MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

III. Základy diferenciálního počtu

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

III. Diferenciální počet

III.1. Derivace funkce v bodě
III.2. Výpočet derivace
III.3. Derivace vyšších řádů
III.4. Diferenciál funkce
III.5. L'Hospitalovo pravidlo
III.6. Monotonie funkce, extrémy
III.7. Konvexnost, konkávnost, inflexe
III.8. Vyšetřování průběhu funkce
III.9. Křivost, oskulační kružnice
III.10. Taylorův polynom

Matematika I.

III. Diferenciální počet

III.1. Derivace funkce v bodě

Definice: *Derivací funkce f v bodě* x_0 nazveme hodnotu limity

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pokud existuje a je konečná.

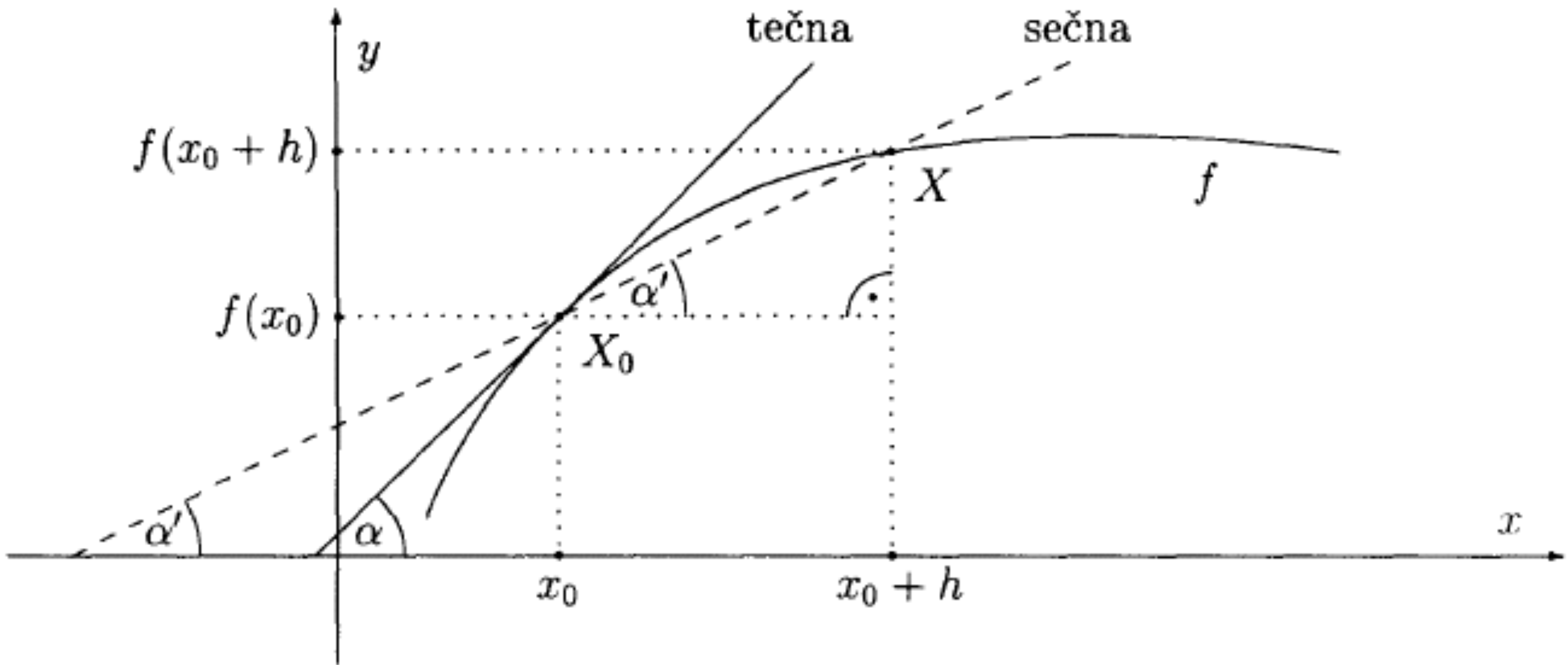
Derivace funkce v bodě je číslo. Je to lokální vlastnost funkce. Pokud derivace v bodě x_0 existuje, říkáme, že funkce je v tomto bodě *diferencovatelná*.

Označení: $f'(x_0), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$

Ekvivalentní definice: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

III.1. Derivace funkce v bodě - geometrická interpretace

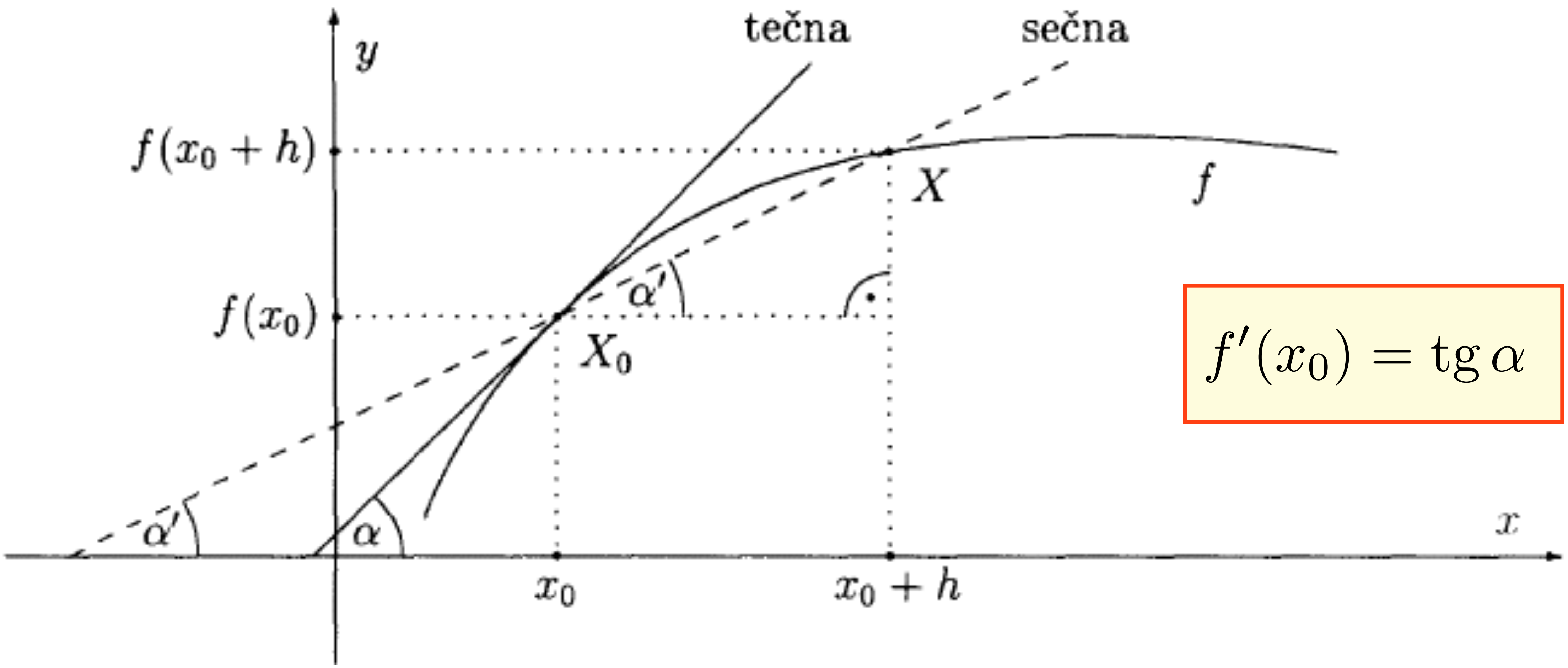
Geometrická interpretace:



Ekvivalentní definice: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

III.1. Derivace funkce v bodě - geometrická interpretace

Geometrická interpretace: $$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Ekvivalentní definice: $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

III.1. Derivace funkce v bodě

Nahradíme-li v definici derivace funkce v bodě x_0 limitu limitou zleva (zprava), dostaneme derivaci funkce v bodě x_0 zleva (zprava):

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, má-li v tomto bodě derivaci zleva a zároveň derivaci zprava a tyto derivace se rovnají.

Věta: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci zleva (resp. zprava), je v tomto bodě spojitá zleva (resp. zprava).

Důsledek: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

- Opačné tvrzení k Důsledku neplatí!
- Pokud je některá z limit nevlastní, říkáme, že odpovídající derivace je *nevlastní*.

III.1. Derivace funkce na množině

Pokud pro každé x z otevřené množiny M⊆D(f) existuje derivace $f'(x)$, potom

- funkci $y = f'(x)$ budeme nazývat *derivací funkce f na množině* M,
- řekneme, že funkce f je na množině M *diferencovatelná*;
- je-li navíc $f'(x)$ spojitá funkce, řekneme, že funkce f je na M *spojitě diferencovatelná.*

V případě uzavřeného intervalu požadujeme navíc jednostranné derivace v krajních bodech (v levém zprava, v pravém zleva).

III.2. Výpočet derivace

Věta: Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x a nechť k$\in$**R**.
Potom také funkce k.f, f+g, f–g a $f.g$ mají derivace v bodě x a platí:

a) $[\mathrm{k}.f\,]'(x) = \mathrm{k}.f\,'(x)$,

b) $[f + g]'(x) = f\,'(x) + g'(x)$,

c) $[f - g]'(x) = f\,'(x) - g'(x)$,

d) $[f.g]'(x) = f\,'(x).g(x) + f\,(x).g'(x)$.

Pokud je g(x) 0, potom má i podíl f/g derivaci v bodě x a platí:

e) $$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

a) $(\mathrm{k}.u)' = \mathrm{k}.u'$,

b) $(u + v)' = u' + v'$,

b) $(u - v)' = u' - v'$,

d) $(u.v)' = u'v + uv'$,

e) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

III.2. Derivace elementárních funkcí

a) Mocninné funkce: $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$,
$1' = 0$.

b) Exponenciální funkce: $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$.

c) Logaritmické funkce: $\left(\log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

d) Goniometrické funkce: $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$,
$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

e) Cyklometrické funkce: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Příklady: $(\mathrm{tg}\, x)'$ $(\mathrm{cotg}\, x)'$ $(\sin 2x)'$

III.2. Výpočet derivace

Věta (o derivaci inverzní funkce): Jsou-li f a f^{-1} vzájemně inverzní funkce. Označme y = $f^{-1}(x)$. Má-li funkce f v bodě y nenulovou derivaci $f'(y)$, potom má inverzní funkce v bodě x derivaci, pro kterou platí

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Příklady: $(\text{arctg } x)'$ $(\text{arccotg } x)'$ $(\ln_a x)'$

Věta (o derivaci složené funkce): Ve všech bodech $x \in D(g)$, ve kterých existují derivace $g'(x)$ a $f'(g(x))$ existuje i derivace složené funkce $y = f(g(x))$ a platí

$$[f \circ g]'(x) = f'(g(x)).\, g'(x).$$

Příklady: $(\sin^2 x)'$ $[\exp(x^5 + x^3 - 5)]'$ $(\sin 2x)'$

III.2. Výpočet derivace

- $\left[\ln(f(x))\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

- $\left[(f(x))^{g(x)}\right]' = (f(x))^{g(x)}\big(g'(x)lnx + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\big)$

Příklady: $\left[\ln(x^5 + x^3 - 2x + 1)\right]'$ $\left[(\sin(x))^{\cos(x)}\right]'$

Poznámka: V případě, že limita $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

je nevlastní, budeme hovořit o *nevlastní derivaci* funkce *f* v bodě x_0.

III.4. Derivace vyšších řádů

Zderivujeme-li derivaci f', dostaneme tzv. *druhou derivaci* funkce f. Zderivujeme-li druhou derivaci, dostaneme *třetí derivaci*.

….

Zderivujeme-li n-tou derivaci, dostaneme (n+1)*ní derivaci*. Tedy:

n-tou derivací funkce f v bodě x_0 nazveme derivaci (n-1)ní derivace funkce f v bodě x_0. Pokud tato derivace existuje, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 *n-krát diferencovatelná*.

- n-tou derivaci budeme značit $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f, \quad f^{(n)}, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \quad y^{(n)}$
- Při tomto značení budeme funkci f považovat za *nultou derivaci*.

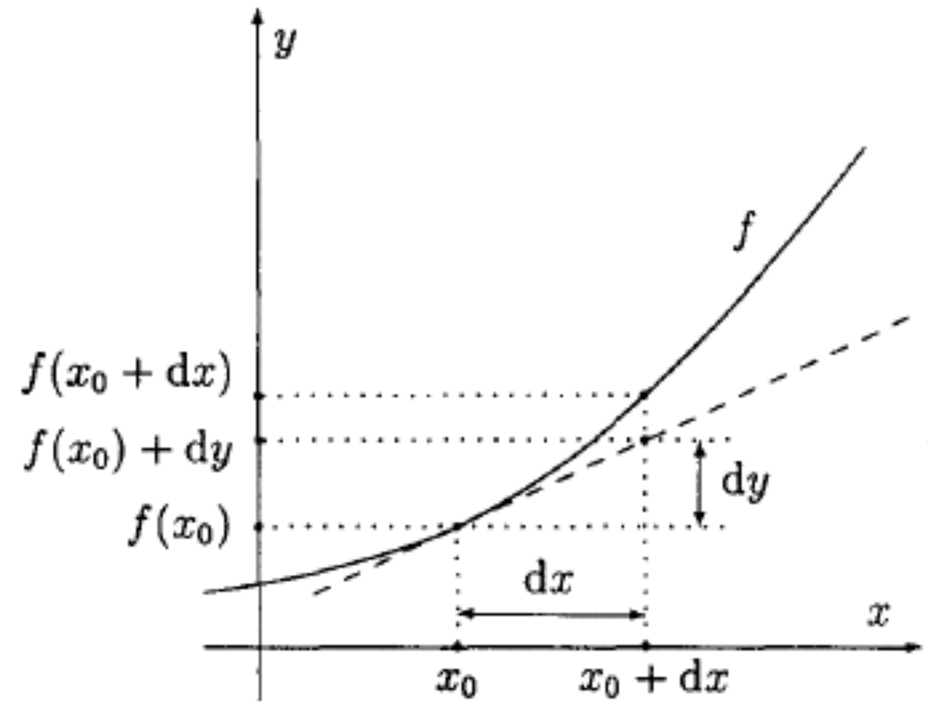
Věta (Leibnitzův vzorec): Předpokládejme, že existují n-té derivace funkcí f a g. Označme $M=D(f^{(n)})\cap D(g^{(n)})$. Potom n-tou derivaci součinu funkcí f a g na množině M lze spočítat pomocí vzorce: $[f.g]^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}g'' + \cdots + + \binom{n}{n} f g^{(n)}$

III.5. Diferenciál funkce

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \doteq f(x_0) + \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}y = f'(x).\mathrm{d}x$$

diferenciál funkce *f*



$$f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + \mathrm{d}y + \epsilon(x)$$

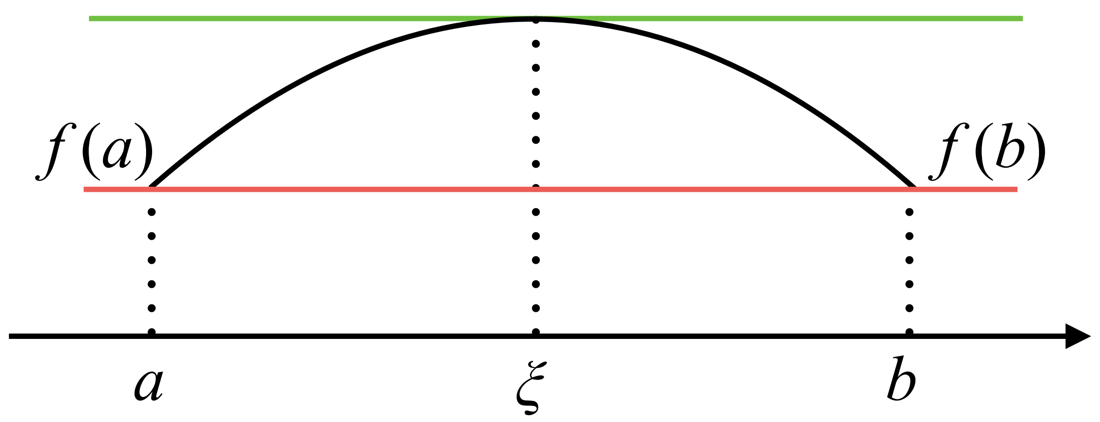
$$\lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0$$

chyba odhadu

Přibližný výpočet hodnoty funkce: $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\ln(1,325)$

$$\sqrt{2} = 1,4142 \text{ (chyba} = 0,0858),$$
$$\sqrt{10} = 3,1623 \text{ (chyba} = 0,0044),$$
$$\ln(1,325) = 0,2814 \text{ (chyba} = 0,0436).$$

