

## MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek ( 2014) doplňené o další úlohy

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi ( e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

### 3. část KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY, GREENOVA VĚTA, POTENCIÁLNÍ VEKTOROVÉ POLE, PLOŠNÉ INTEGRÁLY, GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2].

[1] J. Neustupa: **Matematika II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. (*Sbírka řešených i neřešených příkladů*)

[3] **Matematika II - vybrané úlohy ze zkoušek**, 2. část: Dvojný a trojný integrál (2015). Web ÚTM.

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A ( Alfa), resp. B (Beta), ale jako orientační rozlišení. Rozsahem a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1 až 3, 6, 8a, 9, 12, 13, 17, 19, 22 až 26, 29, 32, 35, 36, 41 až 43, 47.

Zkoušce úrovně A odpovídají např. úlohy 3 až 8, 10, 11, 14 až 21, 24 až 31, 33, 34, 36 až 40, 43 až 58.

Obrázky stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, **popis** křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité ( průsečíky křivek ap.)

### Křivkový integrál skalární funkce, křivkový integrál vektorové funkce, Greenova věta

V následujících pěti úlohách je dána křivka  $C$  a délková hustota  $\rho$ .

- Navrhnete parametrizaci  $X = P(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$  dané křivky  $C$  a určete délku vektoru  $\dot{P}(t)$ .
- Vypočítejte hmotnost křivky  $C$ , je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou  $\rho$ .
- Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

1.  $C : x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, \rho(x, y) = x$ . [  $m = 18$ ; statický moment  $M_y$  ( vzhledem k ose  $y$ ), je-li  $\rho(x, y) = 1$  ]

2.  $C : x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = t/3; t \in \langle 0, 3 \rangle, \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$   
[  $m = 28\sqrt{82}/3$ , c) moment setrvačnosti  $J_0$  ( vzhledem k počátku), je-li  $\rho(x, y, z) = 1$  ]

3.  $C : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/4; t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \rho(x, y, z) = z^2/(x^2 + y^2)$   
[  $m = \sqrt{65} \pi^3/96$ , c) moment setrvačnosti  $J_{xy}$  ( vzhledem k rovině  $xy$ ), je-li  $\rho(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2)$  ]

4.  $C : y = \frac{x^2}{2} + 2$  mezi body  $A = [0, 2], B = [2, 4], \rho(x, y) = x$ . [  $m = (5\sqrt{5} - 1)/3$ , c) viz úloha č. 1 ]

5.  $C : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t; t \in \langle 0, 1 \rangle, \rho(x, y, z) = z$ .  
[  $m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3$ , c) statický moment  $M_{xy}$  ( vzhledem k rovině  $xy$ ), je-li  $\rho(x, y, z) = 1$  ]

6. Křivka  $C$  je dána parametrizací  $X = P(t): x = \cos t, y = 3 \sin t, z = \sqrt{8} \cos t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .

- Napište vektor  $\dot{P}(t)$  a vypočítejte jeho délku  $\|\dot{P}(t)\|$ .
- Vypočítejte křivkový integrál  $\int_C f \, ds$ , kde  $f(x, y, z) = xy + 2$ . [  $12\pi$  ]

7. Zdůvodněte, na které z křivek

- $C$  je kružnice  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,
- $C$  je úsečka  $AB$ , kde  $A = [2, 3], B = [0, 1]$  existuje integrál

$$\int_C \frac{3 - y}{y - x + 2} \, ds?$$

Příslušný integrál pak vypočítejte pomocí parametrizace křivky  $C$ .

- ne, daná funkce není na křivce  $C$  omezená,
- existuje, daná funkce je na úsečce  $AB$  spojitá, výsl.:  $\sqrt{8}/3$  ]

8. Vypočítejte délku dané křivky  $C$ :

a)  $C : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/2; t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  (jeden závit šroubovice) [ délka  $l = \pi \sqrt{17}$  ]

b)  $C : y = \frac{1}{3}x \sqrt{x}, x \in \langle 0; 5 \rangle$  [ délka  $l = 19/3$  ]

c)  $C : x = R \cos t, y = R \sin t, z = at; t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  (jeden závit šroubovice,  $R > 0, a > 0$  jsou konstanty).  
[ délka  $l = 2\pi \sqrt{R^2 + a^2}$  ]

d)  $C : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$  (část asteroidy v prvním kvadrantu,  $a > 0$  je konstanta).  
[ délka  $l = 3a/2$  ]

