Matematika I A – ukázkový test 1 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ (2a-1)x + (a+1)y + z &= 1 - a \end{aligned}$$

a) Napište *Frobeniovu větu* (předpoklady + tvrzení).

b) Vyšetřete počet řešení dané soustavy v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.

c) Určete neznámou y v závislosti na hodnotě parametru a.

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici $\boldsymbol{A}$.

b) Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek existence inverzní matice. Ověřte splnění této podmínky pro zadanou matici $\boldsymbol{A}$.

c) Vypočítejte $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\det\boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$ a $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})$. Ověřte z definice správnost vypočtené matice $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. Je dána funkce $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

a) Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.
Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 8$.
Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu funkce f v bodě $x_1 = 7{,}8$.
Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = 8$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

b) Zdůvodněte existenci a nalezněte absolutní extrémy funkce f na intervalu $I = \langle -1; 1\rangle$ (stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

a) Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte limity funkce f v jeho krajních bodech.

b) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy této funkce.

c) Nalezněte asymptoty grafu funkce f. Graf načrtněte.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\displaystyle\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (\cos^2\varphi + \cos^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Zapište větu o integraci *per-partes pro určitý integrál*.

b) Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^3 (x-2)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\mathrm{d}x$ (s parametrem $k \in \mathbb{N}$).

c) Vypočítejte nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Matematika I B – ukázkový test 1 pro 2018/2019

1. a) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$ a $\vec{w} = (3; 2; 1)$ jsou lineárně nezávislé.

   b) Je-li to možné, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1; 2; 1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (tzn. určete koeficienty a zapište tuto lineární kombinaci).

   c) Na základě výpočtu rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$ na sebe kolmé. Určete úhel, který svírá vektor $\vec{v}$ s vektorem určujícím kladný směr osy z.

2. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$. Ověřte z definice správnost výsledku.

   b) Z rovnice $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ vyjádřete neznámou matici $\boldsymbol{X}$. Určete $\boldsymbol{X}$ pro zadané matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$.

   a) Vypočítejte derivace $f'(x)$, $f''(x)$ a určete hodnoty $f(2), f'(2), f''(2)$.

   b) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem $x_0 = 2$.

   c) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.

   d) Na základě znalosti hodnot $f(2), f'(2), f''(2)$ načrtněte tvar grafu zadané funkce pro x z okolí bodu $x_0 = 2$. Do téhož obrázku zakreslete i tečnu z úlohy c).

4. Dána funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

   a) Určete její definiční obor. Je funkce f sudá nebo lichá? (Odpověď zdůvodněte.)

   b) Vypočítejte derivaci funkce f a určete intervaly monotónie funkce f.

   c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \to -\infty$ a $x \to +\infty$. Načrtněte graf.

5. Vypočítejte následující integrály. Pro integrál z úlohy a) uveďte interval(y) jeho existence.

   a) $\displaystyle\int r\,\sqrt{1 - r^2}\,\mathrm{d}r$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12}\,\mathrm{d}x$

   V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Vypočítejte integrál $\int (3x + 2)\cos x\,\mathrm{d}x$.

   b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = (3x + 2)\cos x$.

Matematika I A – ukázkový test 2 pro 2018/2019

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1; -2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4; 5)$, $\vec{c} = (2; 1; 3)$ a $\vec{d} = (1; 2; 3)$.

a) Zdůvodněte (nebo ověřte), že tato skupina vektorů *netvoří bázi* prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

b) Ověřte, zda platí následující geometrické vztahy mezi danými vektory: $\vec{a} \perp \vec{d}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$.

c) Z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vyberte bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
Ověřte, že Vámi vybrané vektory skutečně tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

d) Vyjádřete vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ jako lineární kombinaci vektorů Vámi zvolené báze (tzn. určete koeficienty a zapište příslušnou lineární kombinaci).

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & b & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice.*

b) Vypočítejte determinant matice $\boldsymbol{A}$. Určete hodnost matice $\boldsymbol{A}$, je-li $a = 1$, $b = 2$.

c) Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má homogenní soustava $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ pouze triviální (nulové) řešení ? Odpověď zdůvodněte.

3. a) Definujte pojem *limita posloupnosti* reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Dána posloupnost $\{a_n = \frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Vypočítejte její limitu L. Pro $\varepsilon = 0,01$ určete přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(L)$.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}\right)$.

4. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Určete definiční obor funkce f a průsečíky grafu funkce f s osami x a y.

b) Určete intervaly monotónie a lokální extrémy.

c) Vypočítejte limitu pro $x \to +\infty$. Načrtněte graf dané funkce na intervalu $\langle -1; +\infty)$.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.
Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\displaystyle\int (x^2+2)\sin x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}}\,\mathrm{d}x$

6. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{6x+2}{(x^2-1)(x+3)}$.

a) Vypočítejte integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Určete intervaly existence.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 2; 4 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = f(x)$. Výsledek upravte.

c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Matematika I B – ukázkový test 2 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x + y \quad &= -4 \\ 5x + y - 3z &= -13 \end{aligned}$$

a) Určete hodnost matice této soustavy a hodnost matice rozšířené.

b) Pomocí Cramerova pravidla určete řešení dané soustavy. Proveďte zkoušku.

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Nalezněte vlastní čísla této matice. Zvolte jedno z nich a napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Vlastní vektory pak určete.

3. a) Vypočítejte derivace 1. řádu daných funkcí:
$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 8}, \qquad g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + 1).$$

b) Pro funkci $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$ vypočítejte jednostrannou limitu zprava v bodě $x_0 = -2$, tj. $\lim\limits_{x \to -2_+} f(x)$. Na zúženém definičním oboru $(-2, +\infty)$ vyšetřete asymptoty této funkce a zapište jejich rovnice.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n-3)(1-2n)}{5n^2 - 1}$.

4. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x - 3} - x$.

a) Určete $D(f)$, vypočítejte derivaci f' a stanovte její definiční obor $D(f')$.

b) Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí, resp. klesající.

c) Určete lokální extrémy funkce f a načrtněte její graf na intervalu $\langle 3/2; 6\rangle$.

5. Vypočítejte následující integrály. Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\displaystyle\int x^6 \ln x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sin^3 \varphi \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi$

6. Na intervalu $\langle 0; 4 \rangle$ je (po částech) definována funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \langle 0; 2 \rangle \\ 6 - x & \text{pro } x \in (2; 4 \rangle \end{cases}$

a) Načrtněte graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0; 4 \rangle$.

b) Vypočítejte určitý integrál funkce $f(x)$, tzn. $\displaystyle\int_0^4 f(x) \, \mathrm{d}x$.

c) Určete střední hodnoty μ_1 a μ_2 funkce $f(x)$ na intervalech $I_1 = \langle 0; 2 \rangle$ a $I_2 = \langle 0; 4 \rangle$.

Matematika I A – ukázkový test 3 pro 2018/2019

1. Je dána matice $\boldsymbol{A}$
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Najděte spektrum a spektrální poloměr matice $\boldsymbol{A}$, tzn. najděte množinu $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ a číslo $\rho(\boldsymbol{A}) = \max_i\{|\lambda_i|\}$

   b) Ověřte, že pro Vámi vypočtená vlastní čísla platí vztahy pro *stopu* a *determinant* matice:
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_i^n a_{ii} = \sum_i^n \lambda_i \quad \text{, resp.} \quad \det(\boldsymbol{A}) = \prod_i^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

   c) Pro nejmenší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ zapište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Soustavu vyřešte a napište odpovídající vlastní vektory.

   d) Napište, jaký platí (obecně) vztah mezi vlastními čísly a vektory matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^n$.
   Užijte tohoto vztahu a nalezněte vlastní čísla matic $\boldsymbol{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{A}^2$ (pokud tyto matice existují). Alespoň pro jedno z těchto vlastních čísel určete i odpovídající vlastní vektory.

2. a) Vypočítejte limitu funkce $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$.
   Pokud se rozhodnete pro l'Hospitalovo pravidlo, ověřte, zda ho lze použít.

   b) Napište definici ostrého lokálního minima funkce. Napište, ve kterých bodech může lokální extrém nastat.

   c) Dány funkce $f_1(x) = x^3 + 2, \quad f_2(x) = |x^2 - 3x + 2|$.
   Načrtněte grafy těchto funkcí a zjistěte (a zdůvodněte), zda dané funkce mají lokální extrémy. Pokud ano, určete jejich polohu, typ a hodnotu.

3. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1} - \dfrac{x^2}{2}$.

   a) Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.

   b) Pro tuto funkci napište Taylorův polynom $T_2(x)$ druhého stupně se středem $x_0 = 0$.
   Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty dané funkce f v bodě $x = 1/2$. Načrtněte tvar grafu zadané funkce pro x z okolí bodu $x_0 = 0$. Do téhož obrázku zakreslete i tečnu z úlohy a).

   c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Odhadněte velikost chyby při výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1/2$ pomocí polynomu T_2.

   d) Určete největší možný interval $\langle 0, b\rangle$, na němž je $|R_3(x)| \le 1/100$.

4. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x}$.

   a) Určete intervaly monotónie a intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

   b) Určete lokální extrémy. Najděte průsečíky grafu dané funkce s osami x, y.

   c) Vypočítejte limity pro $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ a načrtněte graf.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int \left(\ln x + \sqrt{\ln x}\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (2-3x)\cos 5x\,\mathrm{d}x$.
   Nezapomeňte na intervaly existence integrálů.
   Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

6. a) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x) = \sqrt{x-1}$.

   b) Načrtněte obrazec ohraničený křivkami $y = \sqrt{x-1}$, $x = 0$, $y = 0$ a $y = 1$ a vypočítejte jeho plošný obsah.

   c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem <u>osy y</u>.

Matematika I B – ukázkový test 3 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= -5 \\ x \qquad + z &= 4 \\ 4x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

a) Určete hodnost *matice soustavy* a *rozšířené matice* dané soustavy.

b) Je možné k řešení této soustavy použít Cramerovo pravidlo? Zdůvodněte.

c) Nalezněte řešení (pokud existuje) dané soustavy.

2. a) Je posloupnost $\left\{\dfrac{2n-1}{n^2}\right\}_{i=1}^{+\infty}$ rostoucí nebo klesající ? Odpověď zdůvodněte podle definice.

b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x/2 - x^3}{\mathrm{e}^{2x} - \cos 3x}$.

c) Vypočítejte limitu složené funkce $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x+2}{x}$.

3. Je dána funkce $f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$.

a) Vypočítejte derivaci této funkce a stanovte její definiční obor. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 = -2$.

b) Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = -2,2$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = -2$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

c) Nalezněte absolutní extrémy funkce f na intervalu $I = \langle 1; 4\rangle$ (stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^x$.

a) Určete intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí, případně klesající.

b) Určetete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, případně konkávní.

c) Určete průsečíky grafu s osami. Vypočítejte funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body) a načrtněte graf v intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int_0^1 (4-3x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \left(\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

Uveďte interval existence druhého integrálu.

6. a) Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

b) Načrtněte obrazec, který je omezen osou x a grafy funkcí $y = \sqrt{x+1}$, $y = 1 - x$. Vypočítejte obsah tohoto obrazce.

c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x.