III.6. Věty o střední hodnotě

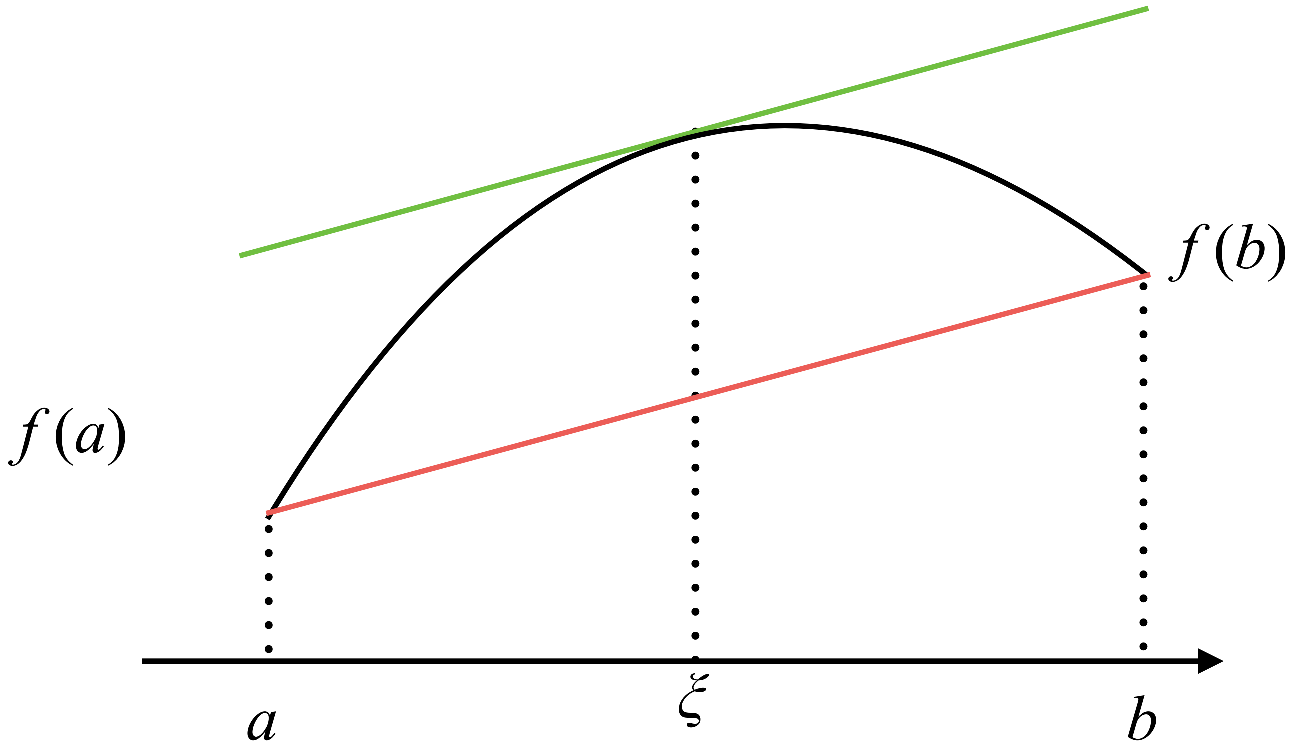


Věta (nutná podmínka pro lokální extrém): Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

(Důkaz lze vést sporem.)

Věta (Rolleova): Nechť funkce f je taková, že
(i) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$
(ii) v každém bodě otevřeného intervalu (a,b) existuje derivace $f'(x)$
(iii) je $f(a) = f(b)$.
Pak existuje bod $\xi \in (a,b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

III.6. Věty o střední hodnotě



Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě): Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť má derivaci v otevřeném intervalu (a,b). Pak existuje bod $\xi \in (a,b)$ takový, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Důkaz: plyne z Rolleovy věty na funkci

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$)

III.6. Věty o střední hodnotě

Věta (Cauchyova): Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a v každém bodě otevřeného intervalu (a,b) existují vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$ a je $g'(x) \neq 0$. Potom existuje bod $\xi \in (a,b)$ takový, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(Důkaz: plyne z Rolleovy věty na funkci

$$h(x) = -f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$)

III.6. L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo): Předpokládejme, že $c \in \mathbf{R}^*$ a že limity $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$ jsou buď obě nulové, nebo obě nekonečné. Pak platí

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existuje-li limita vpravo. Podobně tvrzení platí i pro jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) \qquad \lim_{x\to 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

Příklady na derivace

Najděte derivaci daných funkcí a odpovídající definiční obory:

$$y = \sqrt{\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+3}} \qquad y = (x-2)\sqrt[3]{x^2-4} \qquad y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Vypočtěte druhou derivaci fnkce $y = \operatorname{cotg} x$

Vypočtěte třetí derivaci funkce $y = x^2 \cdot \ln x$

Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$

Rovnici tečny použijte pro výpočet přibližné hodnoty v bodě x_1

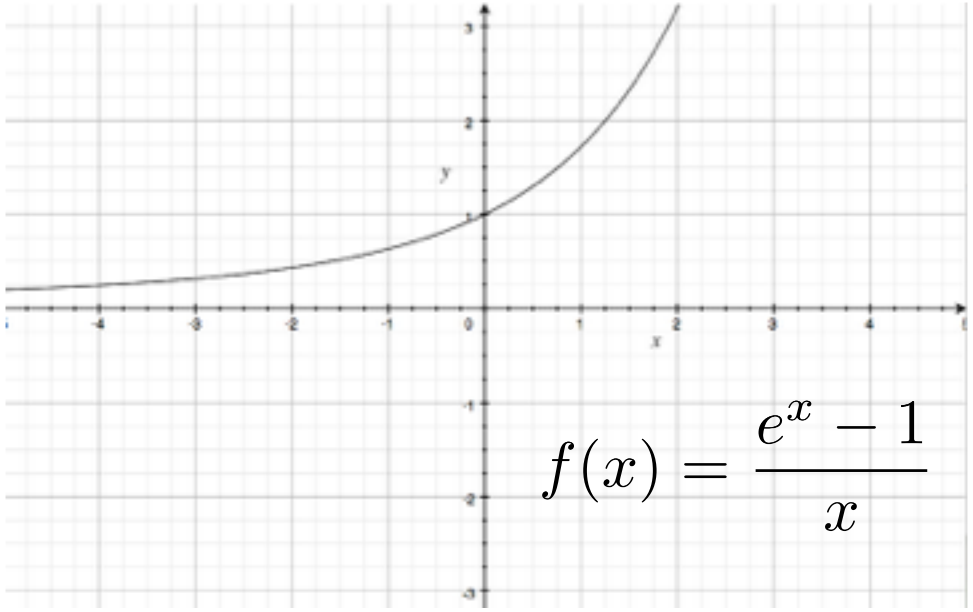
$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3,\ x_0 = -1,\ x_1 = -2/3 \qquad f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1},\ x_0 = -1,\ x_1 = -0.8$$

Ve kterém bodě paraboly $y = x^2 - 2x + 5$ je její tečna kolmá k ose prvního kvadrantu?

Pod jakým úhlem se protínají grafy funkcí $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad y = 2 - \sqrt{x}$?

Příklady na derivace

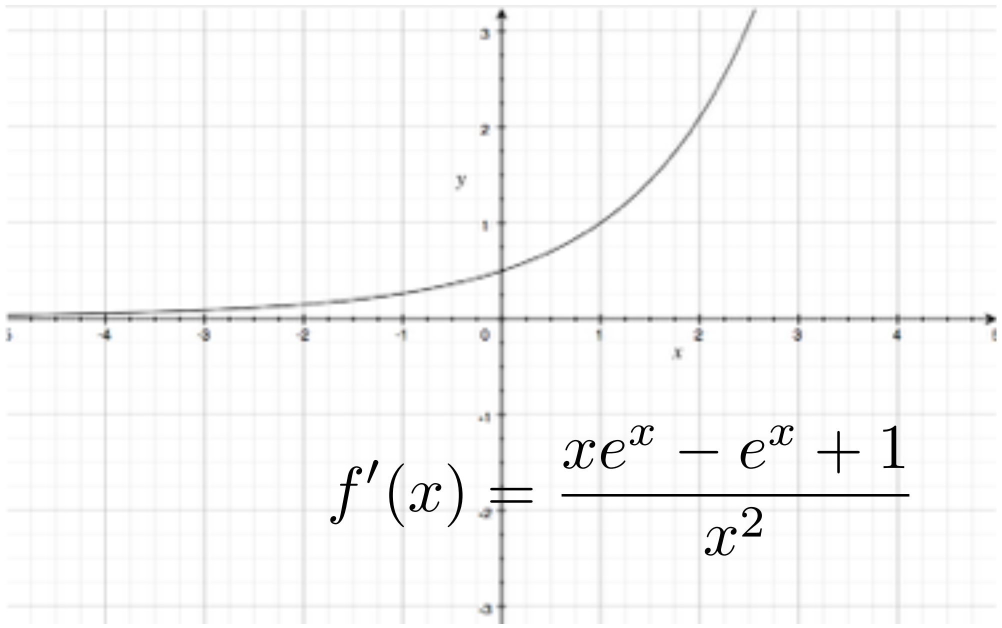
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$



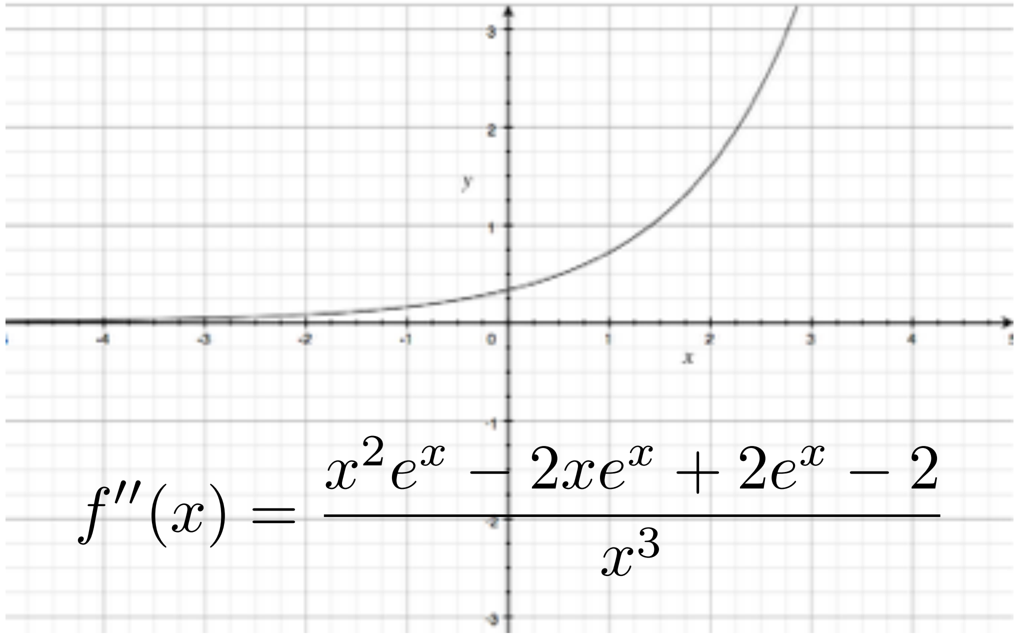
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Protože je $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, můžeme funkci *f* dodefinovat v bodě 0.

Potom už bude D(*f*) = **R**.



$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$



$$f''(x) = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

III.7. Monotonie funkce

Věta: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v okolí bodu $x \in (a,b)$ a existuje derivace $f'(x)$. Potom platí:
a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je v bodě x rostoucí,
b) $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ je v bodě x neklesající,
c) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je v bodě x klesající,
d) $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ je v bodě x nerostoucí.

- $f'(x) = 0 \Rightarrow$ bod x je *stacionárním bodem* funkce f
- nahradíme-li ve větě derivace v bodě jednostrannými derivacemi, budeme hovořit o monotónii zleva nebo zprava

Tvrzení: Pokud je funkce $f(x)$ spojitá v okolí bodu $x \in (a,b)$ a je v bodě x zároveň zleva rostoucí a zprava klesající, potom máfunkce f v bodě x lokální maximum. Pokud je zleva klesající a zprava rostoucí, potom má v bodě x lokální minimum.

Všimněte si, že funkce f v bodě x nemusí mít derivaci (derivace zleva nemusí být stejná jako derivace zprava) a přesto v něm může mít lokální extrém.

III.7. Monotonie funkce

Věta: Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ a má derivaci v otevřeném intervalu (a,b). Potom platí:

a) $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ => f je rostoucí v $\langle a,b \rangle$,

b) $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ => f je neklesající v $\langle a,b \rangle$,

c) $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ => f je klesající v $\langle a,b \rangle$,

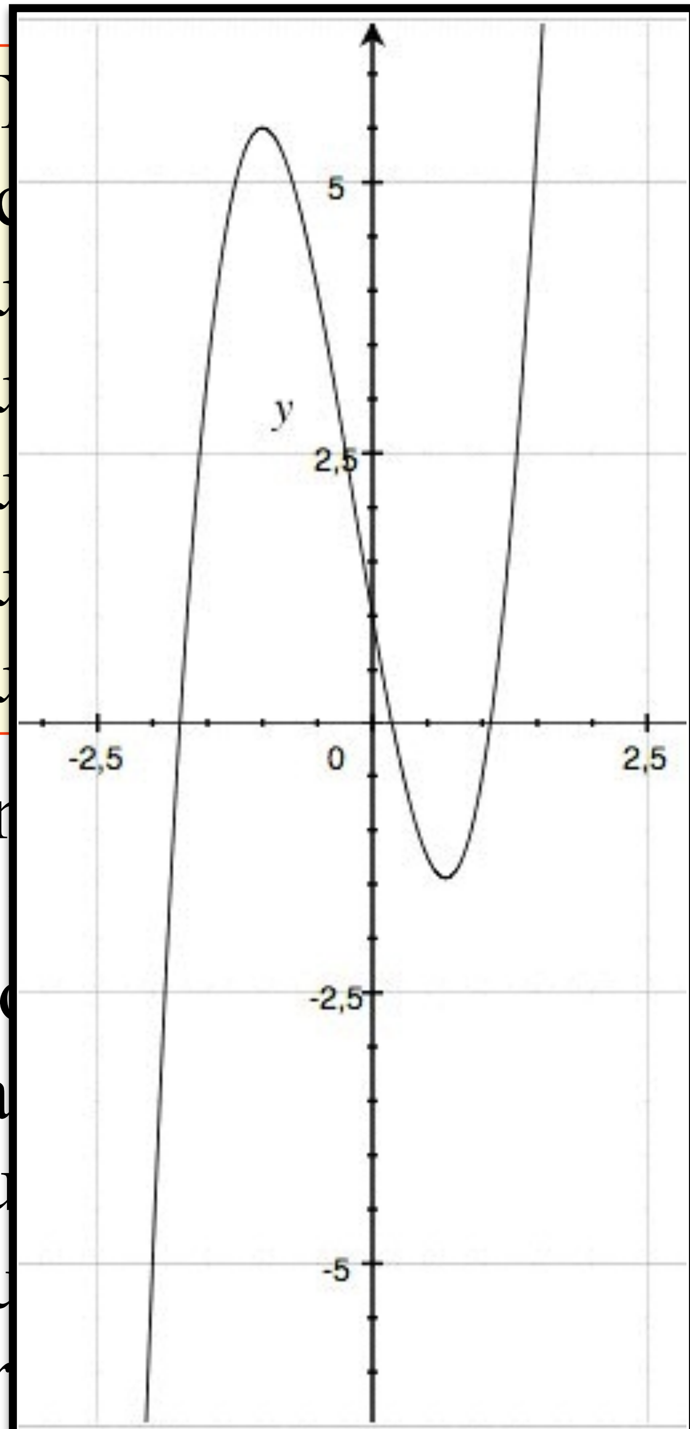
d) $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ => f je nerostoucí v $\langle a,b \rangle$,

e) $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ => f je konstantní v $\langle a,b \rangle$.