9. a)  $C$  je část křivky  $y = x^2$  s počátečním bodem  $A = [0, 0]$  a koncovým bodem  $B = [2, 4]$ .  
Navrhnete parametrizaci křivky a užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (x^2, xy)$  působením po křivce  $C$ .
- b) Křivka  $K$  je úsečka  $AB$ , kde  $A = [1, 0]$ ,  $B = [2, 3]$ . Navrhnete parametrizaci křivky  $K$  a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ . [ a)  $232/15$ , b)  $m=16\sqrt{10}/3$ ]
10. Křivka  $C$  je úsečka  $AB$ , kde  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$ .
- a) Vypočítejte hmotnost této křivky  $C$ , je-li délková hustota  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ .
- b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (x\sqrt{y^2 - 2x}, 0)$  podél této úsečky  $C$  od bodu  $A$  do bodu  $B$ . [ a)  $m=8\sqrt{2}/3$ , b)  $(\sqrt{8} - 1)/3$ ]
11. Křivka  $C$  je průnikem daných dvou ploch. Navrhnete parametrizaci této křivky a vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce  $f$ .
- a)  $f(x, y, z) = y^2 + 2z^2$ , křivka  $C$  je průnikem rovin  $x + y + 2z = 5$ ,  $2x + 5y - 2z = 4$  v nezáporném oktantu, tj.  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . [Parametrizace např.  $x = 7 - 4t, y = 2t - 2, z = t, t \in \langle 1, 7/4 \rangle$ , výsl.  $111\sqrt{21}/32$ ]
- b)  $f(x, y, z) = z^2$ , křivka  $C$  je průnikem válcové plochy  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  a roviny  $4x - 3z = 0$ . [  $80\pi$ ]
12. a) Napište Greenovu větu (předpoklady a tvrzení).
- b) Načrtněte množinu  $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Vyznačte křivku  $C$ , která je kladně orientovanou hranicí této množiny  $M$ .
- c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole  $\vec{f} = (xy, x^2 + 2x)$  podél křivky  $C$ , tj.  $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ .  
(Doporučení: K výpočtu je vhodné použít Greenovu větu). [  $8/3 + 2\pi$ ]
13. Křivka  $C$  je záporně orientovaný obvod trojúhelníka s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[2, 0]$ ,  $[2, 2]$ .
- a) Načrtněte křivku  $C$  ( včetně dané orientace).
- b) Příným výpočtem pomocí parametrizace křivky  $C$  nebo užitím Greenovy věty určete cirkulaci vektorového pole  $\vec{f} = (y^2 - 3y, xy)$  podél křivky  $C$ , tj. křivkový integrál  $\oint_C (y^2 - 3y, xy) \cdot d\vec{s}$ . [  $-14/3$ ]
- 13.1. Varianta této úlohy: Křivka  $C$  je záporně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[3, 0]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[0, 1]$ , vektorové pole  $\vec{f} = (\frac{1}{3}y^3, x^2 + y^2)$ . [ cirkulace je  $-8$ ]
14. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (x + 1, 2y)$  působením po dané orientované křivce:
- a)  $C_1$ : úsečka  $AB$ , s počátečním bodem  $A = [-1, 0]$  a koncovým bodem  $B = [1, 0]$ .
- b)  $C_2$ :  $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$  s počátečním bodem  $B = [1, 0]$ .
- c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce  $C = C_1 \cup C_2$ . Souvisí výsledek s nějakou vlastností pole  $\vec{f}$ ? (Vysvětlete).  
[ a)  $2$ , b)  $-2$ , c) nula. Ano, neboť dané pole je potenciální... ]

V následujících čtyřech úlohách je dáno vektorové pole a orientovaná křivka.

