MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

IV. Základy integrálního počtu

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

IV. Integrální počet

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál
IV.2. Výpočet neurčitého integrálu
IV.3. Integrace substitucí
IV.4. Integrace racionální funkce
IV.5. Vybrané speciální substituce
IV.6. Riemanův integrál
IV.7. Výpočet Riemanova integrálu
IV.8. Aplikace Riemanova integrálu
IV.9. Nevlastní integrál
1V.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

Matematika I.

IV. Integrální počet

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice: Jsou-li F a f funkce definované na intervalu I s krajními body $a,\ b \in \mathbf{R}^*$ a platí, že

a) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$,

b) $F_+'(x) = f(a)$ pokud $a \in I$,

c) $F_-'(x) = f(b)$ pokud $b \in I$,

nazýváme funkce $F(x)$ *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na intervalu I.

Věta (o existenci primtivní funkce): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak k funkci f existuje v intervalu I primitivní funkce.

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + C$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $C = G(x) - F(x)$
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu I, potom je součet $F(x) + G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) + g(x)$ v intervalu I

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* funkce f v intervalu I.

$$\int f(x)dx, \quad x \in I \qquad \int f(x)dx \qquad \int f dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I$$

integrační konstanta

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Věta (o linearitě integrálu): Jsou-li *f* a *g* funkce integrovatelné v intervalu I a *a, b* ∈ **R** jsou libovolné reálné konstanty, potom platí

$$\int \big(a.f(x) + b.g(x)\big)dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx + C.$$

Speciálně platí, že: $\int a.f dx = a \int f dx,$

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx.$$

Věta (o integraci per-partes): Jsou-li *f* a *g* funkce spojitě diferencovatelné funkce v intervalu I, pak v tomto intervalu platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

$$(f.g)' = f'g + fg' \quad \Rightarrow \quad f.g = \int f'g dx + \int fg' dx \quad \Rightarrow \quad \text{tvrzení věty}$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C,\quad a \neq -1,\ x \in \mathbf{R},$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ x \neq -1$$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}.$

c) Logaritmické funkce: $\int \log_a x dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C,\ a > 0,$
$a \neq 1$, x>0.

d) Goniometrické funkce: $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C,\quad x \in \mathbf{R},$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C,\ x \in \mathbf{R}.$$

e) Cyklometrické funkce: $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,\quad x \in (-1, 1).$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \;= -\arccos x + D.$$

d) $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C \quad = -\mathrm{arccotg} x + D.$$

Příklady: $$\int (x^2+3x-2)e^x dx, \qquad \int \cos^2 x dx, \qquad \int e^x \sin x dx,$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, \qquad \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1} dx, \qquad \int \mathrm{tg} x dx$$

IV.3. Integrace substitucí

Věta (o integraci substitucí): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu I a funkce $x = g(t)$ je spojitě diferencovatelná v intervalu J a je $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Potom platí

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$$

pro $x \in \mathrm{I}$, $t \in \mathrm{J}$.

Tuto větu lze použít oběma směry: “zleva doprava” (substituční metoda I) i “zprava doleva” (substituční metoda 2):

: $\int x\sqrt{4 - x^2}dx$

- Obvykle jednodušší, bývá “vidět” na první pohled.
- Musíme určit $f(g)$, $g(t)$ a $g'(t)$.
- Uděláme substituci: $g(t)=x$, $g'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.
- Nakonec provedeme zpětnou substituci: $t=g^{-1}(x)$

: $\int \sqrt{4 - x^2}dx$

- Je komplikovanější v tom, že ji musíme “nalézt”.
- Musíme určit substituci ve tvaru: $x=g(t)$, $\mathrm{d}x=g'(t)\mathrm{d}t$
- Po zintegrování provedeme zpětnou substituci: $t=g^{-1}(x)$

IV.4. Integrace racionální funkce

Věta (o rozkladu polynomu): Nechť $Q_m(x)$ je mnohočlen stupně $m > 1$. Potom

i) je-li α k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak $Q_m(x) = (x-\alpha)^k . U_{m-k}(x)$

ii) je-li β k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak tato funkce má i k-násobným komplexně sdružený kořen γ a platí $Q_m(x) = (x-\beta)^k (x-\gamma)^k . U_{m-2k}(x) = (x^2 + px + q)^k . U_{m-2k}(x)$, kde $x^2 + px + q = (x-\beta)(x-\gamma)$.