- Řekneme, že funkce je rostoucí (klesající) na uzavřeném intervalu, je-li rostoucí (klesající) ve vnitřních bodech tohoto intervalu a jednostranně rostoucí (klesající) v jeho krajních bodech.
- Věta platí pouze na souvislém intervalu. Neplatí pro sjednocení dvou disjunktních intervalů.
- Pokud platí některý z bodů a) - d), říkáme, že interval (a,b) je *intervalem monotónie* funkce f.

Příklady: $f(x) = 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ $\qquad$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

III.7. Monotonie funkce



Věta: ... jitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ a má
derivac ... alu (a,b). Potom platí:

a) $f'($ ... (a,b) => f je rostoucí v $\langle a,b \rangle$,

b) $f'($ ... (a,b) => f je neklesající v $\langle a,b \rangle$,

c) $f'($ ... (a,b) => f je klesající v $\langle a,b \rangle$,

d) $f'($ ... (a,b) => f je nerostoucí v $\langle a,b \rangle$,

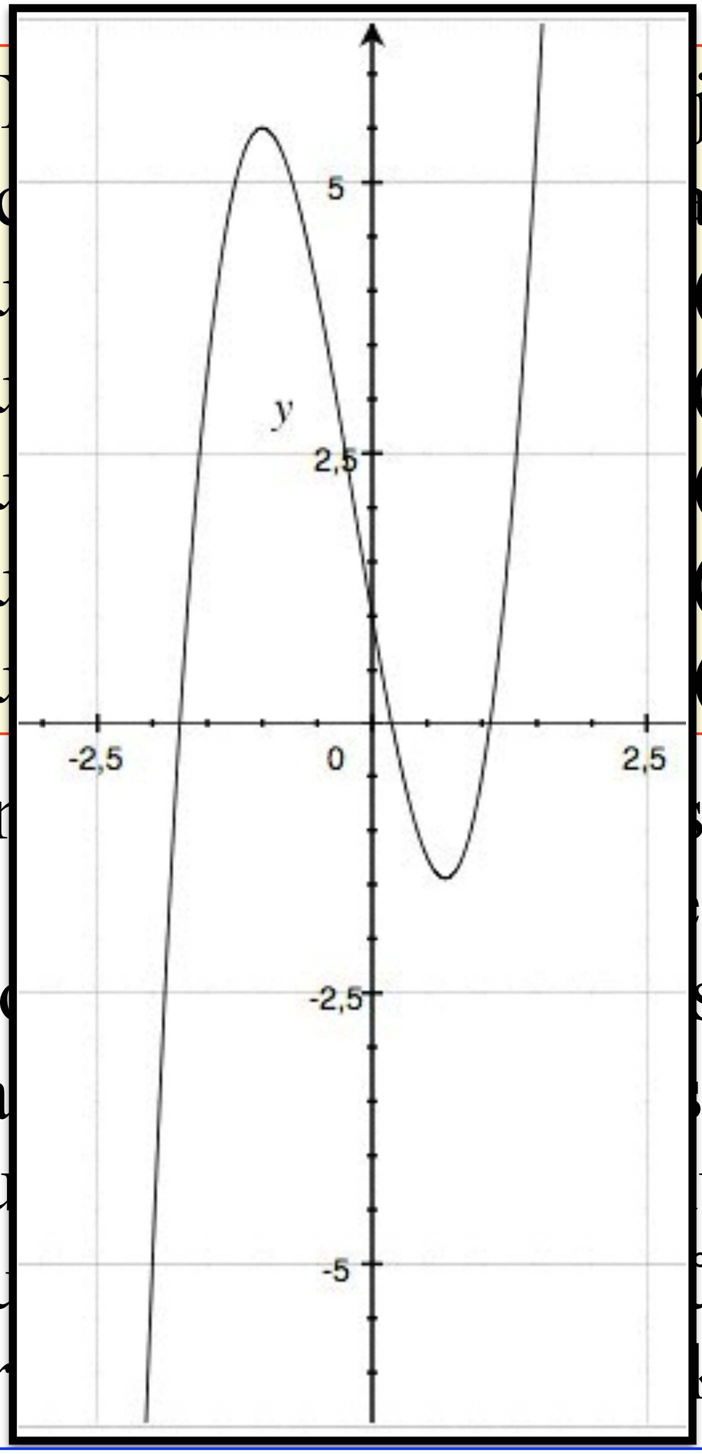
e) $f'($ ... (a,b) => f je konstantní v $\langle a,b \rangle$.

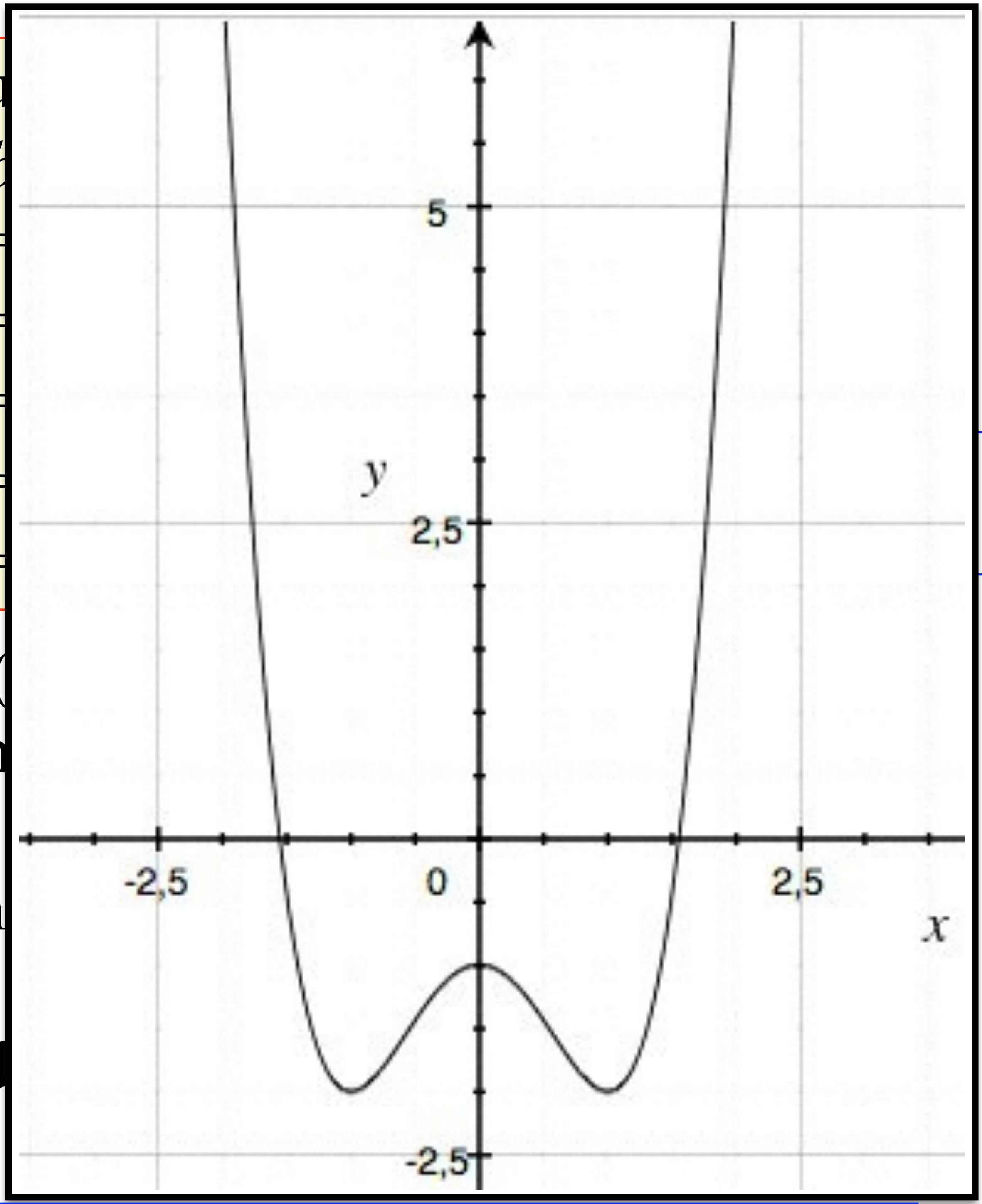
- Řekn ... stoucí (klesající) na uzavřeném intervalu,
  je-li ... vnitřních bodech tohoto intervalu a
  jedn ... sající) v jeho krajních bodech.
- Věta ... lém intervalu. Neplatí pro sjednocení
  dvou ... ů.
- Poku ... ů a) - d), říkáme, že interval (a,b) je
  inter ... kce f.

Příklady: $f(x) = 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ $\qquad$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

III.7. Monotonie funkce

Věta: [...]jitá v u[...]
deriva[...]alu (a,b[...]
a) f'([...](a,b) =[...]
b) f'([...](a,b) =[...]
c) f'([...](a,b) =[...]
d) f'([...](a,b) =[...]
e) f'([...](a,b) =[...]





$6x + 1$

- Řekn[...]stoucí ([...] je-li [...] vnitřn[...] jedn[...]sající)
- Věta[...]lém in[...] dvou[...]ů.
- Poku[...]ů a) - d[...] *inter*[...]kce f.

Příklady: $f(x) = 3x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ $\quad$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

III.7. Konkávnost, konvexnost funkce, inflexní body

Definice: Nechť bod x_0 je vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Uvažujme nějaké okolí $U_\varepsilon(x_0)$ bodu x_0. Pro dva body $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0)$ označme

$$Q(x_0, x_1, x_2) = f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big).$$

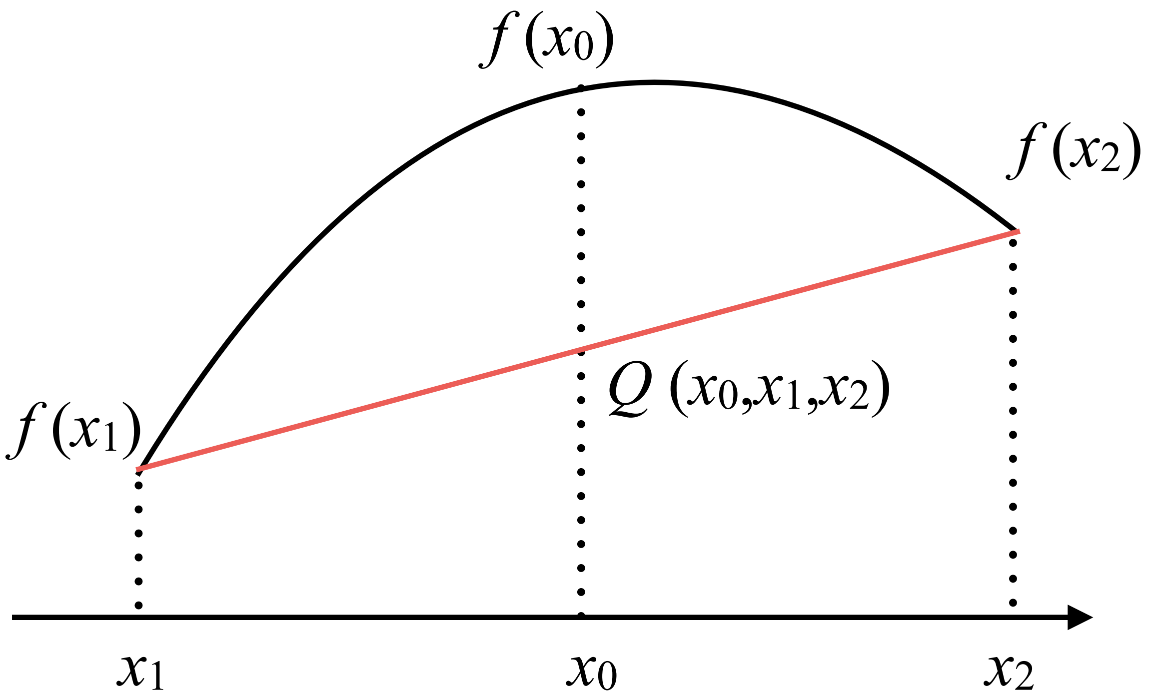
Řekneme, že funkce f je v bodě x_0

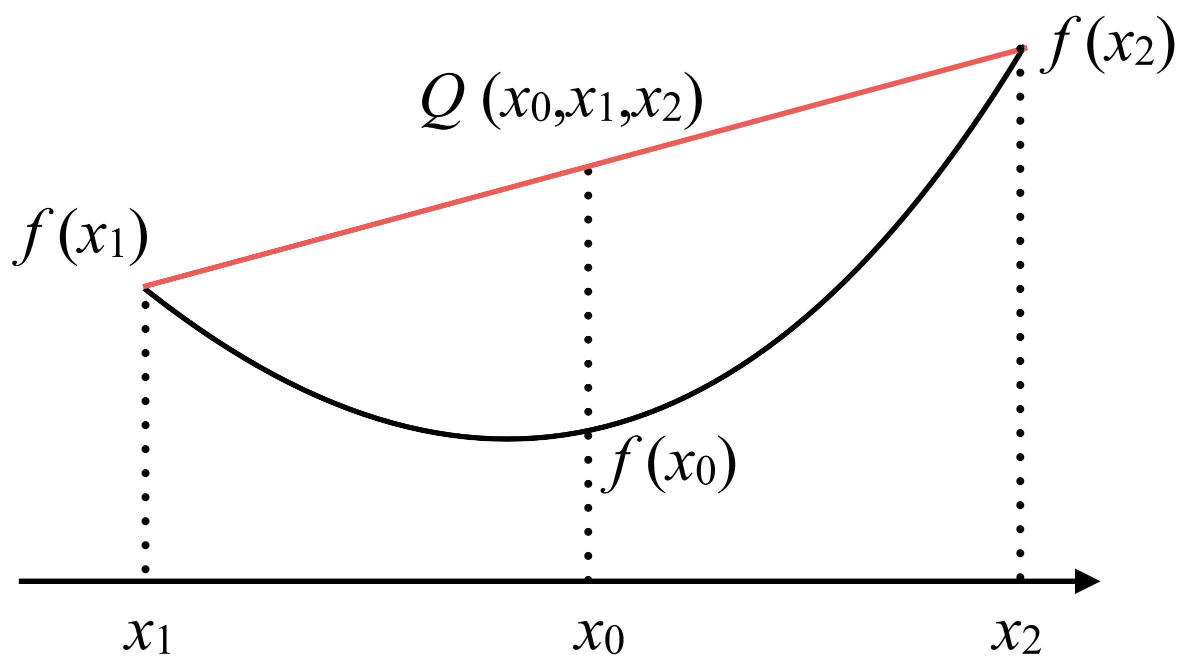
a) *konvexní*, jestliže je $f(x_0) < Q(x_0,x_1,x_2)$

b) *konkávní*, jestliže je $f(x_0) > Q(x_0,x_1,x_2)$

c) *lineární*, jestliže je $f(x_0) = Q(x_0,x_1,x_2)$

pro všechny body $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0)$ takové, že $x_1 < x_0 < x_2$.



