MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek (2015)
doplněné o další úlohy

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

1. část DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

2. část (Dvojný a trojný integrál) bude vydána v polovině března 2015

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2]. Jedná se o **základní** doporučenou literaturu pro předmět Matematika II, a to v úrovni A i B.

[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. *(Sbírka řešených i neřešených příkladů)*

Pro zájemce o **další procvičení základních znalostí a dovedností** budou postupně na webových stránkách ÚTM pod předmětem Matematika II dostupné soubory "Diferenciální počet (parciální derivace, základní úlohy)" a "Implicitní funkce". Podstatná část těchto úloh odpovídá i požadavkům zkoušky úrovně B (Beta).

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A (alfa), resp. úrovně B, ale jako **orientační** rozlišení.
Úlohy č. 1 až 4 (včetně variant), 5a), b) vyžadují základní znalosti, proto jejich části odpovídající požadavkům zkoušky **úrovně B** jsou použitelné i pro tuto zkoušku.
Z okruhu Implicitní funkce odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B svým zaměřením a náročností např. úlohy 7 a 8 a dále např. úlohy 9 a 10 (bez druhé derivace) a úloha č. 12 (bez varianty 12.1). Z okruhu Lokální extrémy odpovídají zkoušce B úlohy č. 15 až 20.

Pokud jsou vyžadovány obrázky, pak je stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, popis křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité, např. průsečíky křivek.

---

1. Definiční obor, graf, izokřivky, parciální derivace, gradient, diferencovatelnost, tečná rovina, diferenciál, derivace ve směru, popis chování funkce

V úlohách 1 a 2, kromě formulovaných úkolů, nejprve určete (zapište) definiční obor $D(f)$ Dále pak pojmenujte a načrtněte v $\mathbb{E}_3$ plochu, která je grafem dané funkce. Pro lepší představu o řešené úloze si do obrázku můžete též zakreslit další vyšetřované útvary – body, vektory, případně i tečnou rovinu.

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Určete a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je funkce $z = f(x, y) = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$ diferencovatelná.
   b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1, -2]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [0, 0]$. Popište chování funkce f v bodě A v daném směru (funkce roste, resp. klesá, jak rychle (odhad)).
   c) Napište rovnici tečné roviny a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, -2, ?]$.
   d) Napište rovnice izokřivek (tj. $f(x, y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = 3$. Izokřivky načrtněte.

2. a) Napište (a <u>zdůvodněte</u>), ve kterých bodech $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $z = f(x, y) = -\sqrt{5y - x^2}$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.
   b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu dané funkce v bodě $A = [4, 5]$. Popište chování dané funkce v bodě A (funkce roste, resp. klesá, v jakém směru a odhadněte, jak rychle).
   c) Určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru $\vec{s}$.
   d) Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [4, 5]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $[4.3, 5.3]$.

3. a) Určete (se zdůvodněním) a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu, ve které je funkce $z = f(x, y) = \ln(xy - 4)$ diferencovatelná.
   b) Určete gradient této funkce f v bodě $A = [-2, -4]$. Popište, co vypočtený vektor udává. Určete velikost derivace zadané funkce v bodě A ve směru gradientu.
   c) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace dané funkce v bodě A nulová. Nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.
   d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0$ a pro $k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x, y) = k$).

4. Další varianty úloh 1 až 3 s jinou funkcí f a jiným bodem A.
   Úlohy 4.7 až 4.11 řešte bez izokřivek, úlohy 4.4 až 4.11 bez grafu.

   4.1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$ $\quad A = [-7, 1]$

   4.2. $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad A = [-3, 4]$

4.3. $f(x,y)=\sqrt{x-y^2+2}$ $\quad A=[3,-1]$

4.4. $f(x,y)=\ln(3x-y+2)$ $\quad A=[-1,-2]$

4.5. $f(x,y)=\dfrac{3x-2y}{y}$ $\quad A=[-1,2]$

4.6. $f(x,y)=\ln(xy^2)$ $\quad A=[2,-1]$

4.7. $f(x,y)=\cos x+\dfrac{1}{2}\sin y-3$ $\quad A=[0,\pi/2]$

4.8. $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}-x\sqrt{y}$ $\quad A=[4,1]$

4.9. $f(x,y)=(x^2+y)\,\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad A=[0,1]$

4.10. $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{2}+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad A=[1,1]$

4.11. $f(x,y)=\ln(xy)-\sqrt{x^2+y^2-20}$ $\quad A=[-2,-5]$

5. a) Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y)=x^2-y^2+6xy+2x$ v bodě $A=[-1,2]$ ve směru určeném vektorem $\vec{s}=(2,-2)$. Je to směr maximálního růstu funkce f v bodě A? Zdůvodněte !
   b) Určete všechny body, v nichž je gradient funkce f roven nulovému vektoru.
   c) Najděte dotykový bod a rovnici tečné roviny τ ke grafu funkce f rovnoběžné s rovinou $\varrho:\ 4x+6y-z+3=0$.

6. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $z=f(x,y)=y^2\sin(x^2-y^2)$.
   b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1,\,1,\,?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[0.9,\,1.1]$.
   c) Dokažte, že daná funkce vyhovuje pro všechna $[x,y]\in\mathbb{E}_2$ diferenciální rovnici $y^2\dfrac{\partial f}{\partial x}+xy\dfrac{\partial f}{\partial y}=2xz$.

   6.1. Varianta úlohy c): Ověřte, že funkce $u(x,t)=\sin(x-ct)$ a funkce $u(x,t)=\sin\omega ct\cdot\sin\omega x$ vyhovují diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\,\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ (tzv. vlnová rovnice).

   6.2. Varianta úlohy c): Ověřte, že funkce $u(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ vyhovuje diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ (Laplaceova rovnice).

Výsledky: **1.** Graf: "horní"část (tj. $z\ge0$) elipsoidu $x^2+2y^2+z^2=18$ a) $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2:18-x^2-2y^2>0\}$, tj. vnitřek elipsy se středem v počátku, poloosy: $a=3\sqrt{2}$, $b=3$, v množině D má daná funkce spojité parciální derivace b) $\operatorname{grad}f(A)=(-1/3,4/3)$, $\overrightarrow{s}=(-1,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial\overrightarrow{s}}(A)=3\sqrt{5}/5$, daná funkce v bodě A v daném směru roste, a to se sklonem asi 50° c) $\tau:\ z=3-(x-1)/3+4(y+2)/3$, po úpravě: $x-4y+3z=18$, normála $n:\ (x,y,z)=[1,-2,3]+t\,(1,-4,3)$, $t\in\mathbb{R}$ d) Izokřivky (vrstevnice) jsou elipsy: $x^2+2y^2=18$ (hranice $D(f)$, pro k=0), resp. $x^2+2y^2=9$ (pro $k=3$).

2. Graf: "dolní"část ($z\le0$) rotačního paraboloidu $y=(x^2+z^2)/5$, osa v ose y.
a) V bodech $[x,y]\in\mathbb{E}_2:5y-x^2>0$, tj. vnitřek paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose y, v těchto bodech má daná funkce spojité parciální derivace.
b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=4/3$, daná funkce v bodě A v kladném směru osy x roste, a to se sklonem asi $50^\circ-55^\circ$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=-5/6$, daná funkce v bodě A v kladném směru osy y klesá, a to se sklonem asi 40°.
c) $\overrightarrow{s}=-\operatorname{grad}f(A)=(-4/3,5/6)$, $\dfrac{\partial f}{\partial\overrightarrow{s}}(A)=-\|\operatorname{grad}f(A)\|=-\sqrt{89}/6\doteq-1.6$, tedy pokles se sklonem téměř 60° d) $df(A)=\frac{4}{3}\,dx-\frac{5}{6}\,dy$, $f(4.3,\,5.3)\doteq f(A)+\frac{4}{3}\,0.3-\frac{5}{6}\,0.3=-2.85$.
3. a) $D=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2:xy-4>0\}$, v množině D má daná funkce spojité parciální derivace. D je otevřená množina ohraničená křivkou $y=4/x$, $D=D_1\cup D_2$ (množina v 1. a 3. kvadrantu) b) $\operatorname{grad}f(A)=(-1,-1/2)$ udává směr maximálního růstu dané funkce v bodě A c) $\overrightarrow{s}\perp\operatorname{grad}f(A)$, např. $\overrightarrow{s}=(1/2,-1)$
d) $C_1=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2:\ln(xy-4)=0\}$, tj. křivka $y=5/x$, $C_2=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2:\ln(xy-4)=\ln4\}$, tj. křivka $y=8/x$.

4.1. Graf: "horní"část ($z\ge0$) dvoudílného hyperboloidu $x^2-9y^2-z^2=36$, vrcholy v bodech $[6,0,0],[-6,0,0]$.
4.2. Graf: "dolní"část rotační kuželové plochy, osa v ose z, vrchol v bodě $[0,0,4]$.
4.3. Graf: "horní"část ($z\ge0$) rotačního paraboloidu $x=y^2+z^2-2$, osa v ose x, vrchol $[-2,0,0]$.

