

Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Na základě úloh ze zkoušek sestavila Olga Majlingová,
drobně doplnil František Mráz (9. 3. 2016)

V následujících úlohách je dána funkce $F(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$.

1. Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci (prvního i druhého řádu).
2. Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0]$.
3. Určete hodnotu druhé derivace $f''(x_0)$.

Poznámka:

1. Ověřte splnění tří předpokladů: a) $F(x_0, y_0) = 0$; b) v okolí bodu $[x_0, y_0]$ jsou parc. derivace F_x, F_y spojité; c) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ (pro 3. část úlohy ještě spojitost parc. derivací 2. řádu).

2. $f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$, rovnice tečny: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Poznámka:

Při znalosti derivace $f'(x_0)$ a rovnice tečny lze řešit další části úlohy:

Popište chování funkce f v okolí bodu x_0 , tj. zda je rostoucí, resp. klesající, odhadněte rychlost změny (sklon tečny).

Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu funkce f v daném bodě x , "blízko" bodu x_0 .

Napište rovnici normály ke grafu funkce f v v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Načrtněte obě přímky.

Podobně na znalost hodnoty druhé derivace $f''(x_0)$ mohou navazovat další úlohy: Je funkce f konvexní, resp. konkávní v okolí bodu x_0 ? Má funkce f lokální extrém v bodě x_0 ? Pokud ano, jaký?

Pro funkci f napište Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě x_0 .

1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3y, [x_0, y_0] = [2, 4]$

$$F_x = 2x - y, F_y = 2y - x - 3, F_x(2, 4) = 0, F_y(2, 4) = 3, f'(2) = -\frac{F_x(2, 4)}{F_y(2, 4)} = 0$$

$$\text{tečna : } y = 4$$

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(2y - x - 3) - (2y' - 1)(2x - y)}{(2y - x - 3)^2}, f''(2) = -\frac{2}{3}$$

2. $F(x, y) = x^2 + y^3 - xy - 3, [x_0, y_0] = [2, 1]$

$$F_x = 2x - y, F_y = 3y^2 - x, F_x(2, 1) = 3, F_y(2, 1) = 1, f'(2) = -\frac{F_x(2, 1)}{F_y(2, 1)} = -3$$

$$\text{tečna : } y = 1 - 3(x - 2)$$

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(3y^2 - x) - (6yy' - 1)(2x - y)}{(3y^2 - x)^2}, f''(2) = -62$$

3. $F(x, y) = x^3 + xy^2 - 3xy + 1, [x_0, y_0] = [1, 2]$

$$F_x = 3x^2 + y^2 - 3y, F_y = 2xy - 3x, F_x(1, 2) = 1, F_y(1, 2) = 1, f'(1) = -\frac{F_x(1, 2)}{F_y(1, 2)} = -1$$

$$\text{tečna : } y = 2 - (x - 1)$$

$$f''(x) = -\frac{(6x + 2yy' - 3y')(2xy - 3x) - (3x^2 + y^2 - 3y)(2y + 2xy' - 3)}{(2xy - 3x)^2}, f''(1) = -6$$

4. $F(x, y) = x^3 + y^4 - \sin y - 8, [x_0, y_0] = [2, 0]$

$$F_x = 3x^2, F_y = 4y^3 - \cos y, F_x(2, 0) = 12, F_y(2, 0) = -1, f'(2) = -\frac{F_x(2, 0)}{F_y(2, 0)} = 12$$

$$\text{tečna : } y = 12(x - 2)$$

$$f''(x) = -\frac{6x(4y^3 - \cos y) - 3x^2(12y^2 y' + y' \sin y)}{(4y^3 - \cos y)^2}, f''(2) = 12$$

5. $F(x, y) = ye^x + y^2 - 6, [x_0, y_0] = [0, 2]$

$$F_x = ye^x, F_y = e^x + 2y, F_x(0, 2) = 2, F_y(0, 2) = 5, f'(0) = -\frac{F_x(0, 2)}{F_y(0, 2)} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{tečna : } y = 2 - \frac{2}{5}x$$

$$f''(x) = -\frac{(e^x y + e^x y')(e^x + 2y) - (ye^x)(e^x + 2y')}{(e^x + 2y)^2}, f''(0) = -\frac{38}{125}$$

Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$
(tato látka není v požadavcích ke zkoušce úrovně B)

V následujících úlohách je dána funkce $F(x, y, z)$, bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ a bod P .