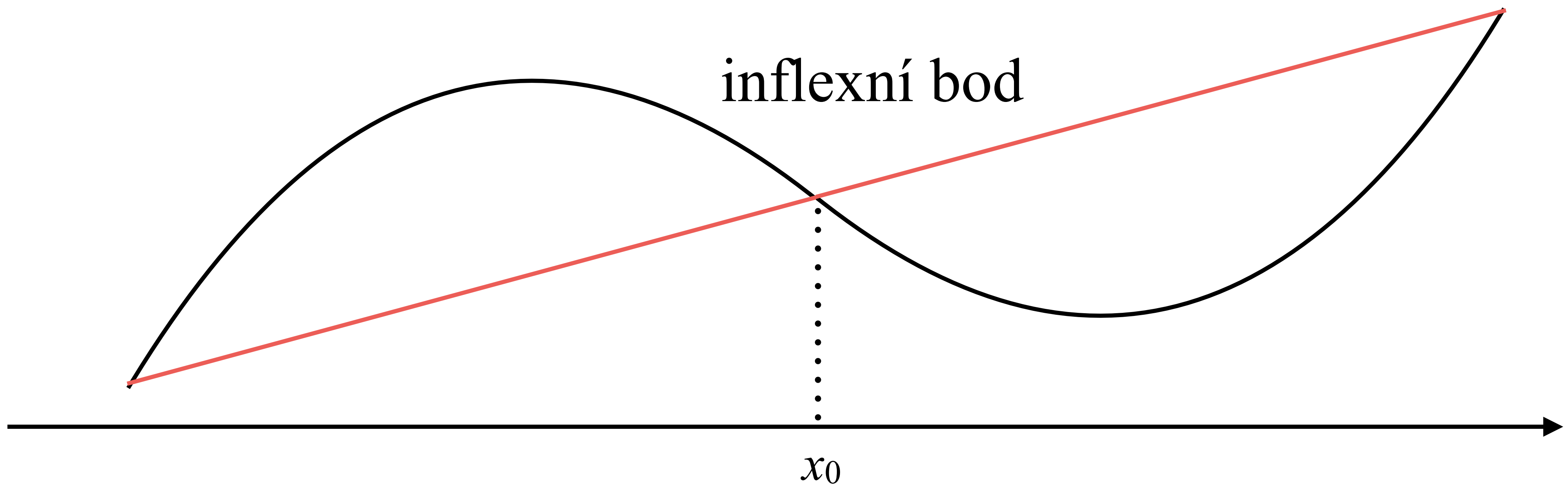


III.7. Konkávnost, konvexnost funkce, inflexní body

Definice: Jestliže pro každé tři body x_0, x_1, x_2 z intervalu I takové, že $x_1 < x_0 < x_2$ platí

a) $f(x_0) < Q(x_0,x_1,x_2) \Rightarrow f$ je v I ryze konvexní,
b) $f(x_0) \leq Q(x_0,x_1,x_2) \Rightarrow f$ je v I konvexní,
c) $f(x_0) > Q(x_0,x_1,x_2) \Rightarrow f$ je v I ryze konkávní,
d) $f(x_0) \geq Q(x_0,x_1,x_2) \Rightarrow f$ je v I konkávní,
e) $f(x_0) = Q(x_0,x_1,x_2) \Rightarrow f$ je v I lineární.

- **Pozor:** Je-li funkce konvexní (konkávní) na disjunktních intervalech I a J, nemusí být konvexní (konkávní) na jejich sjednocení!



III.7. Konkávnost, konvexnost funkce, inflexní body

Věta: Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 druhou derivaci. Potom platí:
a) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ je v x_0 konvexní,
b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ je v x_0 konkávní.

Věta: Nechť funkce $f(x)$ je dvakrát diferencovatelná v otevřeném intervalu (a,b). Potom platí:
a) $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b) \Rightarrow f$ je v (a,b) ryze konvexní,
b) $f''(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a,b) \Rightarrow f$ je v (a,b) konvexní,
c) $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b) \Rightarrow f$ je v (a,b) ryze konkávní,
d) $f''(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a,b) \Rightarrow f$ je v (a,b) konkávní,
e) $f''(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b) \Rightarrow f$ je v (a,b) konstantní.

- V inflexním bodě druhá derivace mění znaménko.

Věta: Nechť funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci. Potom platí:
a) Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce f, potom je $f''(x_0) = 0$.
b) Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexním bodem funkce f.

III.8. Lokální a globální extrémy funkce

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém): Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém):

(i) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum

(ii) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum

- lokální extrémy funkce mohou nastat pouze v tzv. “kritických” bodech (pokud existují):
  - vlastní krajní body definičního oboru funkce f
  - vlastní krajní body definičního oboru první derivace f'
  - nulové body první derivace, tj řešení rovnice $f'(x) = 0$

III.8. Lokální a globální extrémy funkce

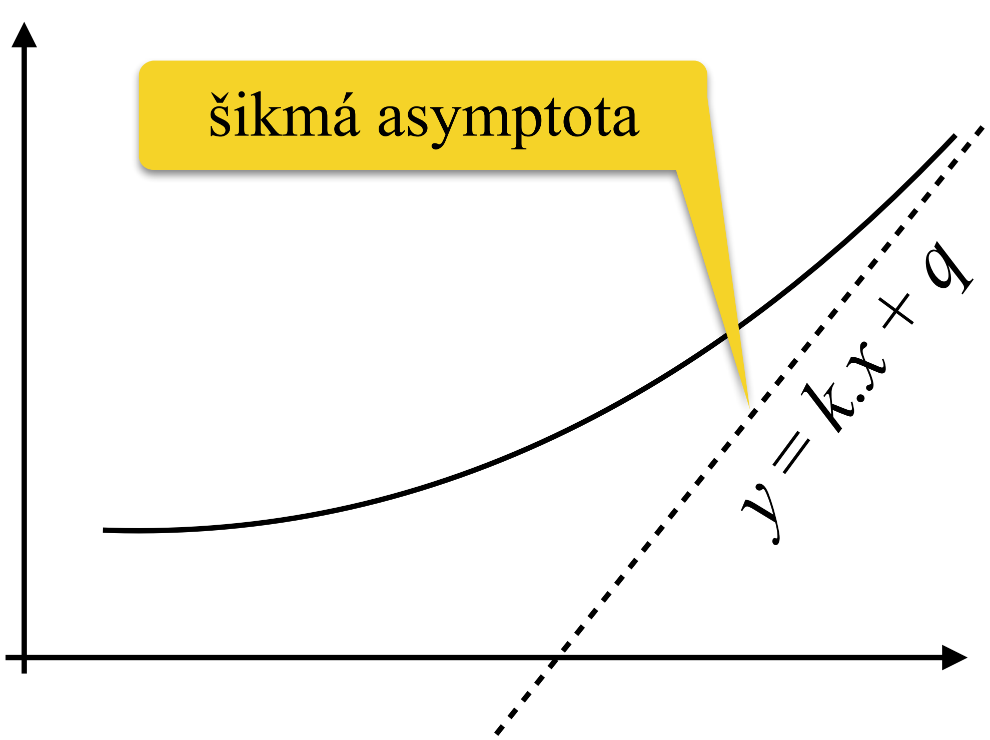
Hledání lokálních extrémů funkce:

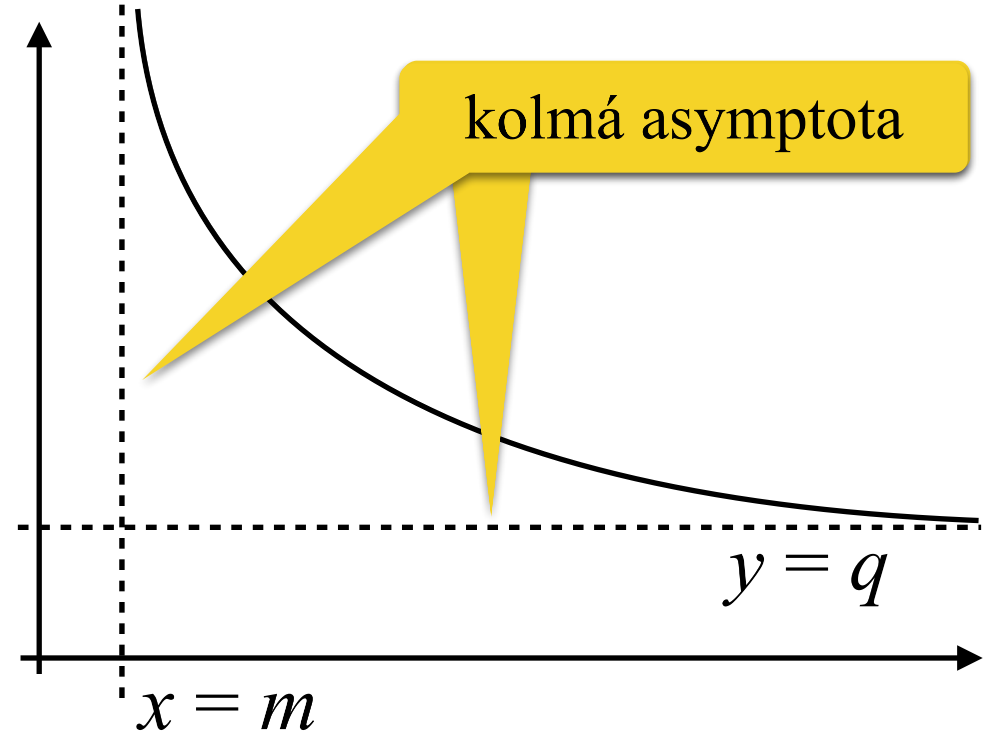
- Najdeme všechny kritické body funkce f.
- V krajních bodech definičních oborů spočteme odpovídající jednostranné limity funkce f. V úvahu bereme pouze ty krajní body, v nichž je funkce f definována.
- Ve vnitřních bodech definičního oboru, kde je $f' = 0$, zjistíme zda se jedná o extrém (viz předcházející věta) a pokud ano, také spočteme funkční hodnoty funkce f.
- Podle intervalů monotonie určíme, která z takto spočtených hodnot je lokální maximum a která je lokálním minimem.

Hledání globálních extrémů funkce:

- Globální extrémy funkce f vybíráme z lokálních extrémů.
- Je-li některá z limit funkce v kritických bodech a v případných nevlastních krajních bodech definičního oboru ostře nad (pod) všemi lokálními maximy (minimy), potom globální maximum (minimum) neexistuje.

III.9. Chování grafu funkce v nevlastních bodech





- Šikmá asymptota ve tvaru $y = k.x + q$ existuje pro funkci pokud
  - funkce je definovaná na okolí $\pm\infty$
  - existují obě vlastní limity $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx\right] = q$
- Kolmá asymptota ve tvaru $y = q$ existuje v případě, že funkce má vlastní limitu q v nevlastním bodě
- Kolmá asymptota ve tvaru $x = m$ existuje v případě, že funkce má nevlastní limitu ve vlastním bodě m.

III.9. Vyšetřování průběhu funkce

- Spočteme první a druhou derivaci funkce f.
- Najdeme množinu “kritických bodů” a zakreslíme je do grafu:
  - krajní body definičního oboru funkce f (včetně nevlastních $\pm\infty$),
  - krajní body definičního oboru první derivace f',
  - nulové body první derivace f',
  - krajní body definičního oboru druhé derivace f',
  - nulové body druhé derivace f'.
- Spočteme limity funkce f ve všech kritických bodech (je-li třeba tak jednostranné) a zakreslíme je do grafu.
- Najdeme šikmé asymptoty, pokud je třeba.
- Sestavíme pomocnou tabulku.

x	x_1	x_2		x_3		…	x_1		x_3
$f(x)$	$f_+(x_1)$	$f_-(x_2)$	$f_+(x_2)$	$f_-(x_3)$	$f_+(x_3)$	…	$f_-(x_{n-1})$	$f_+(x_{n-1})$	$f_-(x_n)$
$f'(x)$	+		−		…			−	
$f''(x)$	⤴		⤵		…			↳	

III.9. Vyšetřování průběhu funkce

Příklad: $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

$D(f) = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

$D(f') = D(f)$, $f'(0) = 0=f(2\sqrt{3})$

$D(f'') = D(f)$, $f''(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}$$

$K(f) = \{-\infty,-2\sqrt{3},-2, 0 , 2, 2\sqrt{3},+\infty\}$

funkce je lichá; $f(0) = 0$, $f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-2_-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 2_-} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-2_+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 2_+} f(x)$$

asymptoty: $x = -2$, $x = -2$

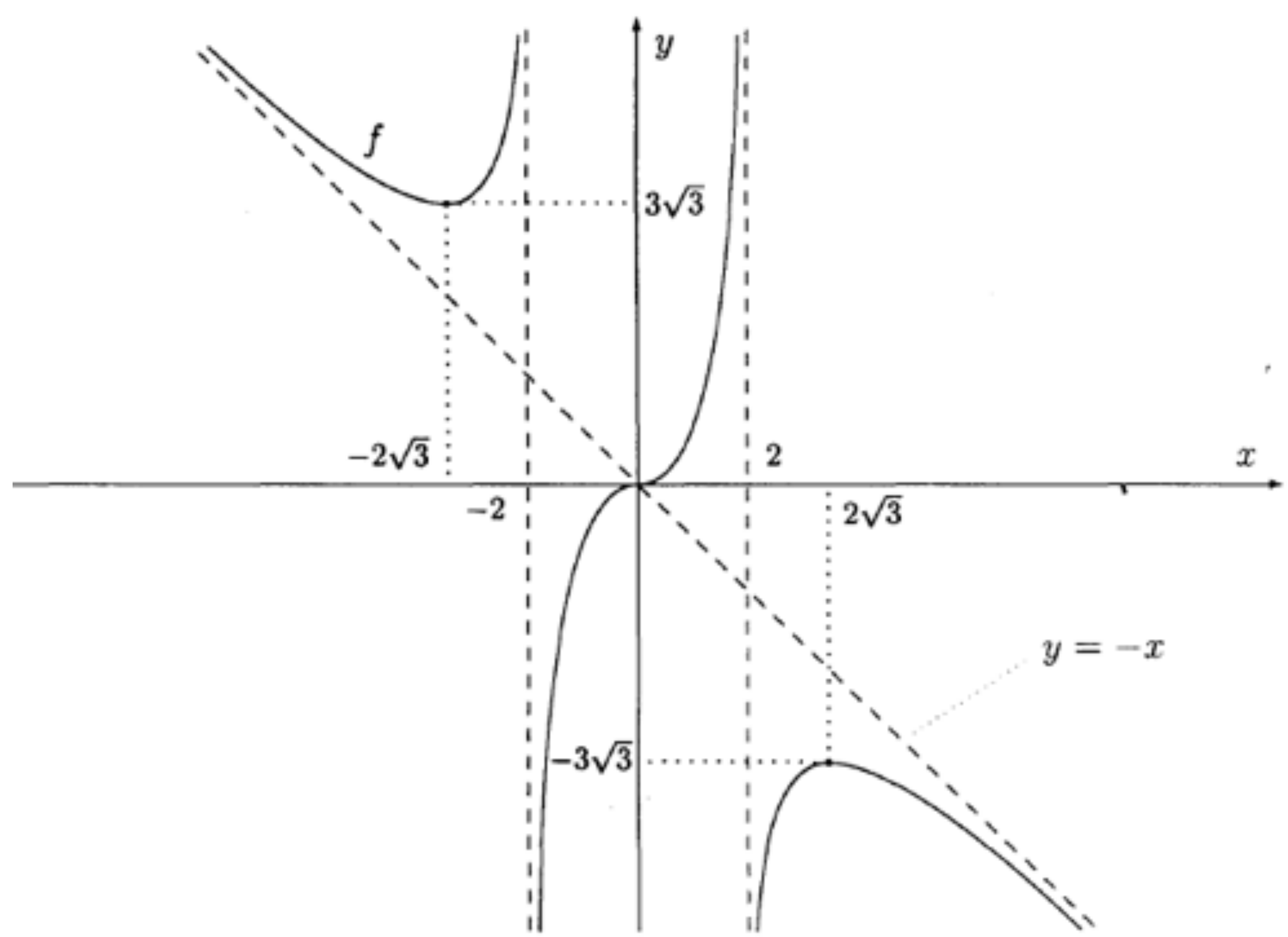
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 = k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q = \lim_{x\to+\infty} f(x)+x$$