Je-li $Q_3(x) = rx^3 + sx + t$ polynom stupně 3, potom jsou pouze čtyři možnosti:

i) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

ii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)^2$,

iii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)^3$,

iv) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x^2 + p\mathrm{x} + q)$

Příklad: Najděte kořeny rovnice $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

IV.4. Integrace racionální funkce

Racionální (lomená) funkce: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Pokud je $n \geq m$, pak lze $f(x)$ rozdělit na polynom stupně m-n a ryze racionální funkci: $f(x) = R_{n-m}(x) + \dfrac{S_k(x)}{Q_m(x)}, \qquad k < m.$

Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky):

Nechť $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je ryze racionální funkce.

i) je-li x_0 k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak existují konstanty $A_1, \dots, A_k$ a polynomy $P^*_{n-k}(x)$ a $Q^*_{m-k}(x)$ tak, že

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-x_0)^k} + \frac{P^*_{n-k}(x)}{Q^*_{m-k}(x)}$$

ii) je-li x_1 k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak existují konstanty $B_1, \dots, B_k$, $C_1, \dots, C_k$ a polynomy $P^*_{n-2k}(x)$ a $Q^*_{m-2k}(x)$ tak, že

$$f(x) = \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 + C_2 x}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_k + C_k x}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P^*_{n-2k}(x)}{Q^*_{m-2k}(x)}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

(tři reálné různé kořeny)

$$ii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

(dva reálné různé kořeny, jeden dvojnásobný)

$$iii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

(jeden reálný trojnásobný kořen)

$$iv) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$$

(jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny)

IV.4. Integrace racionální funkce

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$\int \frac{3}{x^3-7x+6}dx$$

$$\int \frac{2x^2+1}{2(x+1)^3}dx$$

$$\int \frac{x-1}{4x^3+4x^2+-7x+2}dx$$

$$\int \frac{x^3+5}{x^3+2x^2+3x}dx$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $\displaystyle\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx$

Příklady: $\displaystyle\int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx$

2) $\displaystyle\int R\big(\sin(x),\cos(x)\big)\,dx \qquad t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

Příklady: $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ $\qquad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Příklady: $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\, dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\, dx, \quad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\, dx$

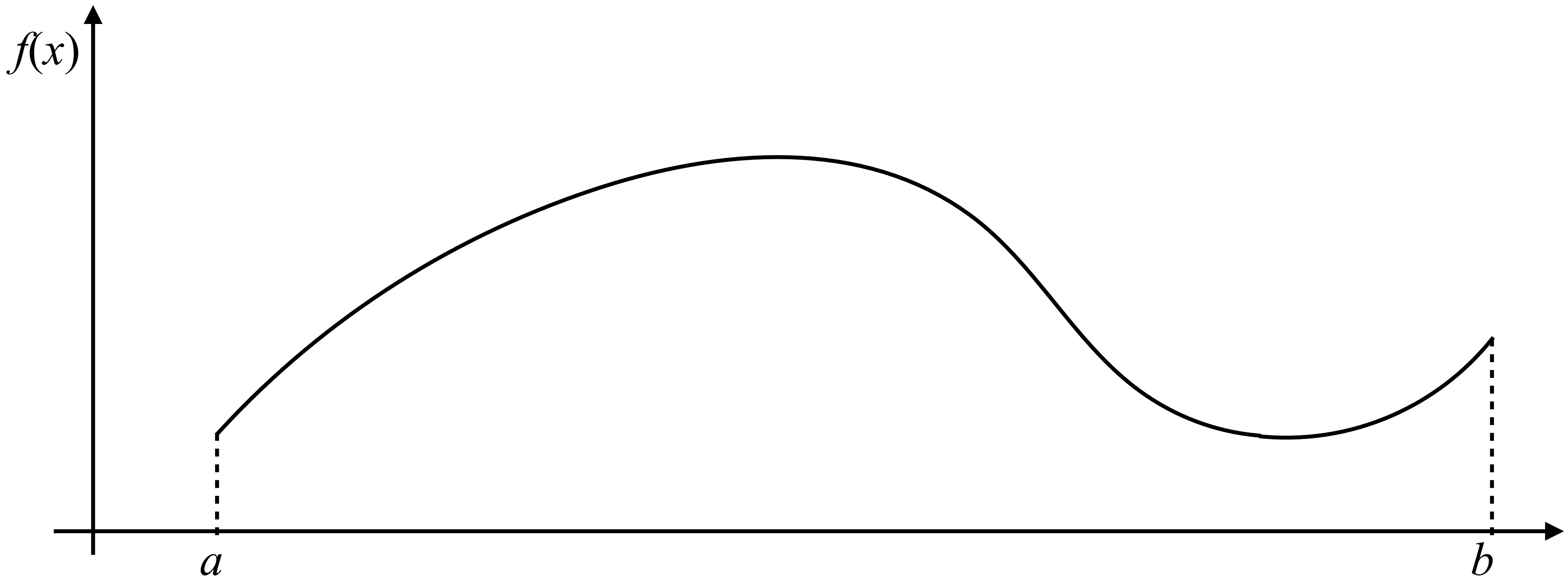
4) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ $\qquad a < 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$$

