 0,1\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \ \right]$$

438. $c_1,\ c_2 \subset \mathbb{E}_3,\ A = [3,0,2];\ c_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9,\ x - z = 1,\ y \geq 0\};$
$c_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x - z = 1,\ y = 0\}$

$$\left[\ P_1 : \begin{cases} x = 3\cos t_1 \\ y = 3\sin t_1 \\ z = 3\cos t_1 - 1 \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t_1 \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \ \Big|\ P_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \\ z = t_2 - 1 \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t_2 \in \langle -3,3\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \ \right]$$

• Navrhněte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A :

439. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ 3x + y = 1,\ x \in \langle -1,2\rangle\};\quad A = [-1,4]$

$$\left[\ P(t) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t \in \langle -1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{array} \ \right]$$

440. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x - y = 2,\ x + z = 3,\ y \in \langle 0,2\rangle;\quad A = [2,2,1]$

$$\left[\ P(t) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t \in \langle 1,2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{array} \ \right]$$

441. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ 4x^2 + z^2 = 4,\ y + z = 0,\ y \leq 0;\quad A = [-1,0,0]$

$$\left[\ P(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2\sin t \\ z = 2\sin t \end{cases} \ \Big|\ \begin{array}{c} t \in \langle 0,\pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{array} \ \right]$$

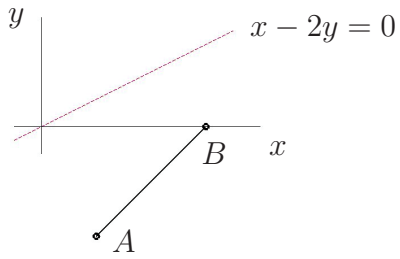
IV.2. Křivkový integrál skalární funkce

• Vyšetřete existenci křivkového integrálu $\displaystyle\int_c f\,ds$. Pokud existuje, tak jej vypočítejte :

***Příklad* 442**. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds,\quad c$ je úsečka s krajními body $A,\ B$, kde
a) $A = [1,-2], B = [3,0],\quad$ b) $A = [1,-2], B = [3,4]$.

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2$ s výjimkou přímky $x - 2y = 0$. V okolí této přímky není funkce f omezená.

a)

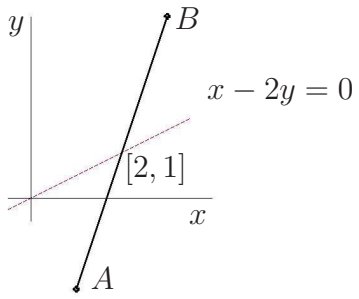


Integrál existuje, protože funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x - 2y}$ je na úsečce AB spojitá.

$$\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds = \left|\ P(t) : \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ t \in \langle 0,1\rangle \end{array} \ \Big|\ \begin{array}{l} ds = \|\dot{P}(t)\|\,dt = \\ = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{4+4}\,dt = 2\sqrt{2}\,dt \end{array} \ \right| = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\,dt}{1 + 2t - 2(-2 + 2t)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{5-2t}\,dt = -\sqrt{2}\int_0^1 \frac{-2dt}{5-2t} = -\sqrt{2}\Big[\ln|5-2t|\Big]_0^1 = -\sqrt{2}\cdot(\ln 3 - \ln 5) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\ln\frac{5}{3}.$$

b)



Integrál neexistuje, protože úsečka AB protíná přímku $x-2y=0$ v bodě $[2,1]$ a funkce f není v okolí bodu $[2,1]$ omezená.

Např.: $\lim \dfrac{1}{x-2y} = +\infty$ je pro $y=1$, $x \to 2^+$.

