Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 1 (2019)

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Zapište a načrtněte množinu D, ve které je diferencovatelná funkce $f(x, y) = \ln(xy - 4)$. Odpověď zdůvodněte.

   b) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace funkce f v bodě $A = [-2;\ -4]$ nulová. Odpověď zdůvodněte nebo nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.

   c) Určete diferenciál df funkce f v bodě A. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[-2; -4; ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-1,8;\ -3,9]$.

   d) Napište rovnice izokřivek (tj. $f(x, y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte.

2. a) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = y^4 - 2x^3y + x - 1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [0; 1]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci.

   b) Určete derivaci $f'(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0; 1]$. Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(0, 2)$.

   c) Určete hodnotu 2. derivace $f''(0)$. Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem $x_0 = 0$. Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

3. a) Napište Fubiniovu větu pro dvojný integrál (úplnou větu obsahující předpoklady a tvrzení, s popisem použitého značení).

   b) Načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu Ω, která je omezena křivkami $x = \pi,\ y = x,\ y = 2x$ (popis os, měřítko, průsečíky křivek).
   Vypočítejte integrál $\iint_\Omega \sin x\ dx\, dy$. Uveďte příklad možné fyzikální (nebo geometrické) interpretace tohoto integrálu.

4. a) Načrtněte a slovně popište těleso M, které je omezené plochami $z = x^2 + y^2,\ z = 18 - x^2 - y^2$. Zakreslete průmět M_{xy} tělesa M do roviny $z = 0$.

   b) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. a) Načrtněte křivku $C : y = \dfrac{1}{2}\, x^2 + 2$ mezi body $K = [0;\ 2]$, $L = [2;\ 4]$.
   Navrhněte parametrizaci této křivky.

   b) Vypočítejte hmotnost této křivky, je-li délková hustota $\varrho(x, y) = x$.

   c) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + y\ ,\ xy)$ působením podél této křivky C od bodu L do bodu K.

6. a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu. Ověřte, že jsou splněny její předpoklady pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x^3, z, y)$ plochou Q, která je povrchem tělesa $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \leqq z \leqq 3\}$. Plocha Q je vně orientovaná.

   b) Načrtněte plochu Q a vypočítejte tok daného pole $\vec{f}$ touto plochou.

Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 2 (2019)

1. a) Dána funkce $z = f(x,y) = \sqrt{1+xy^2}$. Zapište a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je diferencovatelná. Odpověď zdůvodněte (postačující podm. pro diferencovatelnost).

   b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [2; -2]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [5; 2]$. Popište chování dané funkce f v bodě A v tomto směru, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Je tento vektor $\vec{s}$ směrem, ve kterém daná funkce f v bodě A nejrychleji roste ? Odpověď zdůvodněte ! Určete derivaci ve směru maximálního růstu v bodě A.

   d) Napište rovnici tečné roviny, její normálový vektor a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[2; -2; ?]$.

2. a) Vyšetřete, zda funkce $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x$ je řešením diferenciální rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplaceova rovnice).

   b) Napište postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x,y)$ měla v bodě $[x_0\, y_0]$ lokální minimum. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$.

3. a) Načrtněte množinu $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} \leq 1,\ y \geq \sqrt{3}\,|x|\right\}$.

   Transformujte integrál $\displaystyle\iint_M \frac{1}{6}\,|x|\,y\,dx\,dy$ do zobecněných polárních souřadnic.

   Vypočítejte z definice Jacobián této transformace.

   b) Integrál $\displaystyle\iint_M \frac{1}{6}\,|x|\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ vypočítejte.

4. Je dáno těleso $W = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x \leq 2,\ y \leq 2,\ xy \geq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y\right\}$. Načrtněte průmět W_{xy} tělesa W do roviny $z = 0$.

   Vypočítejte hmotnost daného tělesa, má-li hustotu $\rho(x,y,z) = x$.

   Uveďte alespoň jeden příklad možného fyzikálního významu tohoto integrálu typu statický moment (při jaké hustotě, vzhledem k jaké ose či rovině).

5. a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$ bylo potenciální v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$. Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = \left(\dfrac{y^2}{x} + x^2,\ 2y\ln x\ - \cos y\right)$ je potenciální.

   Uveďte největší možnou oblast.

   b) Napište podmínku, ze které počítáme podle definice potenciál φ vektorového pole (obecně) $\vec{f} = (U,V)$. Vypočítejte potenciál pole $\vec{f}$ z části a).

   c) Vypočítejte křivkový integrál daného pole $\vec{f}$ podél křivky C s počátečním bodem $K = [1; \pi/2]$ a koncovým bodem $L = [2; 0]$.

   d) Je dána skalární funkce $\psi(x,y,z) = xy^2 + y\mathrm{e}^{3z}$.

   Vypočítejte vektorové pole $\vec{g}(x,y,z) = \operatorname{grad}\psi(x,y,z)$ a dále vypočítejte rotaci $\operatorname{rot}\vec{g}(x,y,z)$.

   Je vektorové pole $\vec{g}(x,y,z)$ potenciální (v $\mathbb{E}_3$) ? Odpověď zdůvodněte.

6. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq 2,\ y \geq 0\}$.

   Navrhněte parametrizaci plochy Q a jejím užitím vypočítejte vektor kolmý k této ploše.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (-y, x, z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Matematika II, úroveň A – ukázkový test č. 3 (2019)

1. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$. Nezapomeňte uvést funkční hodnoty.

   b) Zdůvodněte existenci a najděte absolutní extrémy funkce f z úlohy a) na množině $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y \geq x^2,\ y \leq 4 \,\}$.

2. a) Ověřte, že rovnicí $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$, jejíž graf prochází bodem $T = [1; 2; -1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1;\ 2]$.

   b) Určete hodnoty parciálních derivací $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1; 2]$. Popište chování dané funkce v okolí bodu $[1; 2]$ v kladném směru osy x a v kladném směru osy y, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

   c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1; 2]$ ve směru $\vec{u} = (-1, 2)$. Je vektor $\vec{u}$ směrem, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá ? Zdůvodněte !

   d) Určete diferenciál funkce f v bodě $[1; 2]$. Napište rovnici tečné roviny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě T.

3. a) Načrtněte množinu $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \geqq 1,\ \ln x \leq y \leqq 1\}$.

   b) Integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ převeďte na dvojnásobný, a to oběma způsoby (s elementárním oborem integrace vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y).

   c) Zvolte jednu z možností a daný dvojný integrál vypočítejte.

4. Načrtněte těleso $W = \{\, [x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \}$. Těleso je homogenní s hustotou $\rho(x,y,z) = k$.

   a) Užitím trojného integrálu (ve sférických souřadnicích) vypočítejte hmotnost m tohoto tělesa.

   b) Vypočítejte statický moment M_{xy} tělesa W vzhledem k rovině xy.

   c) Vypočítejte z-souřadnici těžiště tohoto tělesa W.

5. Načrtněte kladně orientovanou křivku $C = \left\{ [x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \right\}$.

   a) Napište Greenovu větu. Pomocí této věty vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y,\ x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\displaystyle\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$).

   b) Tento křivkový integrál vypočítejte pomocí parametrizace dané křivky C.

6. a) Je dána plocha Q (část hyperbolického paraboloidu): $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, kde $R > 0$ je konstanta. Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.

   b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q a jejím užitím vypočítejte vektor kolmý k této ploše.

   c) Určete plošný obsah plochy Q.