Příklady: $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\, dx$

IV.6. Riemanův integrál

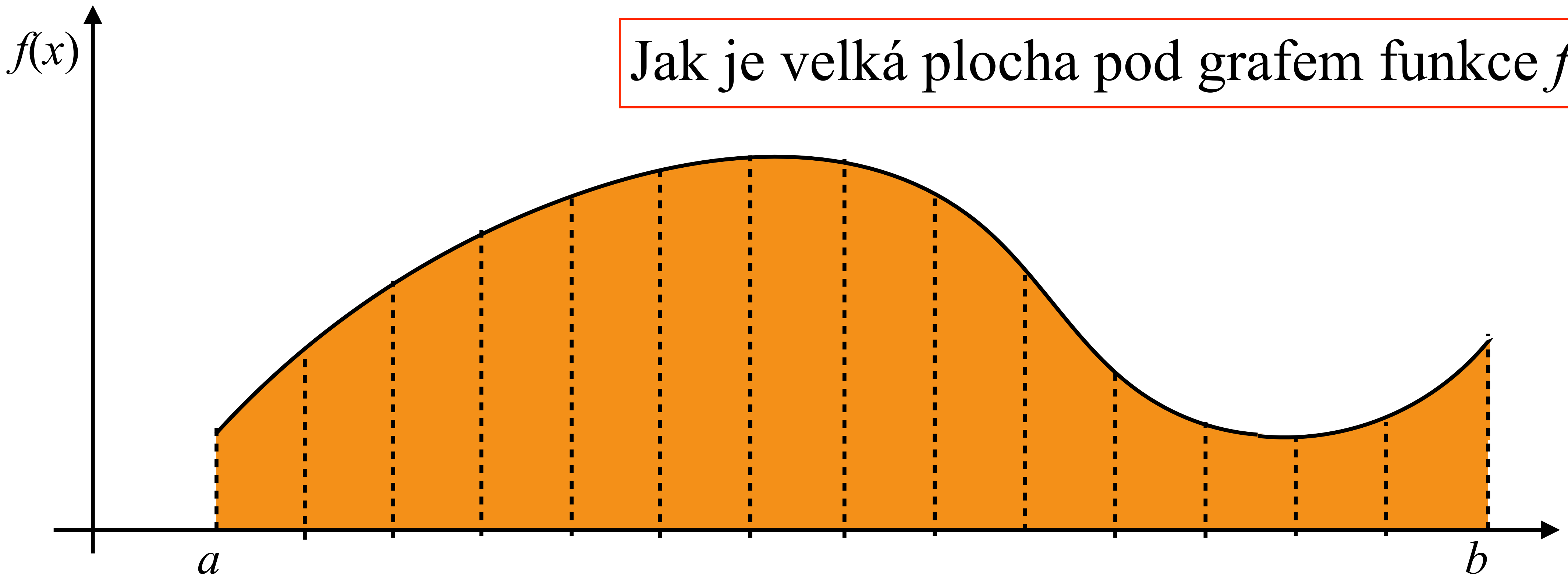
Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