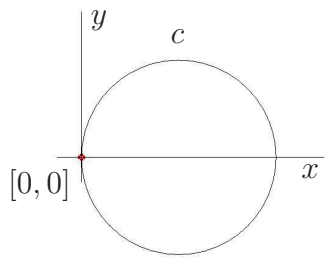
■

***Příklad* 443.** $\displaystyle\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, a) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4x\}$,

b) $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2 = 4\}$

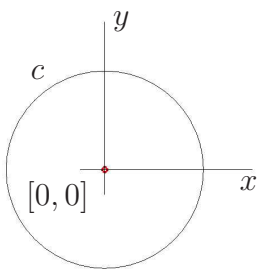
Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2 \setminus \{[0,0]\}$.

a)



Bod $[0,0] \in c$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$, takže integrál neexistuje;

b)



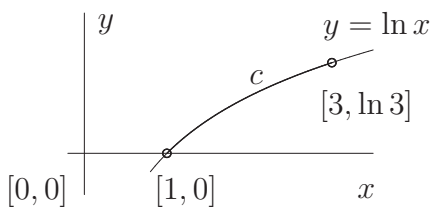
Daná funkce je spojitá na c, takže integrál existuje.

$$\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds =$$
$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2\cos t, 2\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ ds = \|\dot{P}(t)\|\,dt = \sqrt{(4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 2\,dt \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t + 2}{2}\cdot 2\,dt = 2\Big[\sin t + t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

■

***Příklad* 444.** $\displaystyle\int_c x^2\,ds$, $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \ln x,\ x \in \langle 1,3\rangle\}$

Řešení: Je zřejmé, že integrál existuje :



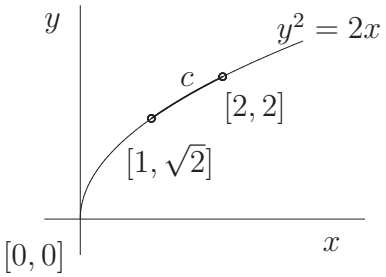
$$\left| \begin{array}{ll} P(t): & x = t \\ & y = \ln t \\ & t \in \langle 1,3\rangle \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} ds = \|\dot{P}(t)\|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt \end{array} \Bigg|$$

$$\int_c x^2\,ds = \int_1^3 t^2\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \int_1^3 \sqrt{t^2+1}\cdot t\,dt = \left|\begin{array}{c} t^2+1=u \\ 2t\,dt = du \end{array} \;\middle|\; u\in\langle 2,10\rangle \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^{10}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[\frac{2u^{3/2}}{3}\Big]_2^{10} = \frac{1}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}). \qquad \blacksquare$$

Příklad* 445. $\displaystyle\int_c \frac{x^2}{y}\,ds, \quad c=\big\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y^2=2x,\ y\in\langle\sqrt{2},2\rangle\big\}$

Řešení: Integrál existuje :



$$\int_c \frac{x^2}{y}\,ds =$$

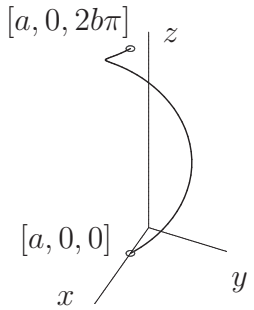
$$= \left|\begin{array}{ll} P(t): & y=t \\ & x=\dfrac{t^2}{2} \\ & t\in\langle\sqrt{2},2\rangle \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} \|\dot P(t)\| = \sqrt{t^2+1} = \\ = \sqrt{1+t^2} \\ ds = \|\dot P(t)\|\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^4}{4t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^2 t^2\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot t\,dt = \left|\begin{array}{c} \sqrt{1+t^2}=u \\ 1+t^2=u^2 \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} 2t\,dt = 2u\,du \\ u\in\langle\sqrt{3},\sqrt{5}\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (u^2-1)\cdot u\cdot u\,du = \frac{1}{4}\Big[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{30}\,(25\sqrt{5}-6\sqrt{3}). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 446.** $\displaystyle\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, c je první závit *šroubovice* $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

Řešení:



Integrál existuje :

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \left|\begin{array}{l} P(t)=[a\cos t, a\sin t, bt], \quad t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ \|\dot P(t)\| = \sqrt{(\dot x)^2+(\dot y)^2+(\dot z)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} \\ ds = \|\dot P(t)\|\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\Big[a^2t+\frac{b^2t^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\Big(2\pi a^2+\frac{8}{3}\,b^2\pi^3\Big). \qquad \blacksquare$$

• Zdůvodněte, na které z křivek c existuje integrál $\int_c f\,ds$. Příslušný integrál vypočítejte.

447. $\displaystyle\int_c \frac{3-y}{y-x+2}\,ds$, a) c je kružnice $x^2-2x+y^2=0$;

[neexistuje, daná funkce není na křivce C omezená]

b) c je úsečka AB, kde $A=[2,3]$, $B=[0,1]$.