- a) Načrtněte danou křivku  $C \subset E_2$ . Navrhnete její parametrizaci a zdůvodněte, zda je křivka  $C$  orientována souhlasně s touto parametrizací.
- b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f}$  působením po dané orientované křivce  $C$ .
15.  $C$  je část křivky  $x = 2y^2$  od bodu  $A = [8, 2]$  do bodu  $B = [2, 1]$ , síla  $\vec{f} = (\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y})$ . [  $-(40 + 32\sqrt{2})/3$ ]
16. Křivka  $C$  daná rovnicí  $y = e^x$ , kde  $|x| \leq 1$ , počáteční bod má  $x = -1$ , síla  $\vec{f} = \left(x^3, \frac{1}{y} \ln y\right)$ . [ nula]
17. Křivka  $C$  je levá polovina kružnice  $x^2 + y^2 = 4$  orientovaná od bodu  $[0, 2]$  k bodu  $[0, -2]$ , síla  $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$ . [  $-\pi$ ]
18.  $C$  je záporně orientovaná křivka daná rovnicí  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , síla  $\vec{f} = \left(\frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2}\right)$
- c) Je možné v této úloze počítat práci pomocí Greenovy věty? (Odpověď zdůvodněte).  
[ b)  $2\pi$ , c) nelze]
19. a) Napište předpoklady Greenovy věty a ověřte, že jsou splněny pro výpočet cirkulace vektorového pole  $\vec{f} = (-y, x)$  po záporně orientované křivce  $C : x^2 + y^2 = 16$ , tj. pro výpočet  $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ .  
Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
- b) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.
- c) Lze na základě vypočtené hodnoty jednoznačně odpovědět, zda dané pole  $\vec{f}$  je potenciální v  $E_2$ ? Odpověď zdůvodněte! [ cirkulace je  $-32\pi$ , c) není potenciální, cirkulace by musela být nulová]

V následujících dvou úlohách je dán křivkový integrál vektorové funkce.

a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet zadaného integrálu.

b) V kladném případě integrál pomocí Greenovy věty vypočítejte.

20.  $\oint_C \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right) \cdot \vec{ds}$ , je-li křivka  $C$  kladně orientovaná a je postupně vyjádřena rovnicí

$$1) x^2 + y^2 = 1, \quad 2) x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad 3) (x-2)^2 + y^2 = 1.$$

[ integrály 1) a 2) neexistují, 3)  $2\pi$ , větu lze použít]

21.  $\oint_C y^2 dx + (x+y)^2 dy$ , je-li  $C$  kladně orientovaný obvod trojúhelníku  $PQR$ , kde

$$P = [4, 0], \quad Q = [4, 4], \quad R = [0, 4]. \quad [128/3, \text{ větu lze použít}]$$

**Poznámka:** Další úlohy s použitím Greenovy věty si můžete tvořit sami. Uvažujme např. křivku  $C$  jako záporně orientovanou hranici množiny  $D$  z příkladu č. 14 v 2. části souboru Úlohy ze zkoušek (Dvojný a trojný integrál). Pak při volbě vektorové funkce  $\vec{f} = (2y^3/3, xy^2)$  vede Greenova věta právě ke dvojnému integrálu z příkladu 14, tj.  $\iint_D y^2 dx dy$  s výsledkem  $13/60$ . Pro stejný výsledek je nekonečně mnoho dalších možností volby vektorové funkce, např.  $\vec{f} = (2y^3/3 + g(x), xy^2 + h(y))$ , kde  $g, h$  jsou libovolné funkce jedné proměnné se spojitou derivací v  $\mathbb{R}$ .

### Potenciál, nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě

22. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (x + 3y, 3x)$  působením po orientované úsečce s počátečním bodem  $A = [0, 1]$  a koncovým bodem  $B = [1, 3]$ . [19/2]

b) Určete potenciál  $\varphi$  vektorového pole  $\vec{f} = (x + 3y, 3x)$ . Pomocí potenciálu vypočítejte práci z úlohy a). [potenciál  $\varphi(x, y) = x^2/2 + 3xy + konst$ , 19/2]

23. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (y^2, 2xy)$  působením po křivce  $C$ , což je část paraboly  $y = x^2$  s počátečním bodem  $A = [0, 0]$  a koncovým bodem  $B = [2, 4]$ .

b) Ověřte, že vektorové pole  $\vec{f} = (y^2, 2xy)$  je potenciální v  $E_2$ . Určete potenciál  $\varphi$  tohoto pole a pomocí něho vypočítejte práci z úlohy a). [a) 32, b) potenciál  $\varphi(x, y) = xy^2 + konst$ ]

24. a) Zjistěte, zda vektorové pole  $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$  je potenciální v  $E_2$ . Pokud ano, vypočítejte potenciál  $\varphi$ .  
b) Vypočítejte křivkový integrál této funkce  $\vec{f}$  po části paraboly  $C_1 : x = -y^2 - 1$  od bodu  $[-1; 0]$  do bodu  $[-5; -2]$ .

c) Určete cirkulaci tohoto pole  $\vec{f}$  podél kladně orientované křivky  $C_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ .  
[a) potenciál  $\varphi(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + konst$ , b) 38, c) nula]

25. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla  $\vec{f} = (-x, y)$  působením po křivce  $C$ , která je částí kružnice se středem v počátku, a to od bodu  $A = [2, 0]$  do bodu  $B = [0, 2]$ .

b) Ověřte, že vektorové pole  $\vec{f} = (-x, y)$  je potenciální v  $E_2$ . Určete potenciál  $\varphi$  tohoto pole  $\vec{f}$  a pomocí potenciálu pak vypočítejte práci z úlohy a). [a) 4, b) potenciál  $\varphi(x, y) = -x^2/2 + y^2/2 + konst$ ]

26. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál  $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$  nezávisí v oblasti  $\Omega \subset E_2$  na integrační cestě.

b) Zdůvodněte, zda  $\int_C (y \sin x, y - \cos x) \cdot \vec{ds}$  nezávisí v  $E_2$  na integrační cestě.

c) Existuje-li potenciál pole  $\vec{f} = (y \sin x, y - \cos x)$  v  $E_2$ , najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce  $C$  s poč. bodem  $A = [0, 0]$  a konc. bodem  $B = [0, \pi]$ .

[b) ověřte splnění postačující podmínky c) potenciál  $\varphi(x, y) = y^2/2 - y \cos x + konst, \pi^2/2 - \pi$ ]

27. a) Zjistěte, zda funkce  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + z^2$  je potenciálem vektorového pole

$$\vec{f}(x, y, z) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 2z \right)$$

v oblasti  $G = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 > 0\}$ .

b) Vypočítejte křivkový integrál  $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$ , kde  $C$  křivka v  $G$  s počátečním bodem  $[1, 0, 0]$  a koncovým bodem  $[0, 1, 1]$ . [a) ano, b) 1]

28. Funkce  $\psi = xy + xz + yz$  je potenciálem nějakého vektorového pole  $\vec{f}$ .

a) Určete největší oblast v  $E_3$ , ve které má  $\psi$  spojitě parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole  $\vec{f}$ .

b) Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem  $\vec{f}$  v této oblasti, pak ji uveďte.

c) Vypočítejte  $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$ , kde  $C$  je křivka daná parametricky rovnicemi  $x = -1 + t, y = 2 + t/2, z = -\cos(t\pi/4)$  pro  $t \in \langle 0, 4 \rangle$ . [a)  $\vec{f} = (y + z, x + z, x + y)$  b) funkce  $\psi + konst$ , c) 22]

V následujících třech úlohách je dáno vektorové pole  $\vec{f}$ .

- a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole  $\vec{f} = (U, V)$  bylo potenciální v oblasti  $D \subset \mathbb{E}_2$ .  
 b) Ověřte, že postačující podmínky splněny pro dané vektorové pole  $\vec{f}$  a danou oblast  $D$  (není-li oblast  $D$  dána, uveďte největší možnou),  
 c) Určete potenciál a užiňte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce  $\vec{f}$  po dané křivce  $C$ .

29.  $\vec{f} = \left( \frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x} \right)$ , uveďte největší možnou oblast  $D$ ,  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = [1, 2]$  a koncovým bodem  $B = [4; -2]$ . [ b)  $D = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0 \}$ , c) potenciál  $\varphi(x, y) = 2y^2\sqrt{x} + konst$ ; 8]

30.  $\vec{f} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $D = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0 \}$ ,  $C_1$  je úsečka  $AB$  s počátečním bodem  $A = [2, 4]$  a koncovým bodem  $B = [1, 2]$ ,  $C_2$  je kladně orientovaná kružnice  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$ .  
 [ c) potenciál  $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + konst$ ;  $-\ln 2$  pro  $C_1$ , nula pro  $C_2$ ]

31.  $\vec{f} = \left( \frac{y^2}{x} + x^2, 2y \ln x - \cos 2y \right)$ , uveďte největší možnou oblast  $D$ ,  $C$  je křivka s počátečním bodem  $A = [1, \pi/4]$  a koncovým bodem  $B = [2; 0]$ . [ potenciál  $\varphi(x, y) = x^3/3 + y^2 \ln x - \sin 2y/2 + konst$ , 17/6]

### Plošný integrál skalární funkce, plošný obsah

32. Je dána plocha  $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0 \}$ .

a) Načrtněte plochu  $Q$  a její průmět do roviny  $z = 0$ . Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy  $Q$ , napište vektor kolmý k dané ploše a určete jeho délku (při této parametrizaci).

b) Určete hmotnost plochy  $Q$ , je-li její plošná hustota  $\varrho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$ .