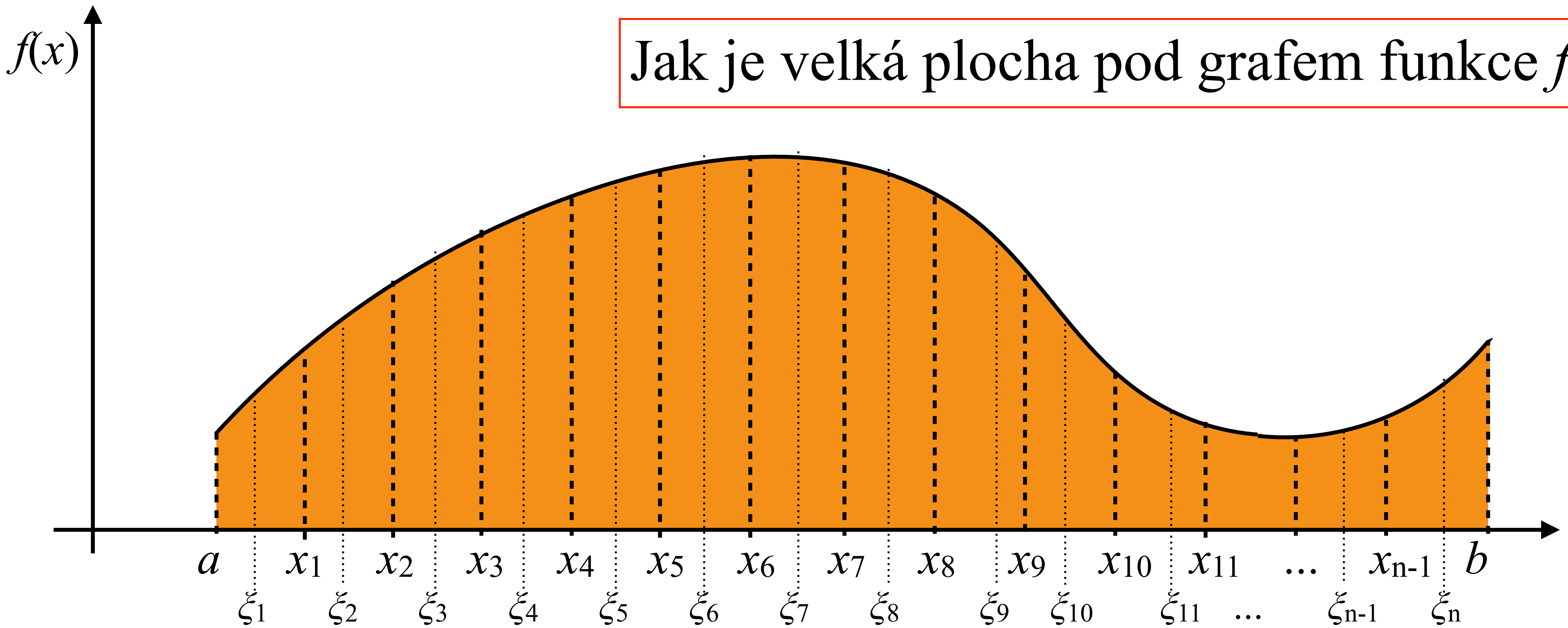
Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1}\ ; i = 1, \ldots, n\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f?