[existuje,daná funkce je na úsečce AB spojitá, $\sqrt{8}/3$]

448. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2+y^2}\,ds,$ a) $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x=t-3,\ y=3-t,\ t\in\langle 1,4\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=a^2\}$ $\left[\text{existuje, } \frac{2\pi}{a}\right]$

449. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2-y}\,ds,$ a) $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y=2x,\ x\in\langle 1,3\rangle\}$ [neexistuje]

b) $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y=9,\ x\in\langle 0,2\rangle\}$ $\left[\text{existuje, } -\frac{\ln 5}{6}\right]$

450. $\displaystyle\int_c xy\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=a^2,\ x\le 0,\ y\ge 0\}$ $\left[-\frac{a^3}{2}\right]$

451. $\displaystyle\int_c \sqrt{2y}\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$

(oblouk cykloidy) $\left[4\pi a\sqrt{a}\right]$

452. $\displaystyle\int_c \sqrt{x}\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y=\sqrt{x},\ x\in\langle 1,2\rangle\}$ $\left[\frac{27-5\sqrt{5}}{12}\right]$

453. $\displaystyle\int_c (xy+2)\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x=\cos t,\ y=3\sin t,\ z=\sqrt{8}\cos t,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$

$[12\,\pi]$

454. $\displaystyle\int_c z\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in\langle 0,\pi\rangle\}$

(kuželová šroubovice) $\left[\frac{1}{3}\left((2+\pi^2)\sqrt{2+\pi^2}-2\sqrt{2}\right)\right]$

455. $\displaystyle\int_c (x+y)\,ds,$ $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0\}$

(Použijte parametrizaci z příkladu 430.) $\left[t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,\ a^2\sqrt{2}\right]$

456. $\displaystyle\int_c xyz\,ds,$ $c=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=\frac{a^2}{4},\ \text{v 1. oktantu}\right\}$

(c leží v rovině $z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, pak $x=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}\sin t$) $\left[\frac{a^4\sqrt{3}}{32}\right]$

- Je dána skalární funkce f, křivka c je průnikem daných dvou ploch.
  a) Navrhněte parametrizaci této křivky.
  b) Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
  c) Vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce f.

457. $f(x,y,z)=y^2+2z^2$, křivka c je průsečnicí rovin $x+y+2z=5,\ 2x+5y-2z=4$ v prvním oktantu.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ \text{např.}:\ x=7-4t, y=2t-2, z=t, t\in\langle 1,7/4\rangle \\ b)\ \dot{P}(t)=(-4,2,1),\ \|\dot{P}(t)\|=\sqrt{21} \\ c)\ 111\sqrt{21}/32 \end{array}\right]$$

458. $f(x,y,z)=z^2$, křivka c je řez válcové plochy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ a rovinou $4x-3z=0$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ \text{např.}:\ x=3\cos t, y=5\sin t, z=4\cos t, t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ b)\ \dot{P}(t)=(-3\sin t, 5\cos t, -4\sin t),\ \|\dot{P}(t)\|=5 \\ c)\ 80\pi \end{array}\right]$$

IV.3. Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

• Vypočítejte délku ℓ křivky c, jestliže :

***Příklad* 459**.* $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 2 - \ln(\cos x), \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\right\}$

Řešení:

$$\ell = \int_c 1\,ds = \left| \begin{array}{ll} P(t): & x = t \\ & y = 2 - \ln(\cos t), \\ & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \dot{P}(t) = \left(1, -\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t)\right) \\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2} = \left|\frac{1}{\cos t}\right| \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 t}\,dt = \left| \begin{array}{c} \sin t = s \\ \cos t\,dt = ds \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln(3 + 2\sqrt{2})\ .$$

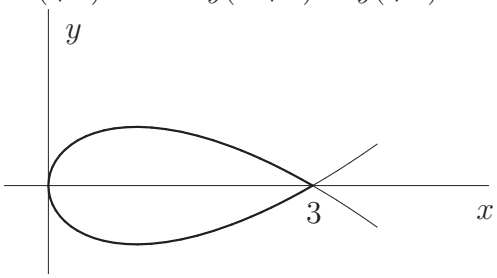
■

***Příklad* 460**. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}, \quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle\right\}$