5. a) $\dfrac{\partial f}{\partial\overrightarrow{s}}(A)=11\sqrt{2}$. Není to směr maximálního růstu dané funkce v bodě A, to je směr $\operatorname{grad}f(A)=(12,-10)$
b) $x=-1/10$, $y=-3/10$ c) viz [2], př. 140: $T=[1,0,3]$, $4x+6y-z-1=0$.

6. a) $f'_x(x,y)=2xy^2\cos(x^2-y^2)$, $f'_y(x,y)=2y\sin(x^2-y^2)-2y^3\cos(x^2-y^2)$.
b) $z=2x-2y$, $f(0.9,\,1.1)\doteq-0.4$.

2. Implicitní funkce

2.1. Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

7. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $F(x, y) = x^2 y - x^3 - 2 \cdot \sqrt{y} + 1$.
   b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 4]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$.
   c) Určete hodnotu derivace $f'(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 4]$.
   d) Rovnici tečny užijte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v bodě $x = 0.8$.

8. Další varianty této úlohy s jinou funkcí F a bodem $[x_0, y_0]$:

   8.1. $F(x, y) = y\,\mathrm{e}^x + y^2 - 2x^2 y - 2$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$; výpočet $f'(0)$, rovnice tečny a rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[0, 1]$, popis chování této funkce v bodě $x_0 = 0$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad).

   8.2. $F(x, y) = x^3 + \dfrac{y^2}{2} - x^2 y - 1$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$; výpočet $f'(1)$, rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[1, 2]$, popis chování této funkce v bodě $x_0 = 1$. Pokud víte, že $f''(1) = 1$, načrtněte do jednoho obrázku tečnu a tvar grafu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

   Následující čtyři úlohy mají společnou část

   a) Napište **postačující** podmínky pro existenci spojité funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a pro spojitost její derivace $f'(x)$ v okolí bodu $x = x_0$.

9. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^3 + 2x^2 y + y^4 - 1 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0] = [2, -1]$ a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu $x_0 = 2$.
   c) Určete hodnoty derivací $f'(2)$ a $f''(2)$.
   d) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 2$. Pomocí $T_2(x)$ pak vypočítejte přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 2.2$.

10. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0$ je v okolí bodu $x_0 = 1$ definována diferencovatelná **kladná** funkce $y = f(x)$. Určete hodnotu $y_0 = f(x_0)$.
    c) Vypočtěte hodnotu derivace $f'(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
    d) Zjistěte, zda je funkce f konvexní nebo konkávní v okolí bodu $x_0 = 1$. Načrtněte tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

11. b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je implicitně určena diferencovatelná funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0] = [1, 1]$.
    c) Vyšetřete, zda funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0 = 1$ lokální extrém. Pokud ano, určete, zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. (Zdůvodněte.)

12. b) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = \ln(x + y) + 2x + y = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci v okolí bodu $x_0 = -1$ a splňuje podmínku $f(-1) = 2$.
    c) Určete hodnotu derivace $f'(-1)$. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[-1, 2]$.
    d) Rovnici tečny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = -0.9$.
    12.1. Varianta předcházející úlohy: $F(x, y) = xy\mathrm{e}^{x-y} - \frac{2}{\mathrm{e}} = 0$, $x_0 = 1$, $f(1) = 2$, tečna ke grafu funkce f v bodě $[1, 2]$, výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1.1$, výpočet hodnoty 2. derivace $f''(1)$.

2.2. Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$

13. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [-1, -2, 1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [-1, -2]$.
    b) Určete hodnoty derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[-1, -2]$. Napište gradient funkce f v bodě $[-1, -2]$.
    c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$).
    d) Rovnici tečné roviny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-0.9, -2.1]$.

14. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [1, 2, -1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 2]$.
    b) Určete hodnoty parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1, 2]$.
    c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1, 2]$ ve směru $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$.

d) Napište směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě $[1,2]$ nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $[1,2]$ v tomto směru $\vec{s}$.

Výsledky: **7.** $F'_x(x,y) = 2xy - 3x^2$, $F'_y(x,y) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{y}}$, $f'(1) = -10$, tečna: $y = 4 - 10(x-1)$, $f(0.8) \doteq 6$.