III.9. Vyšetřování průběhu funkce

Příklad: $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

<table>
<tr><td>x</td><td colspan="2">$-\infty$</td><td colspan="2">$-2\sqrt{3}$</td><td colspan="2">-2</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$+2$</td><td colspan="2">$+2\sqrt{3}$</td><td colspan="2">$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">$+\infty$</td><td colspan="2">$3\sqrt{3}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">$-3\sqrt{3}$</td><td colspan="2">$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">$-$</td><td colspan="2">$+$</td><td colspan="2">$+$</td><td colspan="2">$+$</td><td colspan="2">$+$</td><td colspan="3">$-$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td colspan="3">↘</td><td colspan="2">↗</td><td colspan="2">↗</td><td colspan="2">↗</td><td colspan="2">↗</td><td colspan="3">↘</td></tr>
</table>



III.10. Křivost, oskulační kružnice

Definice: Grafy funkcí *f* a *g* mají v bodě x_0 styk *n*-tého řádu, je-li

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \ \ldots, \ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

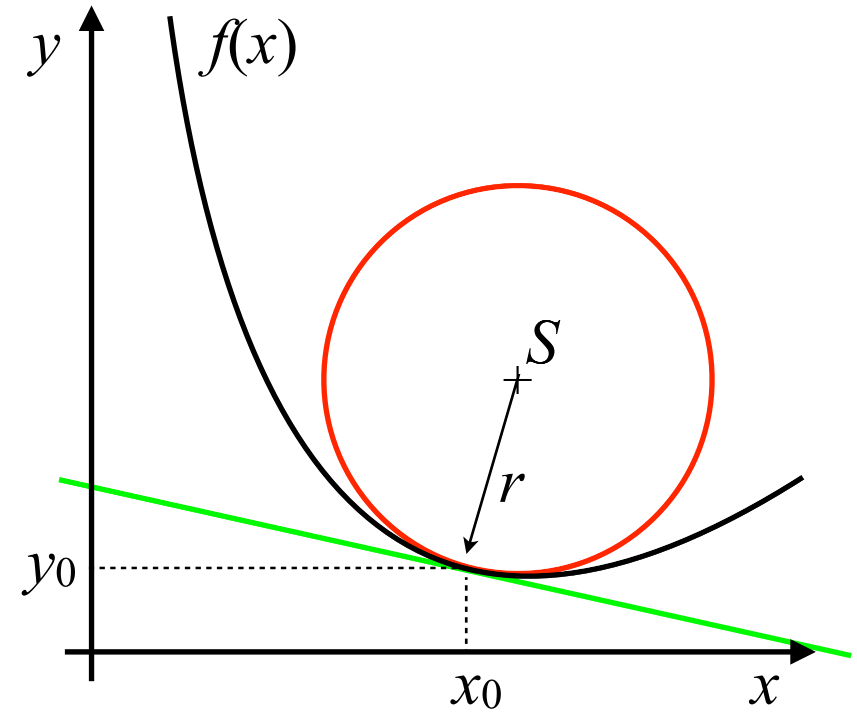
- styk 1. řádu má graf funkce se svojí tečnou
- hledejme křivku, která bude mít v daném bodě styk 2. řádu:

Definice: Nechť funkce *f* je v bodě x_0 spojitá a dvakrát diferencovatelná. Potom kružnici se středem v bodě

$$\left[x_0 - f'(x_0)\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},\ f(x_0) + \frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}\right]$$

a o poloměru

$$r = \frac{\left(1+f'^2(x_0)\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|}$$



nazveme *oskulační kružnicí* ke grafu funkce *f* v bodě x_0. Převrácenou hodnotu poloměru $k=1/r$ budeme nazývat *křivostí* funkce *f* v bodě x_0.

III.10. Křivost, oskulační kružnice

Odvození parametrů oskulační kružnice: $(x-x_S)^2+(y-y_S)^2=r^2$

$$y = y_S - \sqrt{r2-(x-x_S)^2} \quad => \quad f(x_0) = y_S - \sqrt{r^2-(x_0-x_S)^2} \qquad (1)$$

$$y' = \frac{x-x_S}{\sqrt{r^2-(x-x_S)^2}} \quad => \quad f'(x_0) = \frac{x_0-x_S}{\sqrt{r^2-(x_0-x_S)^2}} \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{1+\frac{(x-x_S)^2}{r^2-(x-x_S)^2}}{\sqrt{r^2-(x-x_S)^2}} \quad => \quad f''(x_0) = \frac{1+f'^2(x_0)}{\sqrt{r^2-(x-x_S)^2}} \qquad (3)$$

(2) $=> \sqrt{r^2-(x-x_S)^2} = \dfrac{(x_0-x_S)^2}{f'(x_0)} \quad => \quad f''(x_0) = \dfrac{1+f'^2(x_0)}{x_0-x_S} f'(x_0) =>$

$$\boxed{x_S = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\left(1+f'^2(x_0)\right)}$$

$$=> x_0 - x_S = \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\left(1+f'^2(x_0)\right) \quad => \quad \sqrt{r^2-(x-x_S)^2} = \frac{1}{f''(x_0)}\left(1+f'^2(x_0)\right)$$

(1) $=>$

$$\boxed{y_S = f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)}\left(1+f'^2(x_0)\right)}$$

III.10. Křivost, oskulační kružnice

Odvození parametrů oskulační kružnice: $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$

$$\boxed{x_S = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\left(1 + f'^2(x_0)\right)} \quad => \quad x_0 - x_S = \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}\left(1 + f'^2(x_0)\right)$$

$$\boxed{y_S = f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)}\left(1 + f'^2(x_0)\right)} \quad => \quad f(x_0) - y_S = \frac{1}{f''(x_0)}\left(1 + f'^2(x_0)\right)$$

$$r^2 = (x_0 - x_S)^2 + (f(x_0) - y_S)^2 = \frac{1}{f''^2(x_0)}\left(1 + f'^2(x_0)\right)^2\left(f'^2(x_0) + 1\right) = \frac{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^3}{f''^2(x_0)}$$

$$\boxed{r = \frac{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|}}$$

III.11. Taylorův polynom

Definice: Grafy funkcí f a g mají v bodě x_0 styk n-tého řádu, je-li
$$f(x_0) = g(x_0),\quad f'(x_0) = g'(x_0),\ \dots\ , f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

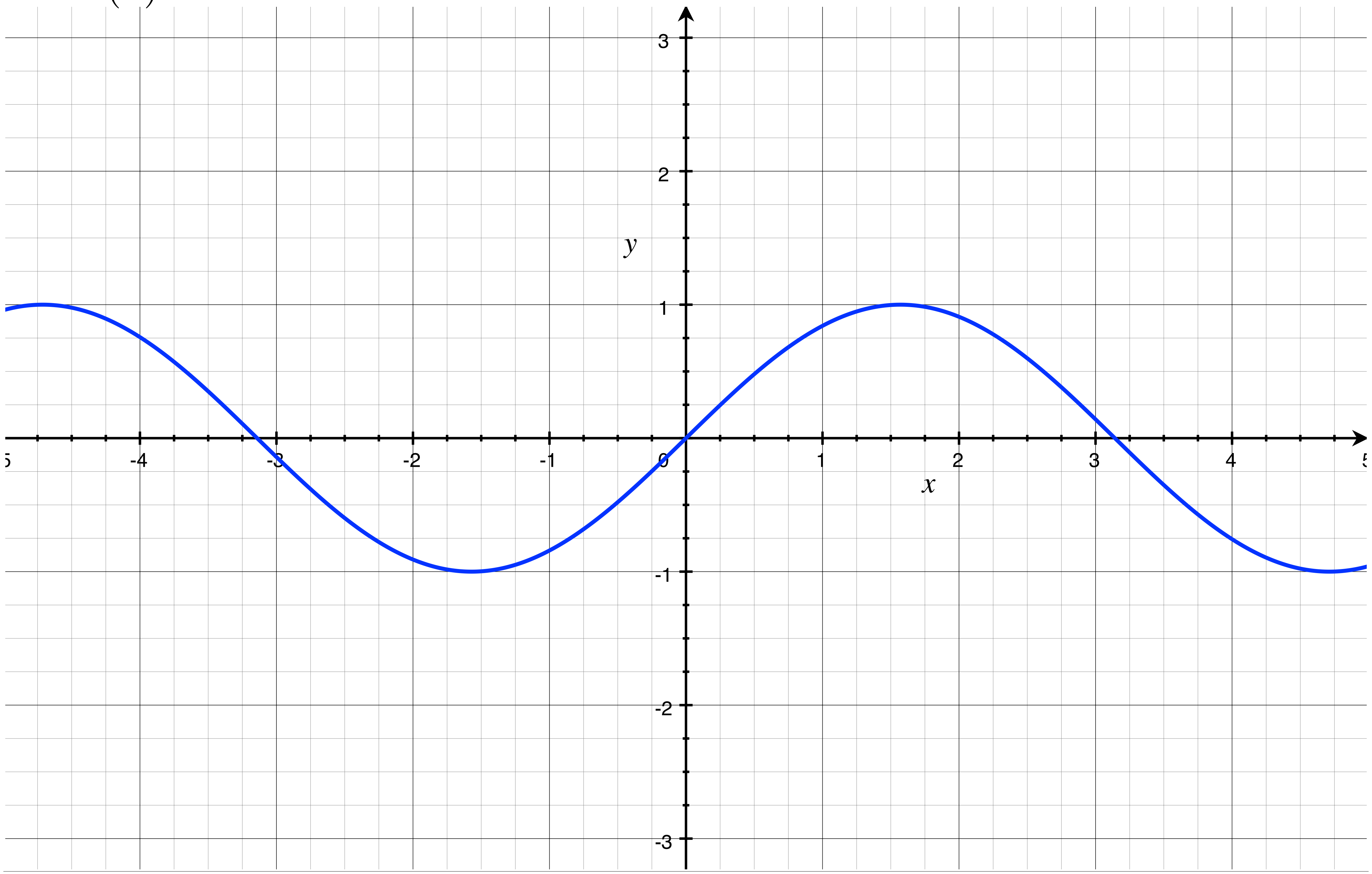
- styk 1. řádu má graf funkce se svojí tečnou
- styk 2. řádu má graf funkce se svojí oskulační kružnicí
- hledejme funkci, která bude mít s grafem funkce styk řádu n:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_2(x - x_0)^n$$

Definice: Nechť funkce f má v bodě x_0 všechny derivace až do řádu n. Funkci
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
budeme nazývat *Taylorovým polynomem* stupně n k funkci f se středem v bodě x_0.