Řešení: Jde o délku smyčky, jelikož $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 3$ a $y(-\sqrt{3}) = y(\sqrt{3}) = 0$.

$$\ell = \int_c 1\,ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2}\,dt =$$



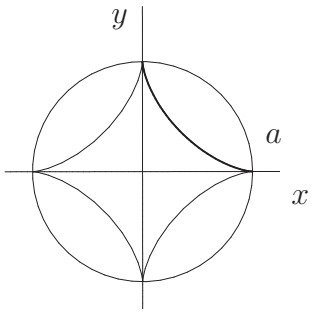
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\,dt = 2\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

■

***Příklad* 461**.* $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$

Řešení: Jde o asteroidu, skládající se ze čtyř stejně dlouhých oblouků. Proto



$$\ell = \int_c 1\,ds = 4\cdot\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,dt = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

■

Příklad* 462. c je část logaritmické spirály $r = a\mathrm{e}^{k\varphi}$, ležící uvnitř kruhu o poloměru $r = a,\ k > 0,\ a > 0$.

Řešení: Křivka c je zadána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$. V kartézských souřadnicích bude vyjádřena :

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot{y} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}.$$

Potom $ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, d\varphi = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$

$= \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$, kde $r' = \dfrac{d\,r}{d\,\varphi}$.

Z podmínky $|a\mathrm{e}^{k\varphi}| \le a$ plyne $\varphi \le 0$. Tedy

$$\ell = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(ak\mathrm{e}^{k\varphi})^2 + (a\mathrm{e}^{k\varphi})^2}\, d\varphi = \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}\, d\,\varphi = \lim_{\beta\to-\infty} a\sqrt{k^2+1}\int_{\beta}^{0} \mathrm{e}^{k\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\Big[\frac{\mathrm{e}^{k\varphi}}{k}\Big]_{\beta}^{0} = a\sqrt{k^2+1}\lim_{\beta\to-\infty}\Big(\frac{1}{k} - \frac{\mathrm{e}^{k\beta}}{k}\Big) = \frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}\ . \qquad \blacksquare$$

Příklad* 463. $c = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz,\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz,\ t \in \mathbb{R}\Big\}$. Stanovte vzdálenost od počátku souřadnic do nejbližšího bodu, v němž je tečna rovnoběžná s osou y.

Řešení: Tečna je rovnoběžná s osou y, když $\dot{x} = 0 \Longrightarrow \dot{x} = \dfrac{\cos t}{t} \Longrightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{2}, t_1 = 1$.

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{t} \quad \Longrightarrow \ell = \int_c 1\, ds = \int_1^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t}\, dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}.$$

$\blacksquare$

• Vypočítejte obsahy daných částí válcových ploch omezených souřadnou rovinou (xy) a zadanými plochami :

Příklad* 464. $y^2 = 4x,\ z = 2\sqrt{x - x^2}$

Řešení: Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z je "shora" omezená plochou $z = f(x,y) = 2\sqrt{x-x^2}$. Obecně $P = \displaystyle\int_c f(x,y)\, ds =$

$$\left|\begin{array}{c} c: y^2 = 4x, c\ =\ c_1 \cup c_2, \qquad c_1: y = 2\sqrt{x} \\ c_2: y = -2\sqrt{x} \\ ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \Big(\frac{\pm 1}{\sqrt{x}}\Big)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx \\ z = 2\sqrt{x - x^2} \quad \Longrightarrow x(1-x) \ge 0 \quad \Longrightarrow x \in \langle 0, 1\rangle, \quad \int_{c_1} f\, ds = \int_{c_2} f\, ds \end{array}\right|$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{x-x^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{(1-x)(x+1)}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right| = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \pi\ .$$

$\blacksquare$

Příklad* 465. $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \quad z = xy, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Řešení: $P = \int_c xy\,ds = \left| \begin{array}{l} c\ : x^2+y^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} P(t)=\left[\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t\right], & t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ \dot P(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right), & ds=\frac{1}{2}\,dt \end{array}\right. \end{array} \right|$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\,d\varphi = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\ . \qquad \blacksquare$$

• Vypočtěte hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho=\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 466**. $c=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}, \quad \varrho(x,y)=x$