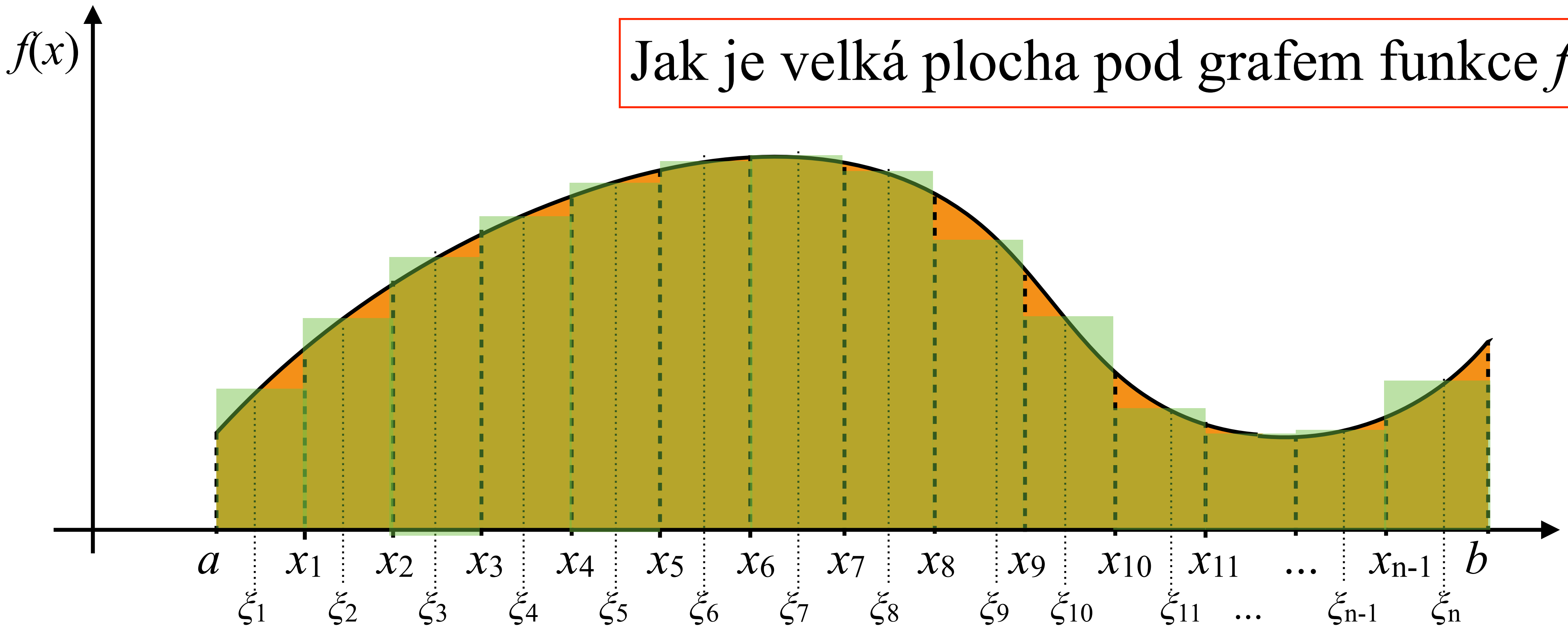
Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \;; i = 1, \ldots, n\}$

výběr z intervalu $\langle a,b\rangle$: $V = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n : \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle, i=1,\ldots, n\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1}\ ; i = 1, \ldots, n\}$