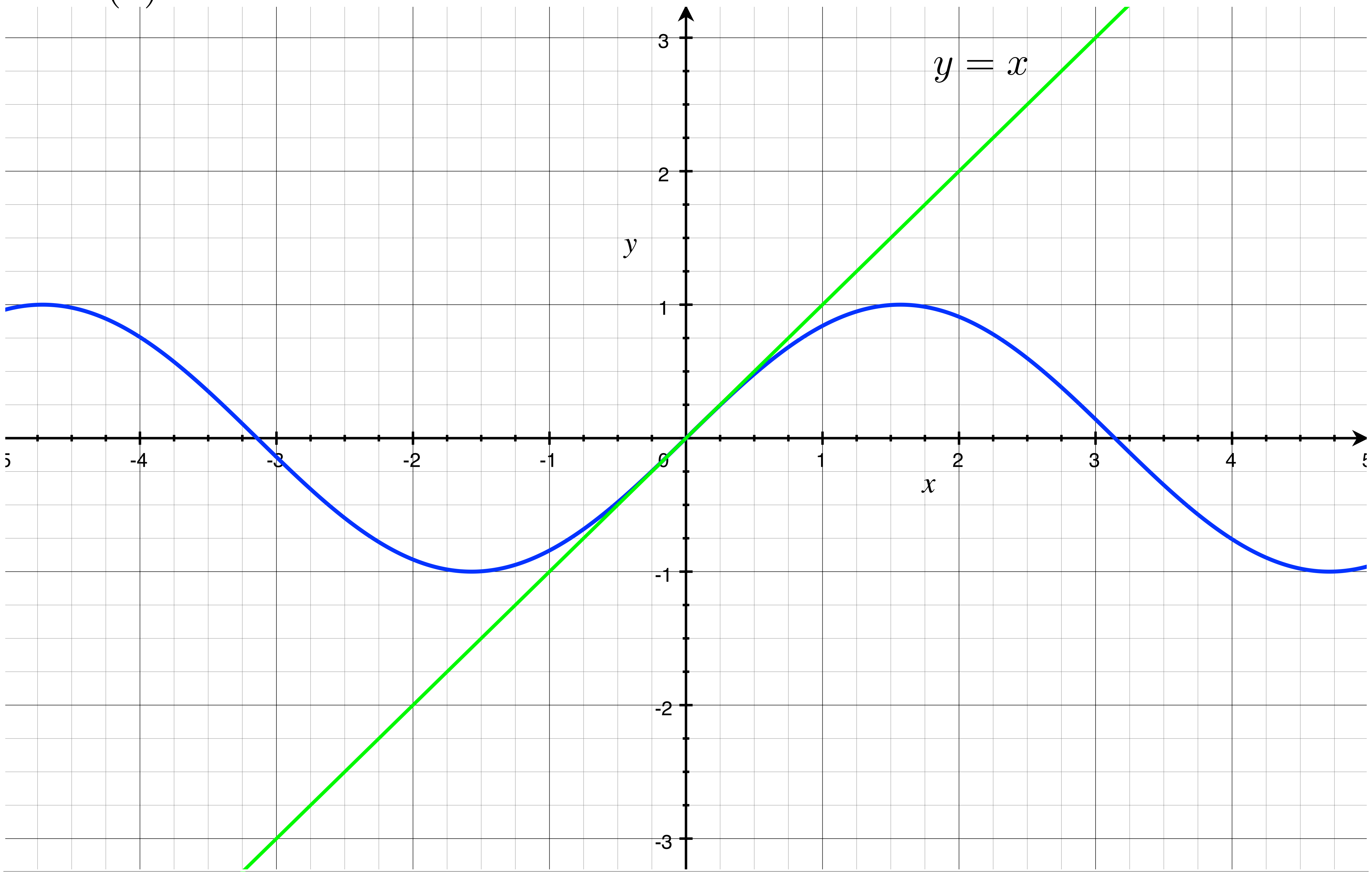
III.11. Taylorův polynom

$y = \sin(x)$



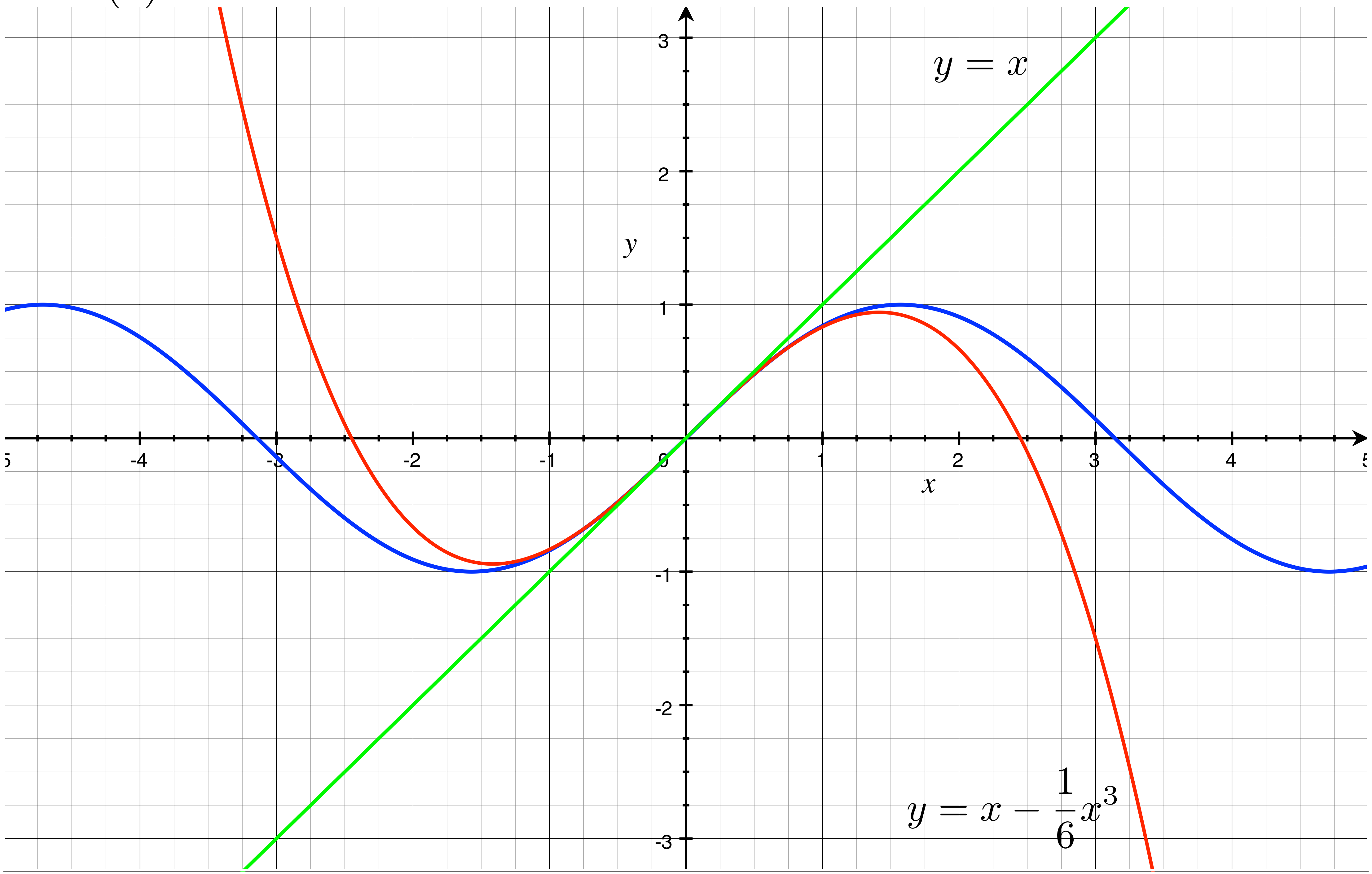
III.11. Taylorův polynom

$y = \sin(x)$



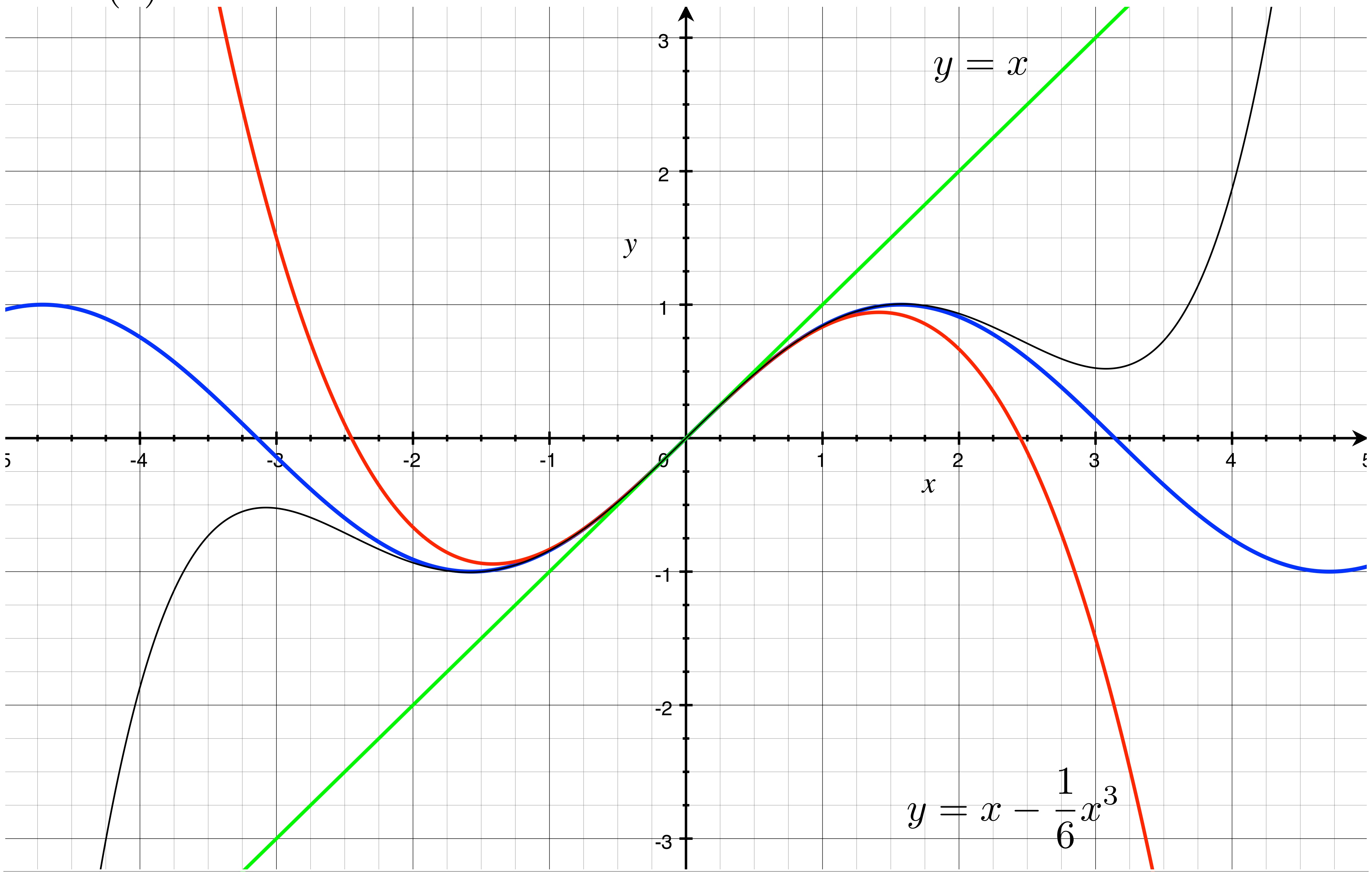
III.11. Taylorův polynom

$y = \sin(x)$



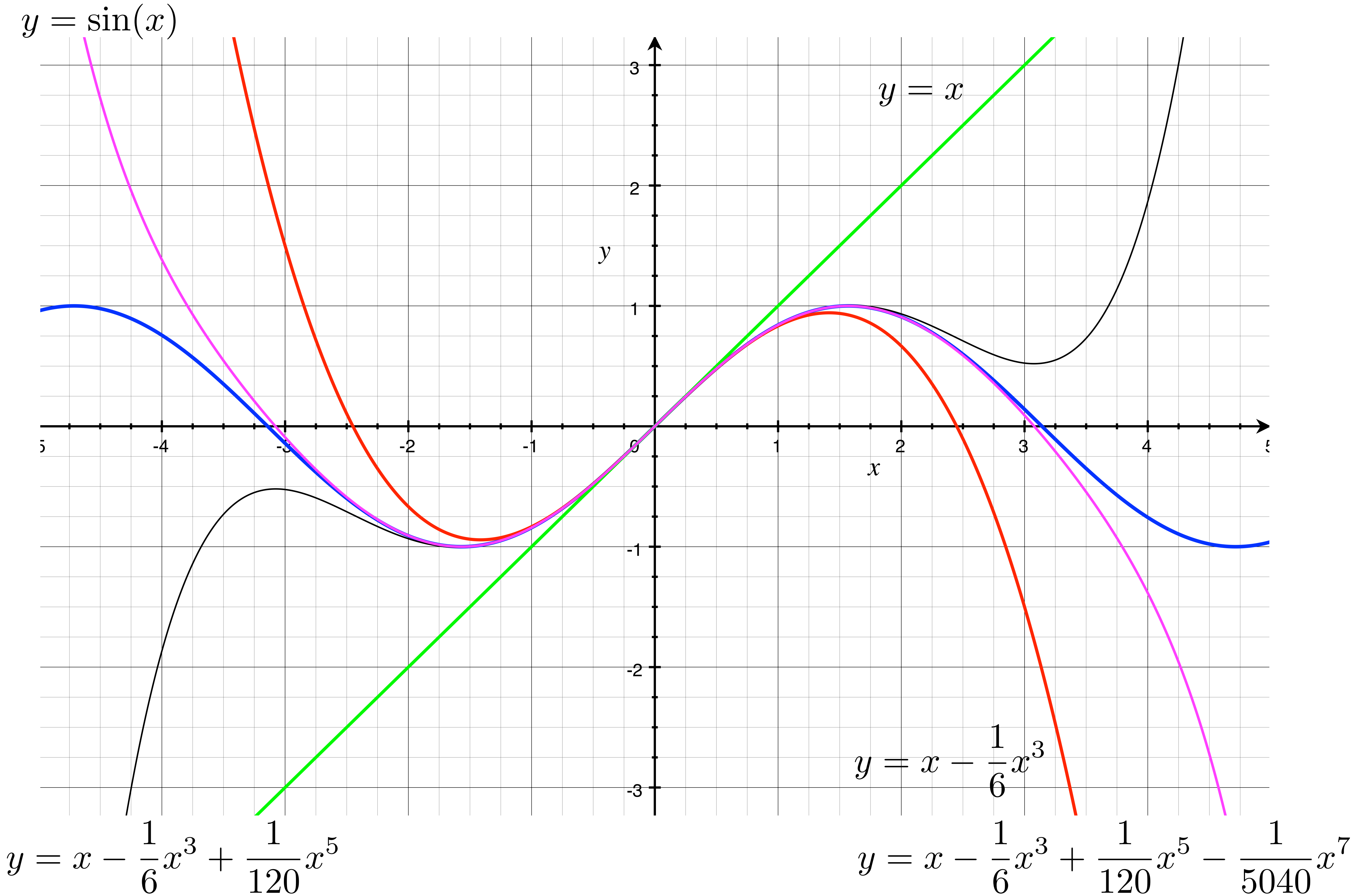
III.11. Taylorův polynom

$y = \sin(x)$



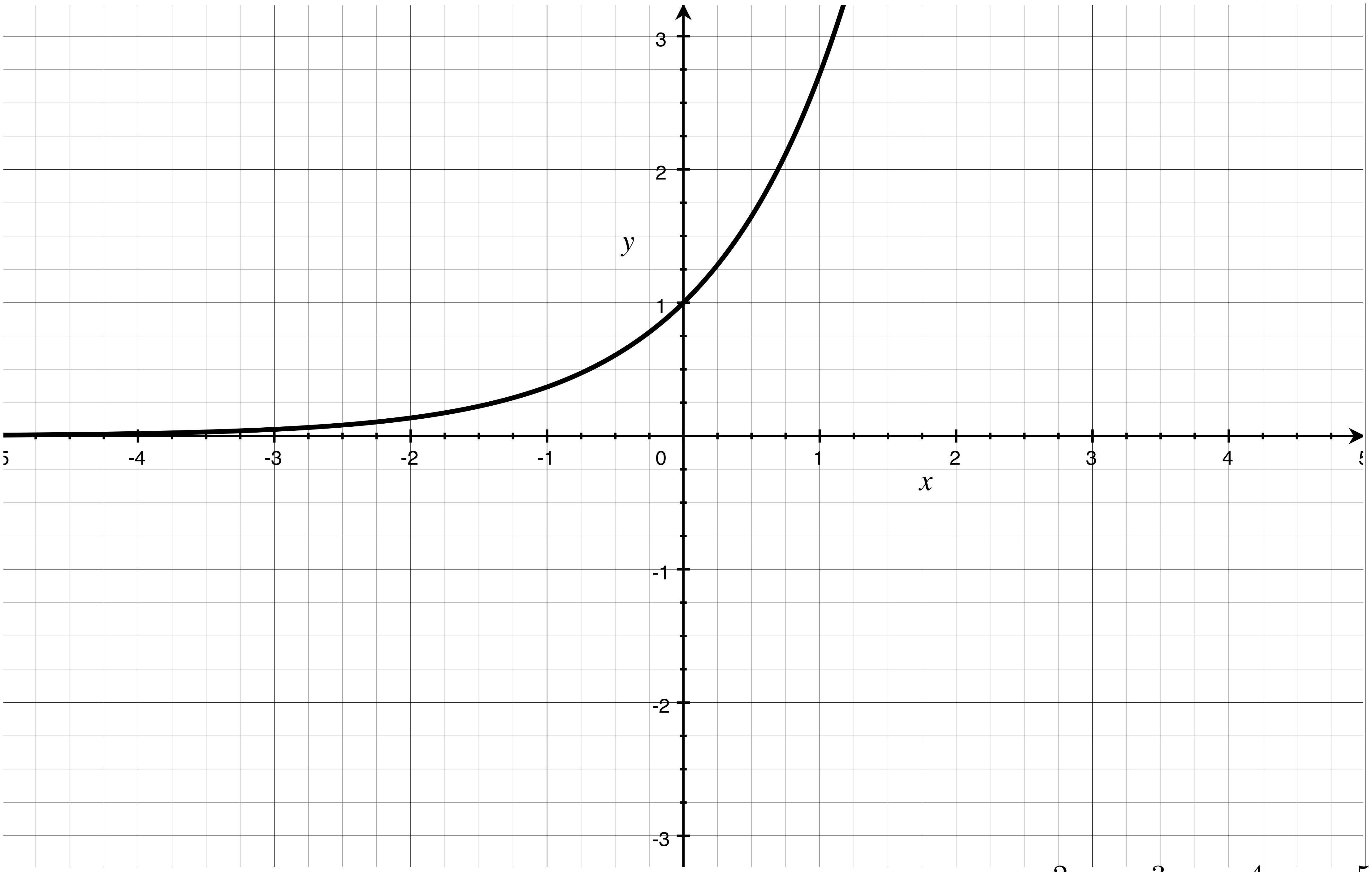
$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