Řešení: $m=\int_c \varrho\,ds = \int_c x\,ds = \left| \begin{array}{l} c: P(t)=\left[a\cos t, y=a\sin t\right],\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle \\ \dot P(t)=\left(-a\sin t, a\cos t\right), \quad \|\dot P(t)\|=a \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\,dt = a^2\cdot\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = a^2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 467**. $c=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x=at,\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\,t^2,\ z=\frac{a}{3}\,t^3,\ t\in\langle 0,1\rangle\}$,

$$\varrho(x,y,z)=\sqrt{\frac{2y}{a}}$$

Řešení: $m=\int_c \varrho\,ds = \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}\,ds =$

$$= \left| \begin{array}{lll} P(t): & x=at & \Longrightarrow \dot x = a \\ & y=\frac{a}{\sqrt{2}}\,t^2 & \Longrightarrow \dot y=\sqrt{2}at \\ & z=\frac{a}{3}t^3 & \Longrightarrow \dot z = at^2 \end{array} \ \Bigg| \ \begin{array}{c} \|\dot P(t)\| = \sqrt{(\dot x)^2+(\dot y)^2+(\dot z)^2} = \\ = a\sqrt{1+2t^2+t^4} \\ ds = a(1+t^2)\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{2at^2}{a\sqrt{2}}}\cdot a\cdot(1+t^2)\,dt = \sqrt[4]{2}\cdot\int_0^1 at(1+t^2)\,dt = a\sqrt[4]{2}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\,a\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 468**. Křivka c je první závit šroubovice $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at$ a hustota se rovná čtverci vzdálenosti od osy z .

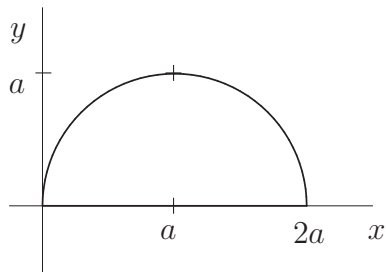
Řešení: $m=\int_c \varrho\,ds = \int_c (x^2+y^2)\,ds = \left| \begin{array}{lll} P(t): & x=a\cos t & t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ & y=a\sin t & \|\dot P(t)\| = \sqrt{(\dot x)^2+(\dot y)^2+(\dot z)^2} \\ & z=a\,t & ds = a\sqrt{2}\,dt \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a\sqrt{2}\,dt = a^3\cdot 2\sqrt{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 469**. $c=c_1\cup c_2;\quad c_1=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=2ax,\ y\ge 0\}$;
$c_2=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ y=0,\ x\in\langle 0,2a\rangle, a>0\}, \quad \varrho(x,y)=x^2+y^2$

Řešení:

$$m=\int_c \varrho\,ds = \int_{c_1}\varrho\,ds + \int_{c_2}\varrho\,ds =$$
$$= \int_{c_1}(x^2+y^2)\,ds + \int_{c_2}(x^2+y^2)\,ds =$$



$$= \left| \begin{array}{lll} c_1 : \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2-2ax=0 \Longrightarrow (x-a)^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \\ y \geq 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} x = a + a\cos t \\ y = a \sin t \end{array} \quad | & \begin{array}{l} ds = a\,dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \\ c_2 : y = 0 \Longrightarrow ds = dx, x \in \langle 0, 2a \rangle & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big(a^2(1+\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \Big) \cdot a\,dt + \int_0^{2a} x^2\,dx = a^3 \int_0^{\pi} (2+2\cos t)\,dt + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} =$$

$$= 2a^3 \Big[t + \sin t \Big]_0^{\pi} + \frac{8a^3}{3} = 2a^3\pi + \frac{8a^3}{3}\ . \qquad \blacksquare$$

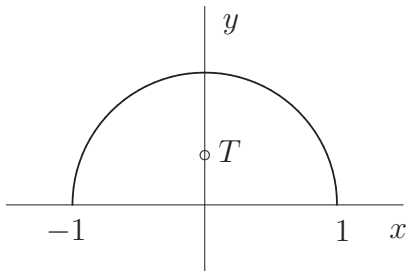
• Určete těžiště T křivky c při hustotě $\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 470**. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2+y^2=1,\ y \geq 0\}, \quad \varrho(x,y) = a(1-y),\ a>0$

Řešení:

$T = [0, y_T]$, kde $y_T = \dfrac{M_x}{m}$.