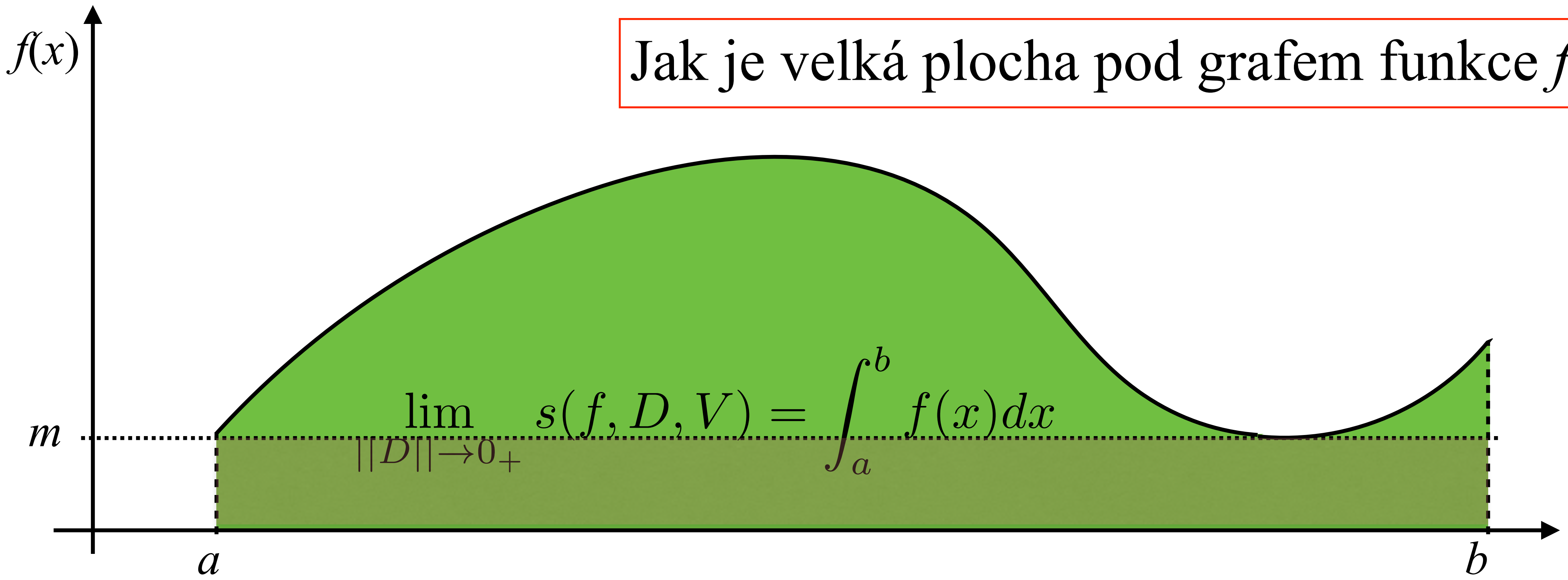
výběr z intervalu $\langle a,b\rangle$: $V = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n :\ \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle,\ i=1, \ldots, n\}$

Riemanův součet: $$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce *f* ?



$$\lim_{||D|| \to 0_+} s(f, D, V) = \int_a^b f(x)dx$$

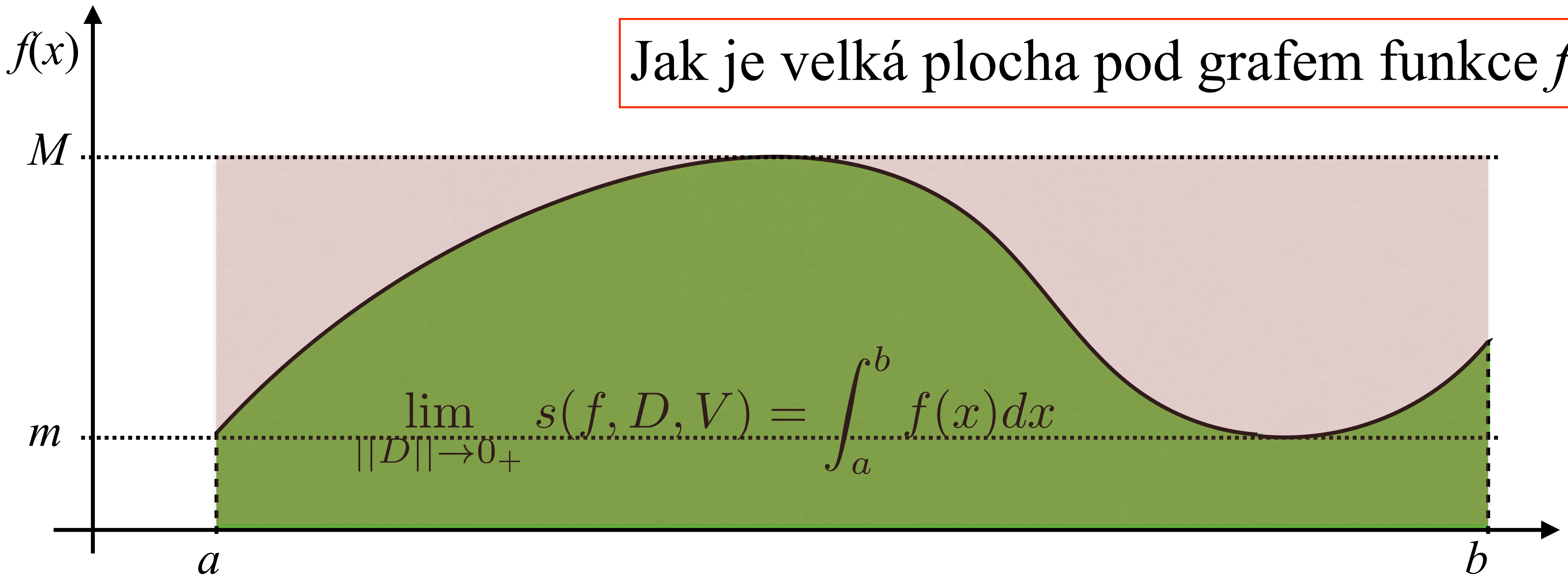
$m =$ minimum funkce *f* na intervalu $\langle a, b \rangle$ => $(b-a).m \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Riemanův součet: $$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