Návod: Při parametrizaci  $z = g(x, y)$ ,  $[x, y] \in B$  je  $m = \iint_Q \varrho(x, y, z) dp = \iint_B \varrho(x, y, g(x, y)) \|P_x \times P_y\| dx dy$ .

[ a)  $Q$  je část paraboloidu s vrcholem v bodě  $[0, 0, 4]$ ,

b) např. při parametrizaci  $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 4$  je kolmý vektor  $\vec{n} = P_x \times P_y = (2x, 2y, 1)$ , jeho délka je  $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$  c)  $36\pi$  ]

33. Je dána plocha  $Q$  (hyperbolický paraboloid):  $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 3 \}$ .

a) Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce  $z = xy$  rovinou  $z = 1$ , rovinou  $x - y = 0$  a rovinou  $x + y = 0$ .

b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy  $Q$ . Napište vektor kolmý k ploše  $Q$  a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).

c) Určete plošný obsah plochy  $Q$ .

[ a) hyperbola  $xy = 1$ , parabola  $z = x^2$  v rovině  $y = x$ , parabola  $z = -x^2$  v rovině  $y = -x$ ,

b) např. při parametrizaci  $z = xy$ ,  $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 3$  je  $\vec{n} = P_x \times P_y = (-y, -x, 1)$ , c)  $14\pi/3$  ]

34. a) Vypočítejte  $\iint_Q xyz dp$ , kde plocha  $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \in \langle 0, 3 \rangle \}$ .

b) Vypočítejte  $\iint_Q xyz dp$ , je-li  $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, z \in \langle 0, 3 \rangle \}$ .

c) Co by mohl vyjadřovat integrál z úlohy a) ?

[ a) 18, b) nula, c) hmotnost dané plochy, je-li plošná hustota  $\varrho(x, y, z) = xyz$ , statický moment  $M_{xy}$  (vzhledem k rovině  $xy$ ), je-li  $\varrho(x, y, z) = xy$ , též cyklicky  $M_{xz}$  a  $M_{yz}$ . ]

V následujících pěti úlohách je dána plocha  $Q \subset E_3$ .

a) Načrtněte danou plochu  $Q$  a navrhněte její parametrizaci. Vypočítejte délku vektoru kolmého k ploše  $Q$  (při navržené parametrizaci).

b) Určete plošný obsah dané plochy.

35.  $Q : 3x + 4y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$   $\left[ \frac{\sqrt{26}}{24} \right]$

36.  $Q : x + 2y + z = 6, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$   $[3\pi\sqrt{6}]$

37.  $Q : z = y^2 - x^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$   $\left[ \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \right]$

38.  $Q : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$   $\left[ \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1) \right]$

39.  $Q : z = \sqrt{12 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 8$   $[8\pi(3 - \sqrt{3})]$

40. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose  $z$  homogenní plochy  $Q$  ( hustota  $\varrho(x, y, z) = konst$ ), je-li  $Q : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2$ .  $[8k\pi\sqrt{2}]$

## Plošný integrál vektorové funkce, tok vektorového pole plochou

V následujících osmi úlohách je dána plocha  $\sigma$ .

- a) Načrtněte danou plochu a navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k ploše (při této parametrizaci).  
b) Vypočítejte tok zadaného vektorového pole  $\vec{f}$  plochou  $\sigma$  při orientaci daným normálovým vektorem  $\vec{n}$ .
41.  $\vec{f} = (3x, 2y, z)$ ,  $\sigma$  je část roviny:  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; 2x + 2y + z = 4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\vec{n}$  svírá s vektorem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  ostrý úhel. [7]
42.  $\vec{f} = (x, y, 0)$ ,  $\sigma: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$ ,  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  má souřadnici  $n_3$  kladnou. [81  $\pi$ ]
43.  $\vec{f} = (z, y, 2x)$ ,  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ,  $\vec{n}$  svírá s vektorem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  ostrý úhel. [72]
44.  $\vec{f} = (y, x, z)$ ,  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 = 16, 0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $\vec{n}(4, 0, 0) = \vec{i}$ . [48]
45.  $\vec{f} = (x, 0, 2z)$ ,  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = x^2 + y^2, z \leq 9\}$ ,  $\vec{n}$  svírá s vektorem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  úhel tupý. [-81  $\pi/2$ ]
46.  $\vec{f} = (-y, x, z)$ , plocha  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3, x \geq 0\}$ , normálový vektor svírá s vektorem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  ostrý úhel. [9  $\pi$ ]
47.  $\vec{f} = (y, x, 0)$ ,  $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = x^2 + y^2, z \leq 4\}$ ,  $\vec{n}$  svírá s vektorem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  ostrý úhel. [nula]
48.  $\vec{f} = (z, x^2 + y^2, 1)$ ,  $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ . [-2 $\pi$  + 8]