(Všimněte si, že hustota nezáleží na x čili hmotnost levé a pravé čtvrtkružnice je stejná.)



$$\left| \begin{array}{lll} P(t) : \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right. & | & \dot{P}(t) : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\sin t \\ \dot{y} = \cos t \end{array} \right. \quad | \quad \begin{array}{l} ds = \|\dot{P}(t)\|\,dt = dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \end{array} \right|$$

$$m = \int_c \varrho\,ds = \int_c a(1-y)\,ds = \int_0^{\pi} a(1-\sin t)\,dt = a\Big[t + \cos t \Big]_0^{\pi} = a(\pi - 2)$$

$$M_x = \int_c y\varrho\,ds = a\int_0^{\pi} (1-\sin t)\sin t\,dt = a\int_0^{\pi} \left(\sin t - \frac{1-\cos 2t}{2} \right) dt =$$

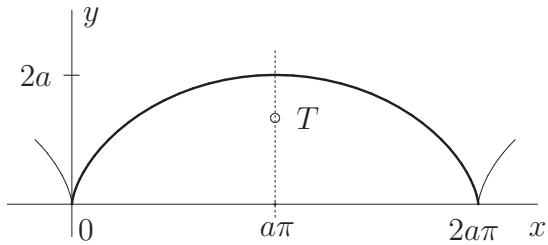
$$= a\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\pi} = a\,(2 - \frac{\pi}{2})$$

$$y_T = \frac{a\,(2-\frac{\pi}{2})}{a\,(\pi-2)} = \frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)} \qquad \boxed{T = \left[0, \frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)} \right]}\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 471**.* $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1-\cos t),\ a>0,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
$\varrho(x,y) = 1$

Řešení:

c je první oblouk cykloidy, $\quad T = [\pi a, y_T]$,
$y_T = \dfrac{M_x}{m}; \qquad m = \displaystyle\int_c \varrho(x,y)\,ds$



$$\left| \begin{array}{lll} \begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} & | & \begin{array}{l} \dot{x} = a(1-\cos t) \\ \dot{y} = a \sin t \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} \|\dot{P}(t)\| = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} \\ ds = a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \end{array} \end{array} \right|$$

$$m = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\Big[-2\cos\frac{t}{2} \Big]_0^{2\pi} = 8a;$$

$$M_x = \int_c y\varrho(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[\begin{array}{c}\cos\frac{t}{2}=z\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = dz\end{array}\right] =$$

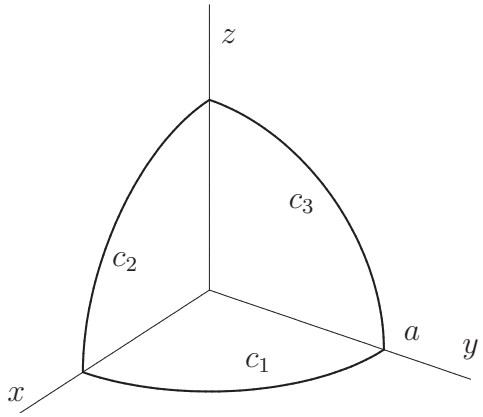
$$= -4\,a^2\cdot 2\cdot\int_1^{-1}(1-z^2)\,dz = 8a^2\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz = 16a^2\Big[z-\frac{z^3}{3}\Big]_0^1 = 16\,a^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{32a^2}{3};$$

$$y_T = \frac{32a^2}{3\cdot 8a} = \frac{4}{3}\,a, \qquad \boxed{T = \left[\pi a, \frac{4}{3}\,a\right]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 472**. $c = c_1\cup c_2\cup c_3,\ c_1 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x^2+y^2=a^2,\ z=0, x\ge 0,\ y\ge 0\}$,
$c_2 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x^2+z^2=a^2, y=0,\ x\ge 0,\ z\ge 0\}$,
$c_3 = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ y^2+z^2=a^2,\ x=0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ a>0\}, \quad \varrho(x,y)=1$