1. Ověřte, že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, která má spojitě parciální derivace.
2. Vypočítejte parciální derivace funkce $z = f(x, y)$. Napište gradient funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
3. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[x_0, y_0, z_0]$.
Napište diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
Výsledku využijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v daném bodě P .
4. Určete derivaci funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ v daném směru \vec{s} .

Poznámka:

1. Ověřte splnění tří předpokladů: a) $F(A) = 0$; b) v okolí bodu A jsou parc. derivace F_x, F_y, F_z spojitě;
c) $F_z(A) \neq 0$.

$$2. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

$$3. \text{Rovnice tečné roviny: } z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$$\text{Diferenciál } df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy.$$

4. Derivace ve směru \vec{s} :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0) = \frac{\text{grad}f(x_0, y_0) \cdot \vec{s}}{\|\vec{s}\|}$$

Poznámka:

Na základě znalosti parciálních derivací a tečné roviny v daném bodě lze řešit další části úlohy:

Popište chování funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$ v kladném směru osy x , resp osy y , tj. zda je rostoucí, resp. klesající, odhadněte rychlost změny (sklon tečny). Podobně popište chování v daném směru \vec{s} - ze znalosti derivace ve směru.

Napište kolmý vektor a rovnici normály ke grafu funkce f v v bodě dotyku $A = [x_0, y_0, z_0]$.

Určete směr, ve které funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ nejrychleji roste, resp. nejrychleji klesá. Jaká je hodnota derivace v tomto směru ?

Určete směr, ve které má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ nulovou derivaci.

$$1. \quad \boxed{F(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^3 + xyz - 2, A = [-1, 2, 1], \vec{s} = (2, 1), P = [-0.9, 1.9]}$$

$$F_x = 3x^2 + yz, F_y = 2y + xz, F_z = 3z^2 + xy, \text{grad}f(-1, 2) = (-5, -3)$$

$$\text{tečná rovina : } z = 1 - 5(x + 1) - 3(y - 2); df(-1, 2) = -5 dx - 3 dy$$

$$f(-0.9, 1.9) \doteq 1 - 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(-1, 2) = \frac{(-5, -3) \cdot (2, 1)}{\sqrt{5}} = -\frac{13}{\sqrt{5}} = -\frac{13\sqrt{5}}{5}$$

$$2. \quad \boxed{F(x, y, z) = 2x^2z - xy + z^2, A = [1, 0, -2], \vec{s} = (1, 1), P = [0.9, 0.1]}$$

$$F_x = 4xz - y, F_y = -x, F_z = 2z + 2x^2, \text{grad}f(1, 0) = (-4, -1/2)$$

$$\text{tečná rovina : } z = -2 - 4(x - 1) - y/2; df(1, 0) = -4 dx - \frac{1}{2} dy$$

$$f(0.9, 0.1) \doteq -2 + 0.4 - 0.05 = -1.65$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 0) = \frac{(-4, -1/2) \cdot (1, 1)}{\sqrt{2}} = -\frac{9}{2\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$3. \quad \boxed{F(x, y, z) = x + y^2 + z^3 + x^2yz - 4, A = [1, -2, 1], \vec{s} = (1, -1), P = [1.1, -2.1]}$$

$$F_x = 1 + 2xyz, F_y = 2y + x^2z, F_z = 3z^2 + x^2y, \text{grad}f(1, -2) = (3, 3)$$

$$\text{tečná rovina : } z = 1 + 3(x - 1) + 3(y + 2); df(1, -2) = 3 dx + 3 dy$$

$$f(1.1, -2.1) \doteq 1 + 0.3 - 0.3 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, -2) = \frac{(3, 3) \cdot (1, -1)}{\sqrt{2}} = 0, \text{ tj. pohyb po vrstevnici}$$

$$4. \quad \boxed{F(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2 + xy^2z - 4, A = [-3, 1, 2], \vec{s} = (-1, -2), P = [-2.9, 1.1]}$$

$$F_x = 2xy + y^2 + y^2z, F_y = x^2 + 2xy + 2xyz, F_z = 2z + xy^2, \text{grad}f(-3, 1) = (3, 9)$$

$$\text{tečná rovina : } z = 2 + 3(x + 3) + 9(y - 1); df(-3, 1) = 3 dx + 9 dy$$

$$f(-2.9, 1.1) \doteq 2 + 0.3 + 0.9 = 3.2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(-3, 1) = \frac{(3, 9) \cdot (-1, -2)}{\sqrt{5}} = -\frac{21}{\sqrt{5}} = -\frac{21\sqrt{5}}{5}$$