**Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$**

Na základě úloh ze zkoušek sestavila Olga Majlingová,
drobně doplnil František Mráz (9. 3. 2016)

V následujících úlohách je dána funkce $F(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$.

1. Ověřte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci (prvního i druhého řádu).
2. Určete hodnotu derivace $f'(x_0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f$ v bodě dotyku $[x_0, y_0]$.
3. Určete hodnotu druhé derivace $f''(x_0)$.

**Poznámka:**
1. Ověřte splnění tří předpokladů: a) $F(x_0, y_0) = 0$; b) v okolí bodu $[x_0, y_0]$ jsou parc. derivace $F_x$, $F_y$ spojité; c) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ (pro 3. část úlohy ještě spojitost parc. derivací 2. řádu).
2. $f'(x) = -\dfrac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$, rovnice tečny: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.
3. část úlohy ( výpočet druhé derivace) není v požadavcích ke zkoušce úrovně B.

**Poznámka:**
Při znalosti derivace $f'(x_0)$ a rovnice tečny lze řešit další části úlohy:
Popište chování funkce $f$ v okolí bodu $x_0$, tj. zda je rostoucí, resp. klesající, odhadněte rychlost změny (sklon tečny).
Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu funkce $f$ v daném bodě $x$, "blízko"bodu $x_0$.
Napište rovnici normály ke grafu funkce $f$ v v bodě dotyku $[x_0, y_0]$. Načrtněte obě přímky.
Podobně na znalost hodnoty druhé derivace $f''(x_0)$ mohou navazovat další úlohy: Je funkce $f$ konvexní, resp. konkávní v okolí bodu $x_0$? Má funkce $f$ lokální extrém v bodě $x_0$ ? Pokud ano, jaký ?
Pro funkci $f$ napište Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $x_0$.

1. $\boxed{F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3y,\ [x_0, y_0] = [2, 4]}$

$$F_x = 2x - y,\ F_y = 2y - x - 3,\ F_x(2, 4) = 0, F_y(2, 4) = 3,\ f'(2) = -\frac{F_x(2, 4)}{F_y(2, 4)} = 0$$

$$\text{tečna} : y = 4$$

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(2y - x - 3) - (2y' - 1)(2x - y)}{(2y - x - 3)^2},\ f''(2) = -\frac{2}{3}$$

2. $\boxed{F(x, y) = x^2 + y^3 - xy - 3,\ [x_0, y_0] = [2, 1]}$

$$F_x = 2x - y,\ F_y = 3y^2 - x,\ F_x(2, 1) = 3, F_y(2, 1) = 1,\ f'(2) = -\frac{F_x(2, 1)}{F_y(2, 1)} = -3$$

$$\text{tečna} : y = 1 - 3(x - 2)$$

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(3y^2 - x) - (6yy' - 1)(2x - y)}{(3y^2 - x)^2},\ f''(2) = -62$$

3. $\boxed{F(x, y) = x^3 + xy^2 - 3xy + 1,\ [x_0, y_0] = [1, 2]}$

$$F_x = 3x^2 + y^2 - 3y,\ F_y = 2xy - 3x,\ F_x(1, 2) = 1, F_y(1, 2) = 1,\ f'(1) = -\frac{F_x(1, 2)}{F_y(1, 2)} = -1$$

$$\text{tečna} : y = 2 - (x - 1)$$

$$f''(x) = -\frac{(6x + 2yy' - 3y')(2xy - 3x) - (3x^2 + y^2 - 3y)(2y + 2xy' - 3)}{(2xy - 3x)^2},\ f''(1) = -6$$

4. $\boxed{F(x,y) = x^3 + y^4 - \sin y - 8,\ [x_0, y_0] = [2, 0]}$

$$F_x = 3x^2,\ F_y = 4y^3 - \cos y,\ F_x(2,0) = 12, F_y(2,0) = -1,\ f'(2) = -\frac{F_x(2,0)}{F_y(2,0)} = 12$$

$$\text{tečna} : y = 12(x-2)$$

$$f''(x) = -\frac{6x(4y^3 - \cos y) - 3x^2(12y^2\, y' + y' \sin y)}{(4y^3 - \cos y)^2},\ f''(2) = 12$$

5. $\boxed{F(x,y) = ye^x + y^2 - 6,\ [x_0, y_0] = [0, 2]}$

$$F_x = ye^x,\ F_y = e^x + 2y,\ F_x(0,2) = 2, F_y(0,2) = 5,\ f'(0) = -\frac{F_x(0,2)}{F_y(0,2)} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{tečna} : y = 2 - \frac{2}{5}x$$

$$f''(x) = -\frac{(e^x y + e^x y')(e^x + 2y) - (ye^x)(e^x + 2y')}{(e^x + 2y)^2},\ f''(0) = -\frac{38}{125}$$

**Funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$**
(tato látka není v požadavcích ke zkoušce úrovně B)

V následujících úlohách je dána funkce $F(x,y,z)$, bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ a bod $P$.

