

Matematika I A – ukázkový test 1 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x - y + z &= 1 \\x + y + 3z &= 1 \\(2a - 1)x + (a + 1)y + z &= 1 - a\end{aligned}$$

- Napište *Frobeniovu větu* (předpoklady + tvrzení).
- Vyšetřete počet řešení dané soustavy v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.
- Určete neznámou y v závislosti na hodnotě parametru a .

2. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici \mathbf{A} .
- Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek existence inverzní matice. Ověřte splnění této podmínky pro zadanou matici \mathbf{A} .
- Vypočítejte \mathbf{A}^{-1} , $\det \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A}^{-1})$ a $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})$. Ověřte z definice správnost vypočtené matice \mathbf{A}^{-1} .

3. Je dána funkce $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

- Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.
Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 8$.
Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu funkce f v bodě $x_1 = 7, 8$.
Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = 8$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
- Zdůvodněte existenci a nalezněte absolutní extrémů funkce f na intervalu $I = \langle -1; 1 \rangle$ (stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte limity funkce f v jeho krajních bodech.
- Určete intervaly monotonie a lokální extrémů této funkce.
- Nalezněte asymptoty grafu funkce f . Graf načrtněte.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\int \ln^2 x \, dx$

b) $\int (\cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \, d\varphi$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Zapište větu o integraci *per-partes pro určitý integrál*.

b) Vypočítejte integrál $\int_0^3 (x - 2) \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx$ (s parametrem $k \in \mathbb{N}$).

c) Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 + x^2} dx$.

Matematika I B – ukázkový test 1 pro 2018/2019

1. a) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$ a $\vec{w} = (3; 2; 1)$ jsou lineárně nezávislé.
- b) Je-li to možné, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1; 2; 1)$ jako lineární kombinaci vektorů \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} (tzn. určete koeficienty a запиšte tuto lineární kombinaci).
- c) Na základě výpočtu rozhodněte, zda jsou vektory \vec{u} a \vec{w} na sebe kolmé. Určete úhel, který svírá vektor \vec{v} s vektorem určujícím kladný směr osy z .

2. Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Ověřte z definice správnost výsledku.
- b) Z rovnice $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ vyjádřete neznámou matici \mathbf{X} . Určete \mathbf{X} pro zadané matice \mathbf{A} , \mathbf{B} .

3. Je dána funkce $f(x) = e^{2x-4}$.

- a) Vypočítejte derivace $f'(x)$, $f''(x)$ a určete hodnoty $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$.
- b) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem $x_0 = 2$.
- c) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.
- d) Na základě znalosti hodnot $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ načrtněte tvar grafu zadané funkce pro x z okolí bodu $x_0 = 2$. Do téhož obrázku zakreslete i tečnu z úlohy c).

4. Dána funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

- a) Určete její definiční obor. Je funkce f sudá nebo lichá? (Odpověď zdůvodněte.)
- b) Vypočítejte derivaci funkce f a určete intervaly monotónie funkce f .
- c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \rightarrow -\infty$ a $x \rightarrow +\infty$. Načrtněte graf.

5. Vypočítejte následující integrály. Pro integrál z úlohy a) uveďte interval(y) jeho existence.

a) $\int r \sqrt{1 - r^2} \, dr$

b) $\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12} \, dx$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Vypočítejte integrál $\int (3x + 2) \cos x \, dx$.

- b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = (3x + 2) \cos x$.

Matematika I A – ukázkový test 2 pro 2018/2019

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1; -2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4; 5)$, $\vec{c} = (2; 1; 3)$ a $\vec{d} = (1; 2; 3)$.
- Zdůvodněte (nebo ověřte), že tato skupina vektorů *netvoří* bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
 - Z vektorů \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} vyberte bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
Ověřte, že Vámi vybrané vektory skutečně tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
 - Vyjádřete vektory \vec{c} a \vec{d} jako lineární kombinaci vektorů Vámi zvolené báze (tzn. určete koeficienty a zapište příslušnou lineární kombinaci).
 - Ověřte, zda platí následující geometrické vztahy mezi danými vektory: $\vec{a} \perp \vec{d}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$.

2. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & b & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice*.
- Vypočítejte determinant matice \mathbf{A} . Určete hodnotu matice \mathbf{A} , je-li $a = 1$, $b = 2$.
- Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má homogenní soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ pouze triviální (nulové) řešení? Odpověď zdůvodněte.

3. a) Definujte pojem *limita posloupnosti* reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Dána posloupnost $\{a_n = \frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Vypočítejte její limitu L . Pro $\varepsilon = 0,01$ určete přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(L)$.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3} \right)$.

4. Je dána funkce $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

- Určete definiční obor funkce f a průsečíky grafu funkce f s osami x a y .
 - Určete intervaly monotónie a lokální extrémů.
 - Vypočítejte limitu pro $x \rightarrow +\infty$. Načrtněte graf dané funkce na intervalu $\langle -1; +\infty \rangle$.
5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.
Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\int (x^2 + 2) \sin x \, dx$

b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}} \, dx$

6. Je dána funkce $f(x) = \frac{6x+2}{(x^2-1)(x+3)}$.

- Vypočítejte integrál $\int f(x) \, dx$. Určete intervaly existence.
- Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 2; 4 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = f(x)$. Výsledek upravte.
- Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.

Matematika I B – ukázkový test 2 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 1 \\2x + y &= -4 \\5x + y - 3z &= -13\end{aligned}$$

- a) Určete hodnotu matice této soustavy a hodnotu matice rozšířené.
b) Pomocí Cramerova pravidla určete řešení dané soustavy. Proveďte zkoušku.

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Nalezněte vlastní čísla této matice. Zvolte jedno z nich a napište odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Vlastní vektory pak určete.

3. a) Vypočítejte derivace 1. řádu daných funkcí:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 8}, \quad g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + 1).$$

- b) Pro funkci $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$ vypočítejte jednostrannou limitu zprava v bodě $x_0 = -2$, tj. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. Na zúženém definičním oboru $(-2, +\infty)$ vyšetřete asymptoty této funkce a zapište jejich rovnice.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 3)(1 - 2n)}{5n^2 - 1}$.

4. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x - 3} - x$.

- a) Určete $D(f)$, vypočítejte derivaci f' a stanovte její definiční obor $D(f')$.
b) Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí, resp. klesající.
c) Určete lokální extrémů funkce f a načrtněte její graf na intervalu $\langle 3/2; 6 \rangle$.
5. Vypočítejte následující integrály. Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\int x^6 \ln x \, dx$

b) $\int \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi$

6. Na intervalu $\langle 0; 4 \rangle$ je (po částech) definována funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \langle 0; 2 \rangle \\ 6 - x & \text{pro } x \in (2; 4) \end{cases}$

- a) Načrtněte graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0; 4 \rangle$.

b) Vypočítejte určitý integrál funkce $f(x)$, tzn. $\int_0^4 f(x) \, dx$.

- c) Určete střední hodnoty μ_1 a μ_2 funkce $f(x)$ na intervalech $I_1 = \langle 0; 2 \rangle$ a $I_2 = \langle 0; 4 \rangle$.

Matematika I A – ukázkový test 3 pro 2018/2019

1. Je dána matice \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Najděte spektrum a spektrální poloměr matice \mathbf{A} , tzn. najděte množinu $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ a číslo $\rho(\mathbf{A}) = \max_i \{|\lambda_i|\}$

b) Ověřte, že pro Vámi vypočtená vlastní čísla platí vztahy pro stopu a determinant matice:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i^n a_{ii} = \sum_i^n \lambda_i \quad , \quad \text{resp.} \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_i^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

c) Pro nejmenší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo matice \mathbf{A} zapište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Soustavu vyřešte a napište odpovídající vlastní vektory.

d) Napište, jaký platí (obecně) vztah mezi vlastními čísly a vektory matice \mathbf{A} a \mathbf{A}^n .