III.11. Taylorův polynom



III.11. Taylorův polynom

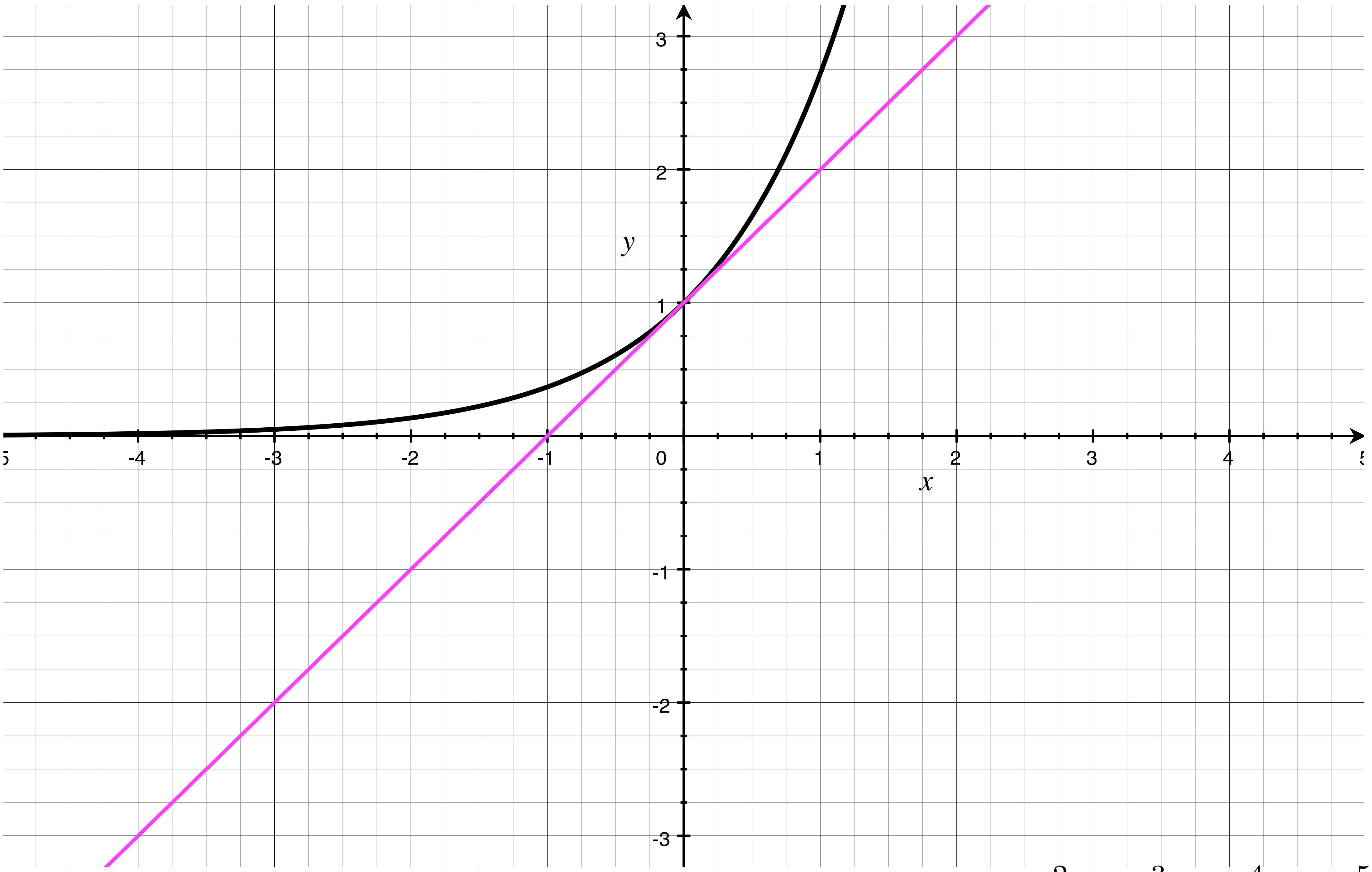
$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

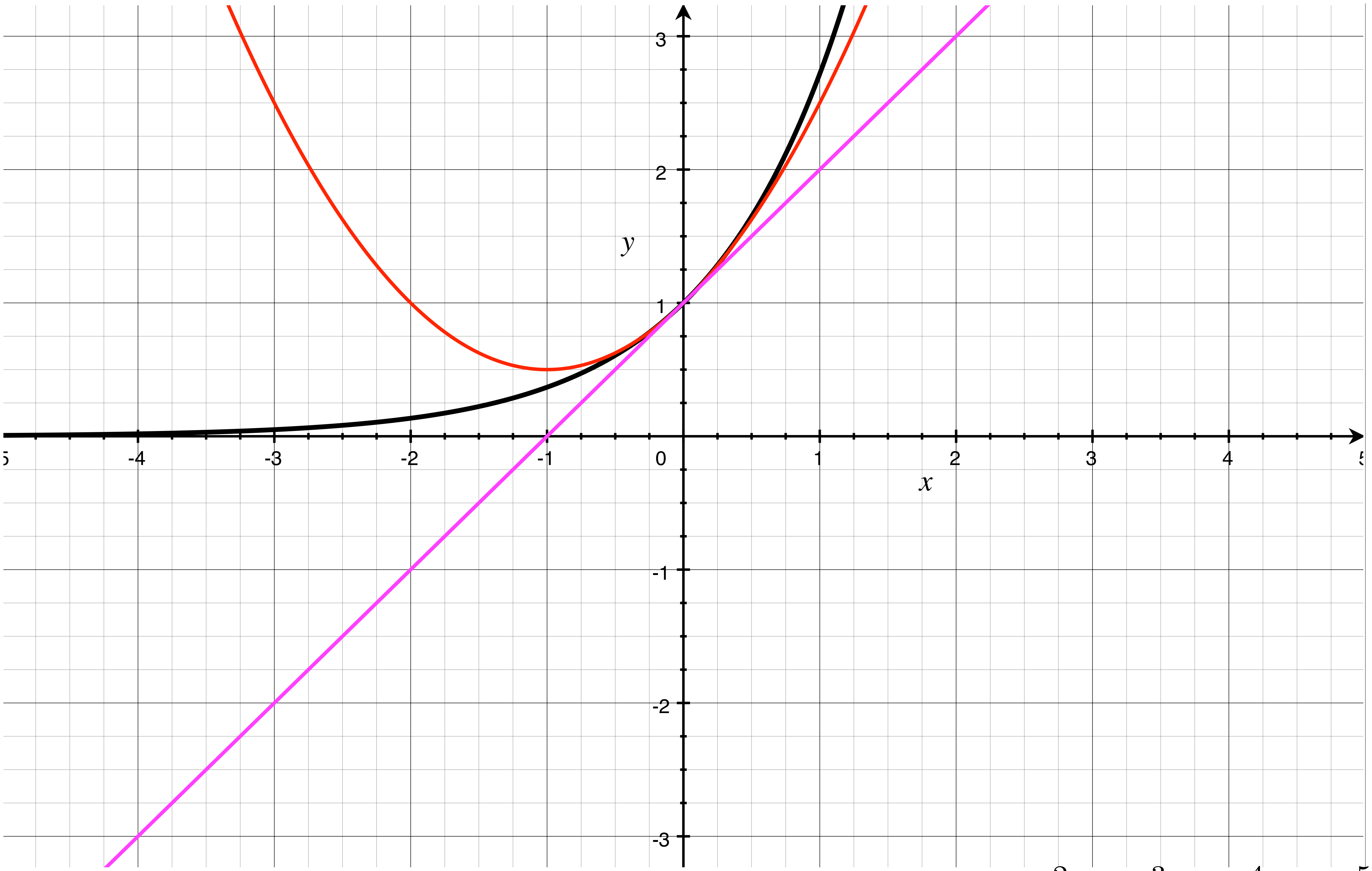
$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

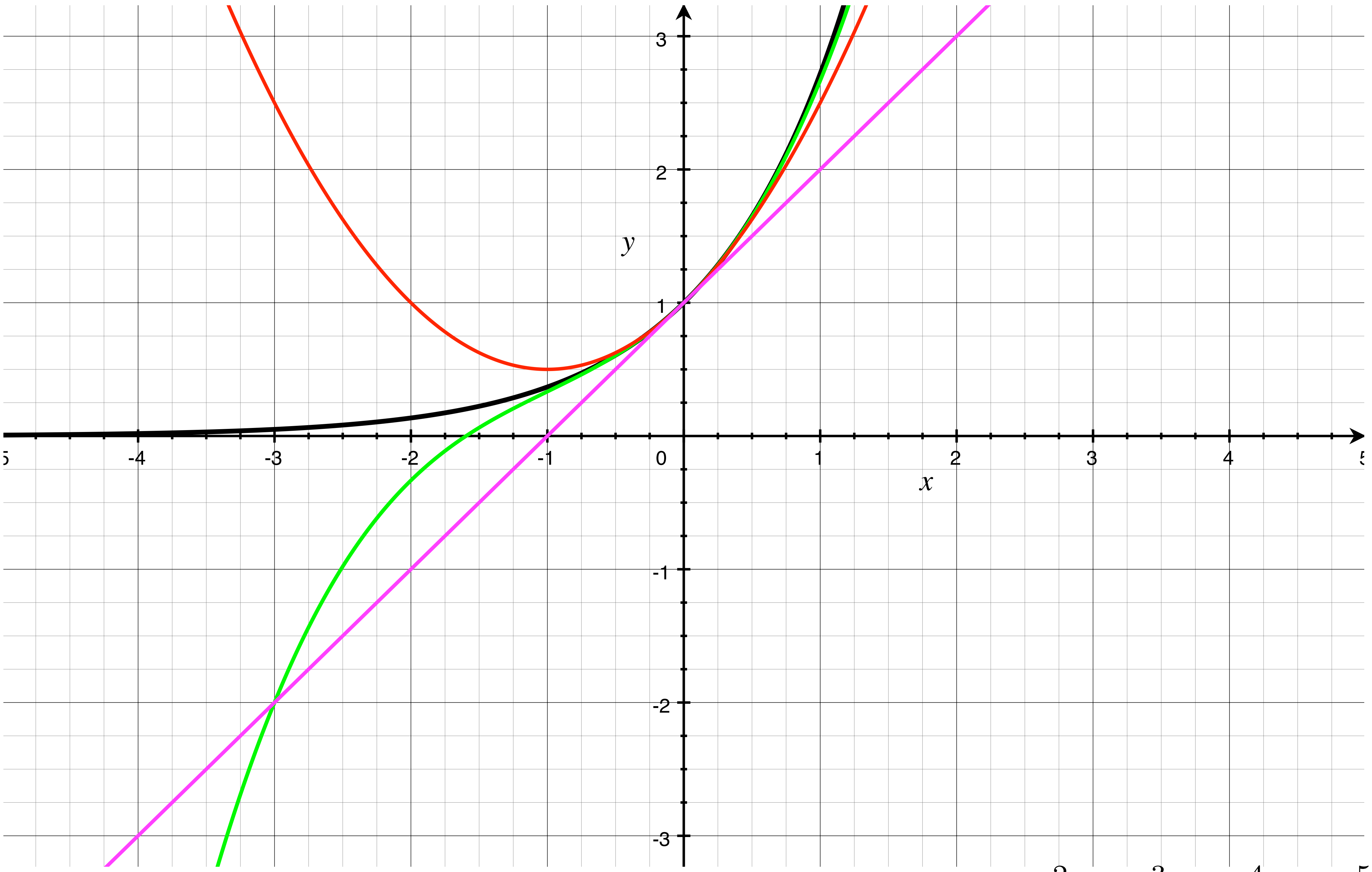
$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

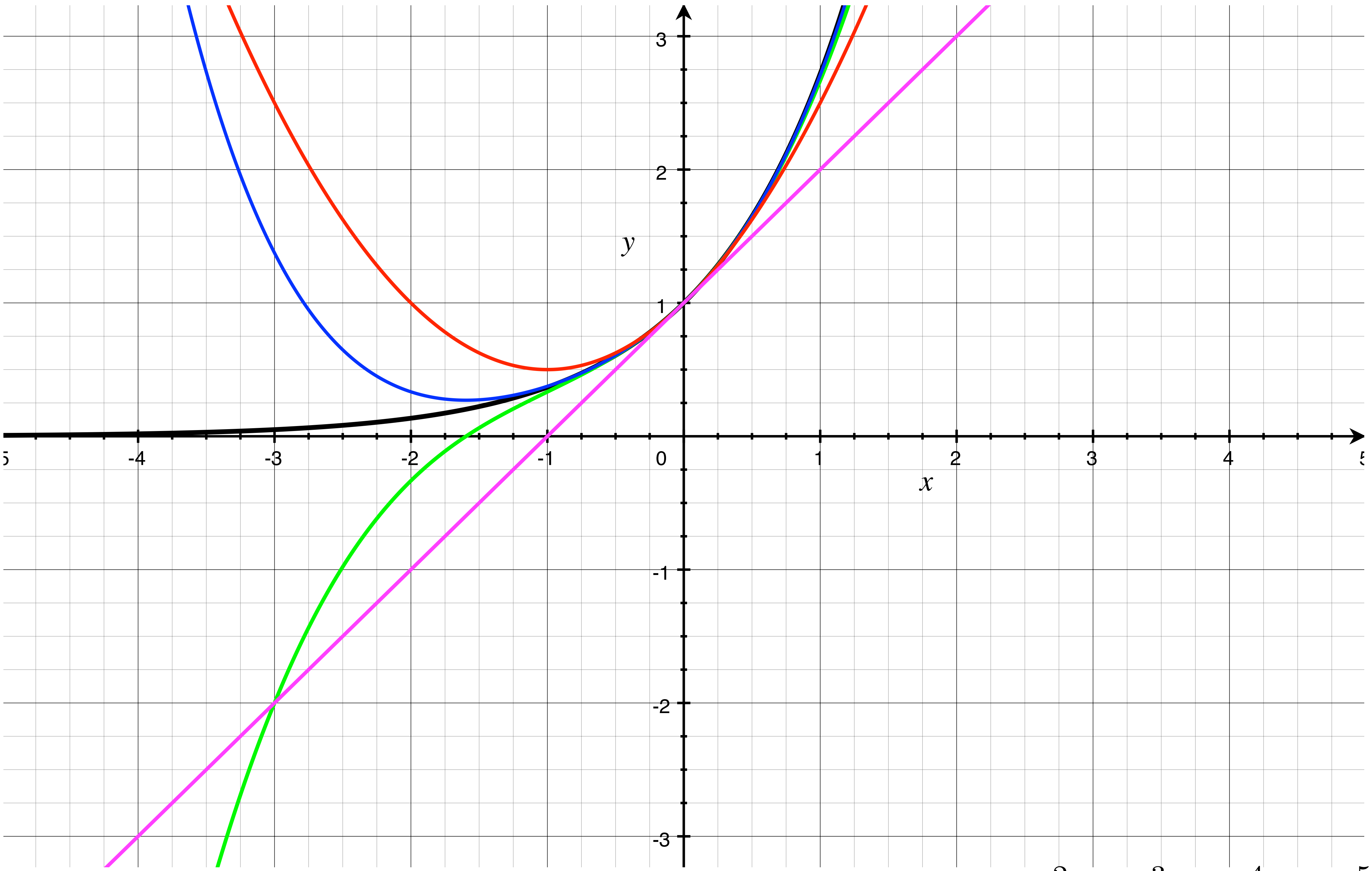
$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

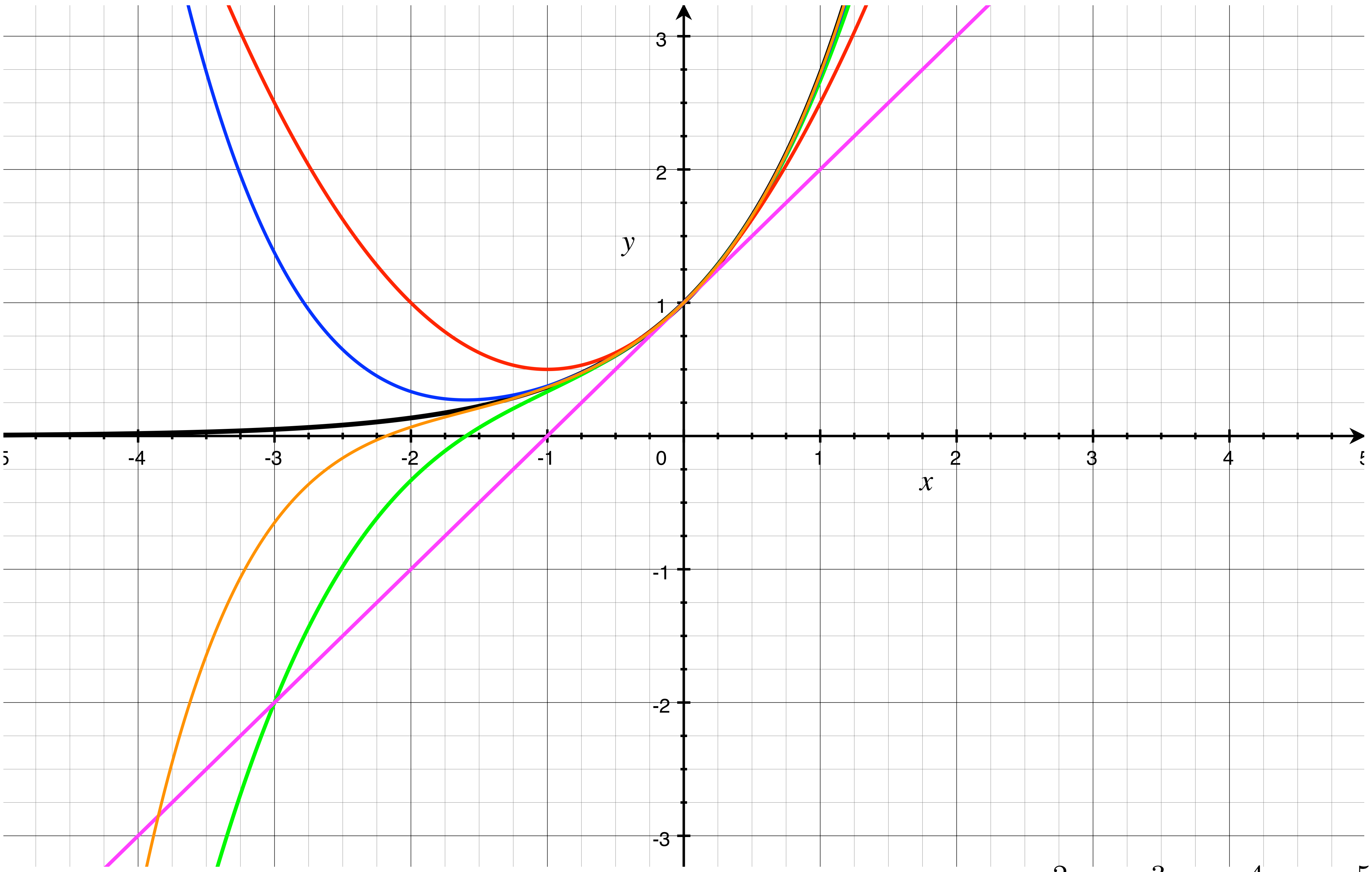
$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

$y = e^x$



$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

III.11. Taylorův polynom

Věta (Taylorova): Nechť funkce f má derivace až do řádu $n+1$ (včetně) v otevřeném intervalu (a,b). Nechť bod x_0 je vnitřním bodem tohoto intervalu. Potom pro každé $x \in (a,b)$ existuje bod $\xi \in (x,x_0)$ tak, že

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

- funkce $R_{n+1}(x)$ představuje tzv. *Lagrangeův tvar zbytku.*

Definice: Nechť funkce f je v bodě x_0 neomezeně diferencovatelná. Řadu

$$T^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovým rozvojem* funkce f se středem v bodě x_0.