1. Ověřte, že rovnicí $F(x,y,z) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně určena funkce $z = f(x,y)$, která má spojité parciální derivace.
2. Vypočítejte parciální derivace funkce $z = f(x,y)$. Napište gradient funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$.
3. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f$ v bodě dotyku $[x_0, y_0, z_0]$.
   Napište diferenciál funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$.
   Výsledku využijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce $f$ v daném bodě $P$.
4. Určete derivaci funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ v daném směru $\vec{s}$.

**Poznámka:**
1. Ověřte splnění tří předpokladů: a) $F(A) = 0$; b) v okolí bodu $A$ jsou parc. derivace $F_x,\ F_y, F_z$ spojité;

   c) $F_z(A) \neq 0$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$

3. Rovnice tečné roviny: $z = z_0 + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$.

   Diferenciál $df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, dy$.

4. Derivace ve směru $\vec{s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0) = \frac{\mathrm{grad} f(x_0,y_0) \cdot \vec{s}}{||\vec{s}||}$$

**Poznámka:**
Na základě znalosti parciálních derivací a tečné roviny v daném bodě lze řešit další části úlohy:
Popište chování funkce $f$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ v kladném směru osy $x$, resp osy $y$, tj. zda je rostoucí, resp. klesající, odhadněte rychlost změny (sklon tečny). Podobně popište chování v daném směru $\vec{s}$ - ze znalosti derivace ve směru.
Napište kolmý vektor a rovnici normály ke grafu funkce $f$ v v bodě dotyku $A = [x_0, y_0, z_0]$.
Určete směr, ve které funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ nejrychleji roste, resp. nejrychleji klesá. Jaká je hodnota derivace v tomto směru ?
Určete směr, ve které má funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ nulovou derivaci.

1. $\boxed{F(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^3 + xyz - 2,\ A = [-1,2,1],\ \vec{s} = (2,1),\ P = [-0.9, 1.9]}$

$$F_x = 3x^2 + yz,\ F_y = 2y + xz,\ F_z = 3z^2 + xy,\ \mathrm{grad} f(-1,2) = (-5,-3)$$

$$\text{tečná rovina} : z = 1 - 5(x+1) - 3(y-2);\ df(-1,2) = -5\,dx - 3\,dy$$

$$f(-0.9, 1.9) \doteq 1 - 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(-1,2) = \frac{(-5,-3)\cdot(2,1)}{\sqrt{5}} = -\frac{13}{\sqrt{5}} = -\frac{13\sqrt{5}}{5}$$

2. $\boxed{F(x,y,z) = 2x^2z - xy + z^2,\ A = [1,0,-2],\ \vec{s} = (1,1),\ P = [0.9, 0.1]}$

$$F_x = 4xz - y,\ F_y = -x,\ F_z = 2z + 2x^2,\ \mathrm{grad} f(1,0) = (-4,-1/2)$$

$$\text{tečná rovina} : z = -2 - 4(x-1) - y/2;\ df(1,0) = -4\,dx - \frac{1}{2}\,dy$$

$$f(0.9, 0.1) \doteq -2 + 0.4 - 0.05 = -1.65$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,0) = \frac{(-4,-1/2)\cdot(1,1)}{\sqrt{2}} = -\frac{9}{2\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

3. $\boxed{F(x,y,z) = x + y^2 + z^3 + x^2yz - 4,\ A = [1,-2,1],\ \vec{s} = (1,-1),\ P = [1.1, -2.1]}$

$$F_x = 1 + 2xyz,\ F_y = 2y + x^2z,\ F_z = 3z^2 + x^2y,\ \mathrm{grad} f(1,-2) = (3,3)$$

$$\text{tečná rovina} : z = 1 + 3(x-1) + 3(y+2);\ df(1,-2) = 3\,dx + 3\,dy$$

$$f(1.1, -2.1) \doteq 1 + 0.3 - 0.3 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,-2) = \frac{(3,3)\cdot(1,-1)}{\sqrt{2}} = 0,\ \text{tj. pohyb po vrstevnici}$$

4. $\boxed{F(x,y,z) = x^2y + y^2x + z^2 + xy^2z - 4,\ A = [-3,1,2],\ \vec{s} = (-1,-2),\ P = [-2.9, 1.1]}$

$$F_x = 2xy + y^2 + y^2z,\ F_y = x^2 + 2xy + 2xyz,\ F_z = 2z + xy^2,\ \mathrm{grad} f(-3,1) = (3,9)$$

$$\text{tečná rovina} : z = 2 + 3(x+3) + 9(y-1);\ df(-3,1) = 3\,dx + 9\,dy$$

$$f(-2.9, 1.1) \doteq 2 + 0.3 + 0.9 = 3.2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(-3,1) = \frac{(3,9)\cdot(-1,-2)}{\sqrt{5}} = -\frac{21}{\sqrt{5}} = -\frac{21\sqrt{5}}{5}$$