Řešení: Křivka c je je symetrická vzhledem k osám x, y, z tedy $x_T = y_T = z_T$. Omezíme se na $x_T = \dfrac{M_{yz}}{m}$. $\quad m = 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \dfrac{3}{2}\,\pi\,a,$

$$M_{yz} = \int_c x\varrho(x,y)\,ds = \int_{c_1} x\,ds + \int_{c_2} x\,ds + \int_{c_3} x\,ds =$$



$$\left|\begin{array}{ll} c_1: & \begin{array}{c} P_1(t) = [a\cos t, a\sin t, 0] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot P_1(t)\| = a\end{array}\\ c_2: & \begin{array}{c} P_2(t) = [a\cos t, 0, a\sin t] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot P_2(t)\| = a\end{array}\\ c_3: & \begin{array}{c} P_3(t) = [0, a\cos t, a\sin t] \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle, \quad \|\dot P_3(t)\| = a\end{array}\end{array}\right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} 0\,dt = 2a^2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 2a^2$$

$$x_T = y_T = z_T = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4\,a}{3\pi} \qquad \boxed{T = \left[\frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}, \frac{4\,a}{3\pi}\right]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 473**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k souřadnicové rovině (yz) prostorové křivky $c = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad t\in\langle 0, 2\pi\rangle\}$, je-li $\varrho(x,y,z) = x^2+y^2$.

Řešení:

$$I_{yz} = \int_c \varrho\cdot x^2\,ds = \int_c (x^2+y^2)x^2\,ds = \left|\begin{array}{c} ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \\ = \sqrt{a^2+b^2}\,dt\end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a^2\cos^2 t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^4\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Big[t+\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = a^4\sqrt{a^2+b^2}\,\pi\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 474**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $c \subset \mathbb{E}_3$:

$$c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ 2x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}, \quad \text{je-li} \quad \varrho(x, y, z) = z\ .$$

Řešení: c je řez eliptické válcové plochy rovinou $x + z = 1$.

$$I_z = \int_c (x^2 + y^2)\varrho(x, y, z)\, ds = \int_c (x^2 + y^2) z\, ds =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} & x = \cos t & \Longrightarrow \quad \dot{x} = -\sin t \qquad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2} \\ P(t): & y = \sqrt{2}\sin t & \Longrightarrow \quad \dot{y} = \sqrt{2}\cos t \quad | \\ & z = 1 - \cos t & \Longrightarrow \quad \dot{z} = \sin t \qquad\qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t)(1 - \cos t) \cdot \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)(1 - \cos t)\, dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \Big(1 + \frac{1 - \cos 2t}{2} - \cos t - \sin^2 t \cos t\Big)\, dt = \sqrt{2}\Big[t + \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} - \sin t -$$

$$- \frac{\sin^3 t}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\sqrt{2}\,\pi\ . \qquad \blacksquare$$

- Je dána křivka c a délková hustota ϱ.
  a) Navrhněte parametrizaci $X = P(t),\ t \in \langle a, b \rangle$ dané křivky c a určete délku vektoru $\dot{P}(t)$.
  b) Vypočítejte hmotnost křivky c, je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ϱ.
  c) Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

475. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$, $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [1 + t, 3t],\ t \in \langle 0, 1 \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{10} \\ b)\ m = 6\sqrt{10}/3 \\ c)\ J_0,\ \varrho = 1 \end{array} \right]$$

476. Křivka c je úsečka AB, kde $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, $\varrho(x, y) = x^2 y$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, 1 + t],\ t \in \langle 0, 1 \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{2} \\ b)\ m = 7\sqrt{2}/12 \\ c)\ M_x,\ \varrho = x^2;\ M_y,\ \varrho = xy;\ J_y,\ \ \varrho = y \end{array} \right]$$

477. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0\}$, $\varrho(x, y) = x$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [3\cos t, 3\sin t],\ t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = 3 \\ b)\ m = 18 \\ c)\ M_y,\ \varrho = 1 \end{array} \right]$$

478. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t/3,\ t \in \langle 0, 3 \rangle\}$,
$\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [3\cos t, 3\sin t, t/3],\ t \in \langle 0, 3 \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{82}/3 \\ b)\ m = 28\sqrt{82}/3 \\ c)\ J_0,\ \varrho = 1 \end{array} \right]$$