8.1 $F'_x(x,y) = y\,\mathrm{e}^x - 4xy$, $F'_y(x,y) = \mathrm{e}^x + 2y - 2x^2$, $f'(0) = -1/3$, tečna: $y = 1 - x/3$, normála: $y = 1 + 3x$, funkce f je v bodě $x_0 = 1$ klesající, sklon tečny je menší než 30^o, přesněji asi 20^o.

8.2 $F'_x(x,y) = 3x^2 - 2xy$, $F'_y(x,y) = y - x^2$, $f'(1) = 1$, tečna: $y = x + 1$, funkce f je v bodě $x_0 = 1$ rostoucí, sklon tečny je 45^o. **9.** c) $f'(2) = f''(2) = -1$ d) $T_2(x) = 1 - x - (x-2)^2/2$, $f(2.2) = -1.22$. **10.** b) $y_0 = 2$ c) $f'(1) = -9/5$, tečna: $y = 2 - \frac{9}{5}(x-1)$ d) $f''(1) = 138/125$, f je konvexní. **11.** c) $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2$, funkce f má v bodě $x_0 = 1$ lokální maximum.

12. viz [2], př. 195, $f'(1) = -3/2$. **12.1** $F'_x(x,y) = (y + xy)\,\mathrm{e}^{x-y}$, $F'_y(x,y) = (x - xy)\,\mathrm{e}^{x-y}$, $f'(x) = -\dfrac{y+xy}{x-xy}$, $f'(1) = 4$, tečna: $y = 2 + 4(x-1)$, $f(1.1) \doteq 2.4$, $f''(1) = -10$.

13. a), b) viz [2], př. 187 c) $\tau: x - y - 3z + 2 = 0$, normála $n: (x,y,z) = [-1,-2,1] + t\,(1,-1,-3)$, $t \in \mathbb{R}$. Pozn. Tečnou rovinu k ploše $F(x,y,z) = 0$ lze určit též užitím vztahu grad $F(A) \cdot (X - A) = 0$.

14. viz [2], př. 197 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1/5$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -11/5$ c) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = -21\sqrt{5}/25$ d) $\vec{s} = -\mathrm{grad} f(1,2) = (1/5, 11/5)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,2) = -\sqrt{122}/5$.

3. Extrémy funkcí dvou proměnných

V následujících úlohách
a) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém funkce n-proměnných v bodě A. Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce $f(x,y)$ v bodě A.
b) Vyšetřete **lokální extrémy** dané funkce f, tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

15. $f(x,y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$
16. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$
17. $f(x,y) = 2y - y^2 - x\,\mathrm{e}^x$
18. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$
19. $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$
20. $f(x,y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$
21. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
22. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
23. $f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x - 3y$
24. $f(x,y) = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$
25. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/2}\,(x + y^2)$
26. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$

Výsledky: **15.** $f_{\min}(-8,-2) = -16$. **16.** $f_{\min}(2,-3) = -25$, v bodě $[-2,-3]$ není extrém.

17. $f_{\max}(-1,1) = 1 + 1/\mathrm{e}$. **18.** $f_{\min}(2,2) = 2$, v bodě $[0,0]$ není extrém.
19. $f_{\min}(3,3) = -19$, v bodě $[-1,-1]$ není extrém. **20.** $f_{\min}(-1,1) = 3$. **21.** $f_{\min}(5,2) = 30$.
22.-25. viz [2], odst. II.11. **26.** $f_{\min}(2,-1) = 3 - 6\ln 2$, bod $[-2,1] \notin D(f)$.

27. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$.
    b) Zdůvodněte existenci a najděte **absolutní extrémy** této funkce na úsečce AB, kde $A = [0,2], B = [1,1]$.
    [a) lokální $f_{\min}(-1,-1) = -1$, b) $f_{\min}(1/2,3/2) = 6$, $f_{\max}(0,2) = f_{\max}(1,1) = 7$].

V následujících třech úlohách

a) Zdůvodněte **existenci absolutních extrémů** funkce f na dané množině M.
b) **Absolutní extrémy** vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce f na množině M.

28. $f(x,y) = x^2 + xy - 3x - y$, $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x + y \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\}$.
    [$f_{\min}(0,3) = -3$, $f_{\max}(0,0) = f_{\max}(3,0) = 0$].

29. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$, $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0 \,\}$ (Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.)
    [$f_{\min}(1,0) = -1$, $f_{\max}(-3,0) = 15$].

30. $f(x,y) = x + \ln x - y^2$, $M = \{\, [x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y = x + 1,\ 1/4 \le x \le 1 \}$.
    [$f_{\min}(1,2) = -3$, $f_{\max}(1/2,3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2,4$, $f(1/4,5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2,7$ není extrém] .