Užijte tohoto vztahu a nalezněte vlastní čísla matic \mathbf{A}^{-1} a \mathbf{A}^2 (pokud tyto matice existují). Alespoň pro jedno z těchto vlastních čísel určete i odpovídající vlastní vektory.

2. a) Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$.

Pokud se rozhodnete pro l'Hospitalovo pravidlo, ověřte, zda ho lze použít.

b) Napište definici ostrého lokálního minima funkce. Napište, ve kterých bodech může lokální extrém nastat.

c) Dány funkce $f_1(x) = x^3 + 2$, $f_2(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

Načrtněte grafy těchto funkcí a zjistěte (a zdůvodněte), zda dané funkce mají lokální extrémy. Pokud ano, určete jejich polohu, typ a hodnotu.

3. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x^2}{2}$.

a) Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.

b) Pro tuto funkci napište Taylorův polynom $T_2(x)$ druhého stupně se středem $x_0 = 0$.

Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty dané funkce f v bodě $x = 1/2$. Načrtněte tvar grafu zadané funkce pro x z okolí bodu $x_0 = 0$. Do téhož obrázku zakreslete i tečnu z úlohy a).

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Odhadněte velikost chyby při výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1/2$ pomocí polynomu T_2 .

d) Určete největší možný interval $\langle 0, b \rangle$, na němž je $|R_3(x)| \leq 1/100$.

4. Je dána funkce $f(x) = e^{x^2+2x}$.

a) Určete intervaly monotónie a intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

b) Určete lokální extrémy. Najděte průsečíky grafu dané funkce s osami x, y .

c) Vypočítejte limity pro $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ a načrtněte graf.

5. Vypočítejte integrály a) $\int (\ln x + \sqrt{\ln x}) \frac{1}{x} dx$, b) $\int (2 - 3x) \cos 5x dx$.

Nezapomeňte na intervaly existence integrálů.

Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

6. a) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x) = \sqrt{x-1}$.

b) Načrtněte obrazec ohraničený křivkami $y = \sqrt{x-1}$, $x = 0$, $y = 0$ a $y = 1$ a vypočítejte jeho plošný obsah.

c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y .

Matematika I B – ukázkový test 3 pro 2018/2019

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= -5 \\ x + z &= 4 \\ 4x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$$
 - a) Určete hodnotu *matice soustavy* a *rozšířené matice* dané soustavy.
 - b) Je možné k řešení této soustavy použít Cramerovo pravidlo? Zdůvodněte.
 - c) Nalezněte řešení (pokud existuje) dané soustavy.

2. a) Je posloupnost $\left\{ \frac{2n-1}{n^2} \right\}_{i=1}^{+\infty}$ rostoucí nebo klesající? Odpověď zdůvodněte podle definice.
 - b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2 - x^3}{e^{2x} - \cos 3x}$.
 - c) Vypočítejte limitu složené funkce $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x}$.

3. Je dána funkce $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$.
 - a) Vypočítejte derivaci této funkce a stanovte její definiční obor. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 = -2$.
 - b) Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = -2, 2$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = -2$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).
 - c) Nalezněte absolutní extrémů funkce f na intervalu $I = \langle 1; 4 \rangle$ (stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = (x-2)e^x$.
 - a) Určete intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí, případně klesající.
 - b) Určete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, případně konkávní.
 - c) Určete průsečíky grafu s osami. Vypočítejte funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémů, inflexní body) a načrtněte graf v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

5. Vypočítejte integrály
 - a) $\int_0^1 (4 - 3x) e^x dx$,
 - b) $\int \left(\frac{x^2}{x^3 + 8} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$.
 Uveďte interval existence druhého integrálu.

6. a) Vypočítejte integrál $\int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx$
 - b) Načrtněte obrazec, který je omezen osou x a grafy funkcí $y = \sqrt{x+1}$, $y = 1 - x$. Vypočítejte obsah tohoto obrazce.
 - c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x .