III.11. Taylorův polynom

Příklady:

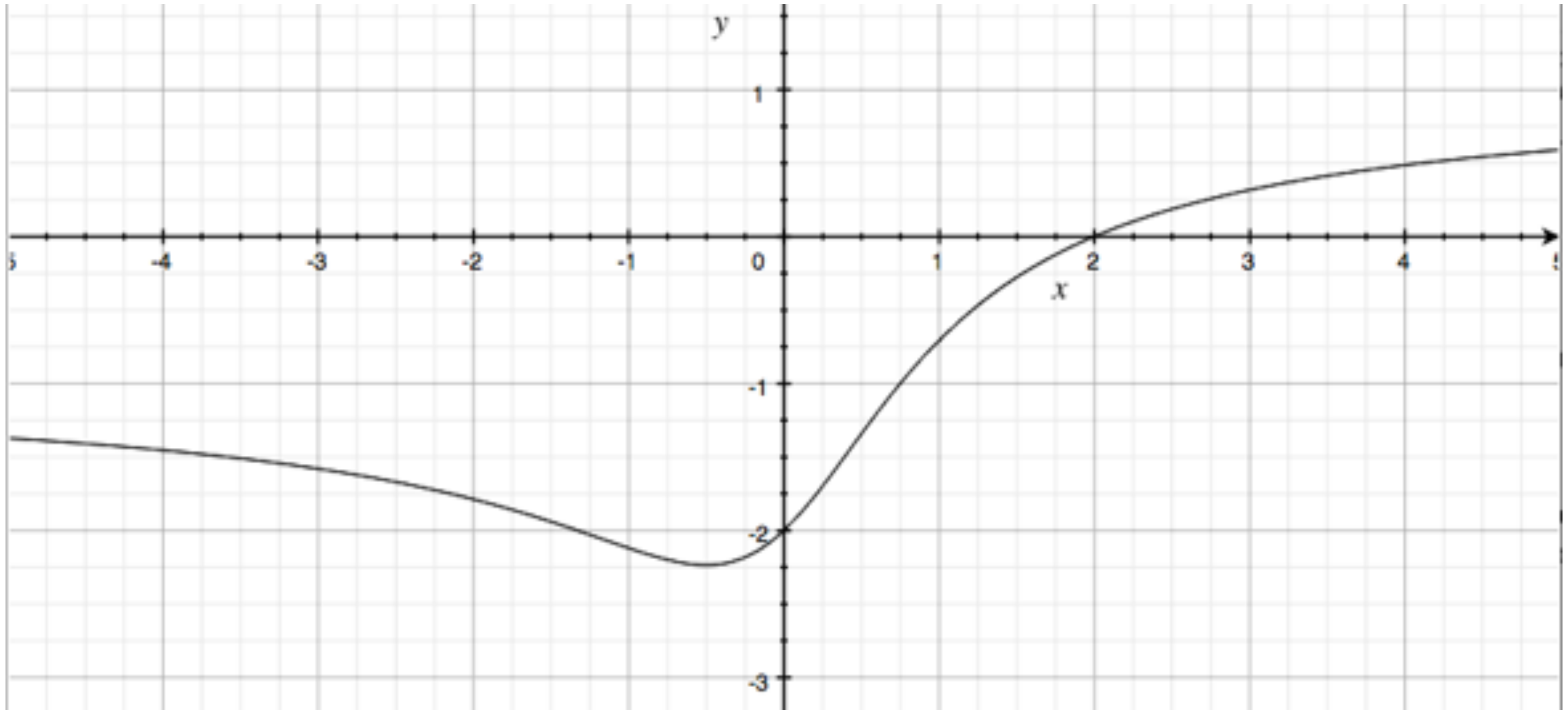
1) Určete průběh funkce $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce $y = \dfrac{\mathrm{tg}(x)}{x}$ v $x_0=0$

3) Určete hodnotu ln(1,182) s přesností 10^{-3} (přesně 0,1672079)

4) Najděte všechny kořeny rovnice $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$

$\ln x + 5 = x$



III.11. Numerické řešení nelineárních rovnic

Kořen rovnice: bod $\xi \in D(f)$, pro který platí $f(\xi) = 0$

Hledání kořenů metodou *postupných aproximací* (iterační metoda):

(i) provedeme *separaci kořenů*

(ii) zvolíme *počáteční aproximaci* x_0

(iii) postupně vytváříme *iterační posloupnost* $\{x_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, kde ξ je kořenem rovnice $f(\xi) = 0$

(iv) pro každý člen iterační posloupnosti provedeme *odhad chyby* γ_n takový, že $\gamma_n \geq | x_n - \xi |$ a $\gamma_n \to 0$

(v) iteraci ukončíme pokud chyba klesne pod předem stanovenou mez ε

III.11. Numerické řešení nelineárních rovnic

Metoda půlení intervalu

(i) provedeme separaci kořene => počáteční interval $\langle a,b \rangle$ takový, že $f(a).f(b) < 0$

(ii) zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = (a+b)/2$

(iii) pokud je $f(a).f(x_n) < 0$, zvolíme $b = x_n$, jinak $a = x_n$,

(iv) opakujeme (iii) dokud $| a - b | \leq \varepsilon$

(v) iteraci ukončíme pokud chyba klesne pod předem stanovenou mez ε

Metoda tečen (Newtonova metoda)

(i) provedeme separaci kořene => najdeme počáteční interval $\langle a,b \rangle$ takový, že
- $f(a).f(b) < 0$,
- funkce f má ve všech bodech $\langle a,b \rangle$ druhou derivaci, f'' která zde nemění znaménko a
- f' je na celém intervalu nenulová

III.11. Numerické řešení nelineárních rovnic

Metoda tečen (Newtonova metoda)

(i) provedeme separaci kořene => najdeme počáteční interval $\langle a,b\rangle$ takový, že
- $f(a).f(b) < 0$,
- funkce f má ve všech bodech $\langle a,b\rangle$ druhou derivaci, f'' která zde nemění znaménko a
- f' je na celém intervalu nenulová

(ii) zvolíme počáteční aproximaci x_0 takovou, že $f(x_0).f''(x_0) \geq 0$ (můžeme volit jeden z krajních bodů a nebo b)

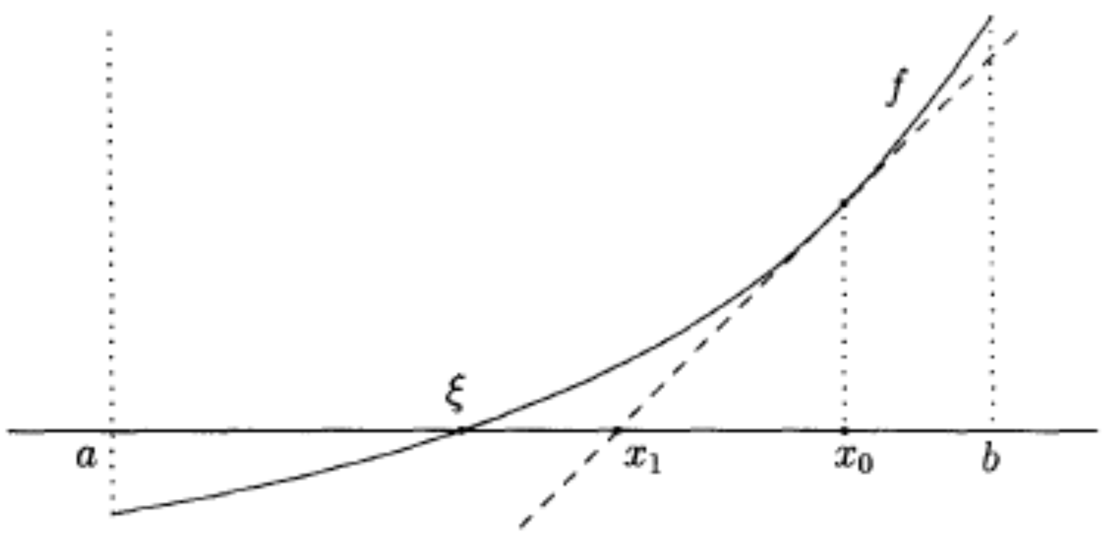
Metoda tečen (Newtonova metoda)

(i) provedeme separaci kořene => najdeme počáteční interval $\langle a,b \rangle$ takový, že

- $f(a).f(b) < 0$,
- funkce f má ve všech bodech $\langle a,b \rangle$ druhou derivaci, f'' která zde nemění znaménko a
- f' je na celém intervalu nenulová

(ii) zvolíme počáteční aproximaci x_0 takovou, že $f(x_0).f''(x_0) \geq 0$ (můžeme volit jeden z krajních bodů a nebo b)

(iii) položíme $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$



III.11. Numerické řešení nelineárních rovnic

Metoda tečen (Newtonova metoda)

(i) provedeme separaci kořene => najdeme počáteční interval $\langle a,b\rangle$ takový, že

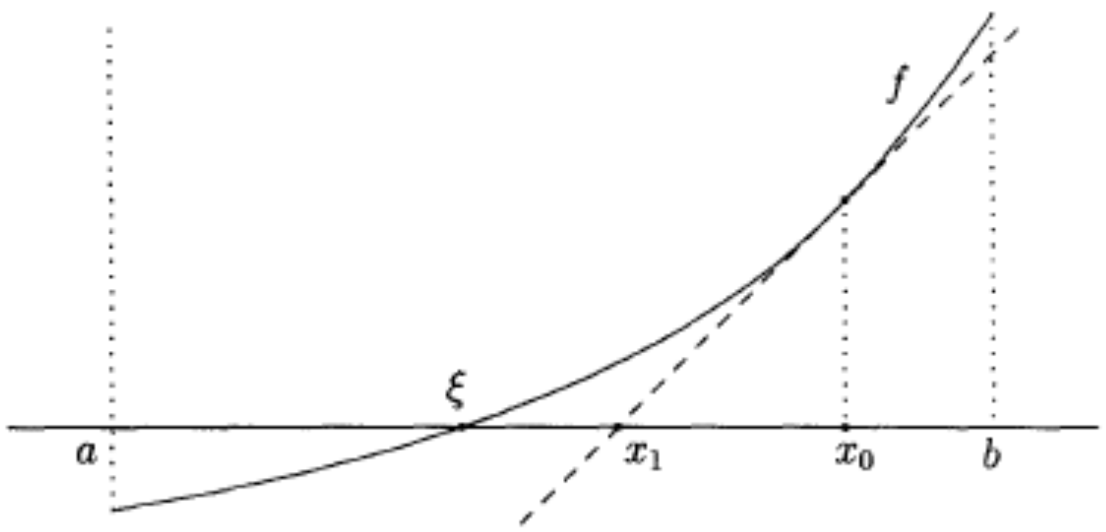
- $f(a).f(b) < 0$,
- funkce f má ve všech bodech $\langle a,b\rangle$ druhou derivaci, f'' která zde nemění znaménko a
- f' je na celém intervalu nenulová

(ii) zvolíme počáteční aproximaci x_0 takovou, že $f(x_0).f''(x_0) \geq 0$ (můžeme volit jeden z krajních bodů a nebo b)

(iii) položíme $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$

(iv) opakujeme (iii) dokud nedosáhneme

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{t\in\langle a,b\rangle} |f'(t)|} \leq \epsilon$$



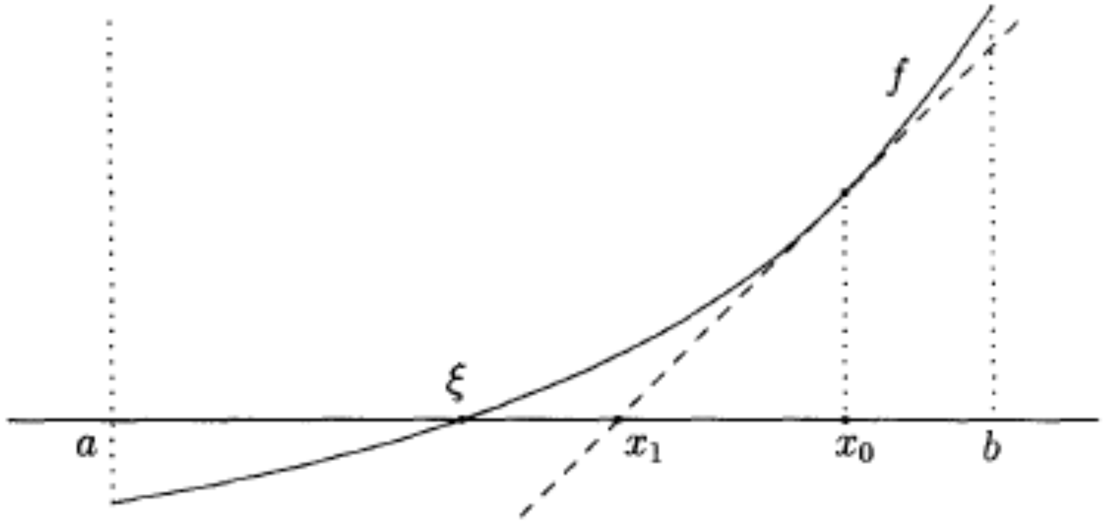
III.11. Numerické řešení nelineárních rovnic

Metoda tečen (Newtonova metoda)

(i) provedeme separaci kořene => najdeme počáteční interval $\langle a,b \rangle$ takový, že
- $f(a).f(b) < 0$,
- funkce f má ve všech bodech $\langle a,b \rangle$ druhou derivaci, f'' která zde nemění znaménko a
- f' je na celém intervalu nenulová

(ii) zvolíme počáteční aproximaci x_0 takovou, že $f(x_0).f''(x_0) \geq 0$ (můžeme volit jeden z krajních bodů a nebo b)

(iii) položíme $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$



(iv) opakujeme (iii) dokud nedosáhneme

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{t\in\langle a,b\rangle} |f'(t)|} \leq \epsilon$$

(v) iteraci ukončíme pokud chyba klesne pod předem stanovenou mez ε