479. $c = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/4;\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
$\varrho(x, y, z) = z^2/(x^2 + y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [2\cos t, 2\sin t, t/4],\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{17}/2 \\ b)\ m = \sqrt{65}\,\pi^3/96 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = z/(x^2 + y^2);\ J_{xy},\ \varrho = 1/(x^2 + y^2) \end{array} \right]$$

480. $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{x^2}{2} + 2$ mezi body $A = [0, 2]$, $B = [2, 4]\}$, $\varrho(x, y) = x$

$$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t, t^2/2 + 2],\ t \in \langle 0, 2 \rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + t^2} \\ b)\ m = (5\sqrt{5} - 1)/3 \\ c)\ M_y,\ \varrho = 1 \end{array} \right]$$

481. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = t\,\cos t, y = t\,\sin t, z = t;\ t \in \langle 0,1\rangle\},\quad \varrho(x,y,z) = z$

$\left[\begin{array}{l} a)\ P(t) = [t\cos t, t\sin t, t],\ t \in \langle 0,1\rangle;\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{2+t^2}/2 \\ b)\ m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = 1 \end{array}\right]$

• Vypočítejte délku ℓ dané křivky c :

482. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{1}{3}\,x\,\sqrt{x},\quad x \in \langle 0,5\rangle\right\}$ $\left[\dfrac{19}{3}\right]$

483. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\quad t \in \langle 0,1\rangle\}$ [5]

484.* $c = \{[\varphi,r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = a(1+\cos\varphi),\ \varphi \in \langle 0,\pi\rangle,\ a > 0\}$ (horní polovina kardioidy) [4a]

485.* $c = \left\{[\varphi,r] \in \mathbb{E}_2;\ r(\varphi) = \sin^3\dfrac{\varphi}{3},\quad \varphi \in \langle 0,3\pi\rangle\right\}$(křivka je dána v polárních souřadnicích)

$\left[\dfrac{3}{2}\,\pi\right]$

486. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\,(t - \sin t),\ y = 2\,(1 - \cos t),\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$ [16]

487. $c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t/2,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$ $[\pi\,\sqrt{17}]$

488. $c = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}\right\}$ mezi body $[2,?],[4,?]$ $[6 + (\ln 2)/4]$

489. $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = at,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}$ $[2\pi\,\sqrt{R^2+a^2}]$

• Určete hmotnost m křivky c při délkové hustotě ϱ :

490. $\varrho(x,y,z) = x(y^2+z^2),\quad c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ y^2 + 2z^2 = 4,\ x = z,\ x \geq 0\}$ $\left[\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right]$

491. $\varrho(x,y) = x(y+2),\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$ [16]

492. $\varrho(x,y) = x^{4/3} + y^{4/3},\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0,\pi/2\rangle\}$ $\left[a^{\frac{7}{3}}\right]$

493. $\varrho(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}},\quad c = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ $\left[\mathrm{e}^a \cdot a \cdot \dfrac{\pi}{2}\right]$

494. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti homogenní půlkružnice o poloměru a, $\varrho(x,y) = k$. $\left[\dfrac{k\,a^3\pi}{2}\right]$

495. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x části asteriody ležící v prvním kvadrantu (tj. křivky $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0,\pi/2\rangle$), při hustotě $\varrho(x,y) = 1$. $\left[\dfrac{3a^3}{8}\right]$

• Určete těžiště T křivky c při délkové hustotě ϱ :

496.* $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ a > 0,\ t \in \langle 0,2\pi\rangle\}, \varrho = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}$

$\left[m = \dfrac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3},\ M_{yz} = 4\sqrt{2}\,\pi a^2,\ M_{xz} = -4\sqrt{2}\,\pi^2 a^2,\ M_{xy} = 4\sqrt{2}\,\pi^4 a^2,\ T = \left[\dfrac{3a}{2\pi^2}, -\dfrac{3a}{2\pi}, \dfrac{3}{2}a\pi\right]\right]$

497.* $c = c_1 \cup c_2,\ c_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = 6\sqrt{x},\ x \in \langle 1,6\rangle\};$
$c_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = -6\sqrt{x},\ x \in \langle 1,6\rangle\},\ \varrho = 1$ $\left[m = 10,\ M_y = 35,\ T = \left[\dfrac{7}{2}, 0\right]\right]$