**Gaussova–Ostrogradského věta** umožňuje převést výpočet toku vektorového pole uzavřenou plochou na výpočet trojného integrálu. K procvičení jeho výpočtu se lze vrátit k úlohám z textu

[3] **Matematika II - vybrané úlohy ze zkoušek**, 2. část: Dvojný a trojný integrál (2015). Web ÚTM.

Podobným způsobem jako v Poznámce na str. 3 tohoto textu, tj. vhodnou volbou vektorového pole  $\vec{f} = (U, V, W)$  lze tak tvořit příklady, které mohou v úlohách z trojného integrálu představovat aplikaci ve formě toku vektorového pole daným směrem - viz. př. č. 52, 53 a 56 níže.

V následujících úlohách je dána plocha  $Q$ .

- a) Napište Gaussovu–Ostrogradského větu. Načrtněte danou plochu. Ověřte, že jsou splněny předpoklady pro výpočet toku zadaného vektorového pole  $\vec{f}$  touto plochou. b) Vypočítejte tok daného vektorového pole.
49.  $\vec{f} = (x + \cos x, y + e^z, z + z \sin x)$ ,  $Q$  je dovnitř orientovaný povrch tělesa, které je omezené plochami o rovnicích  $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$ . [div  $\vec{f}(x, y, z) = 3$ , tok  $\Phi = -24\pi$ ]
50.  $\vec{f} = (x^3, z^2, y^2)$ , plocha  $Q$  je povrchem tělesa  $M = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$ , plocha  $Q$  je vně orientovaná. [div  $\vec{f}(x, y, z) = 3x^2$ , tok  $\Phi = 36\pi$ ]
51.  $\vec{f} = (y, x, z^2)$ , plocha  $Q$  je povrchem tělesa  $M = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ , plocha  $Q$  je orientována vnější normálou. [div  $\vec{f}(x, y, z) = 2z$ , tok  $\Phi = 8\pi$ ]
52.  $\vec{f} = (y^2, x + z, xz^2)$ ,  $Q$  je povrch tělesa  $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x - 2y$  orientovaný směrem dovnitř (viz př. č. 34 z Úloh [3]). [div  $\vec{f}(x, y, z) = x^2$ , tok  $\Phi = -1/4$ ]
53.  $\vec{f} = (x, y, z)$ ,  $Q$  je povrch tělesa  $D: x \leq 2, y \leq 2, y \geq 1/x, 0 \leq z \leq x^2 + y$  orientovaný směrem vně (obměna př. č. 45c z Úloh [3]). [div  $\vec{f}(x, y, z) = 3$ , tok  $\Phi = 135/8$ ]
54.  $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$ ,  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , kde  $Q_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$ ,  $Q_2: z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ , plocha  $Q$  je orientována směrem do svého vnitřku. (Daná plocha je povrch polokoule.) [div  $\vec{f} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ , tok  $\Phi = -6\pi/5$ ]
55.  $\vec{f} = (2x + y^2, 0, 2x - y^2)$ ,  $Q$  je povrch tělesa  $D: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 9$ , orientovaný směrem vně. [div  $\vec{f}(x, y, z) = 2$ , tok  $\Phi = 486\pi$ ]
56.  $\vec{f} = (xy^2, ze^{-x}, xz^2)$ ,  $Q$  je dovnitř orientovaný povrch tělesa  $M: \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq 3$ , (viz př. č. 51 z Úloh [3]). [div  $\vec{f}(x, y, z) = x^2 + y^2$ , tok  $\Phi = -27\pi/10$ ]
57.  $\vec{f} = (z, y^3, x)$ ,  $Q$  je vně orientovaný povrch tělesa  $D: x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ . [div  $\vec{f}(x, y, z) = 3y^2$ , tok  $\Phi = 16\pi$ ]
58.  $\vec{f} = (xy^2, yz, x^2z)$ ,  $Q$  je vně orientovaný povrch tělesa, které je omezeno plochami  $x^2 + y^2 = 4, z = 1, z = 3$ . [div  $\vec{f}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ , tok  $\Phi = 32\pi$ ]