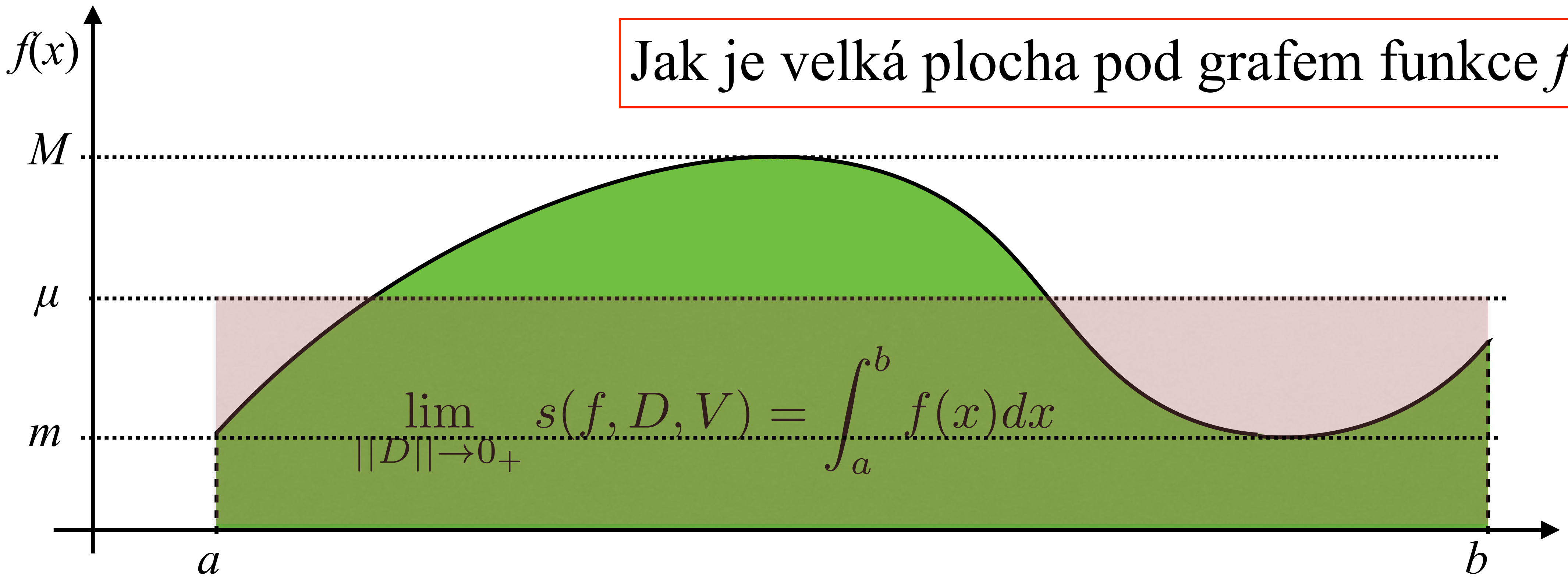
$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

Riemanův součet: $s(f,D,V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

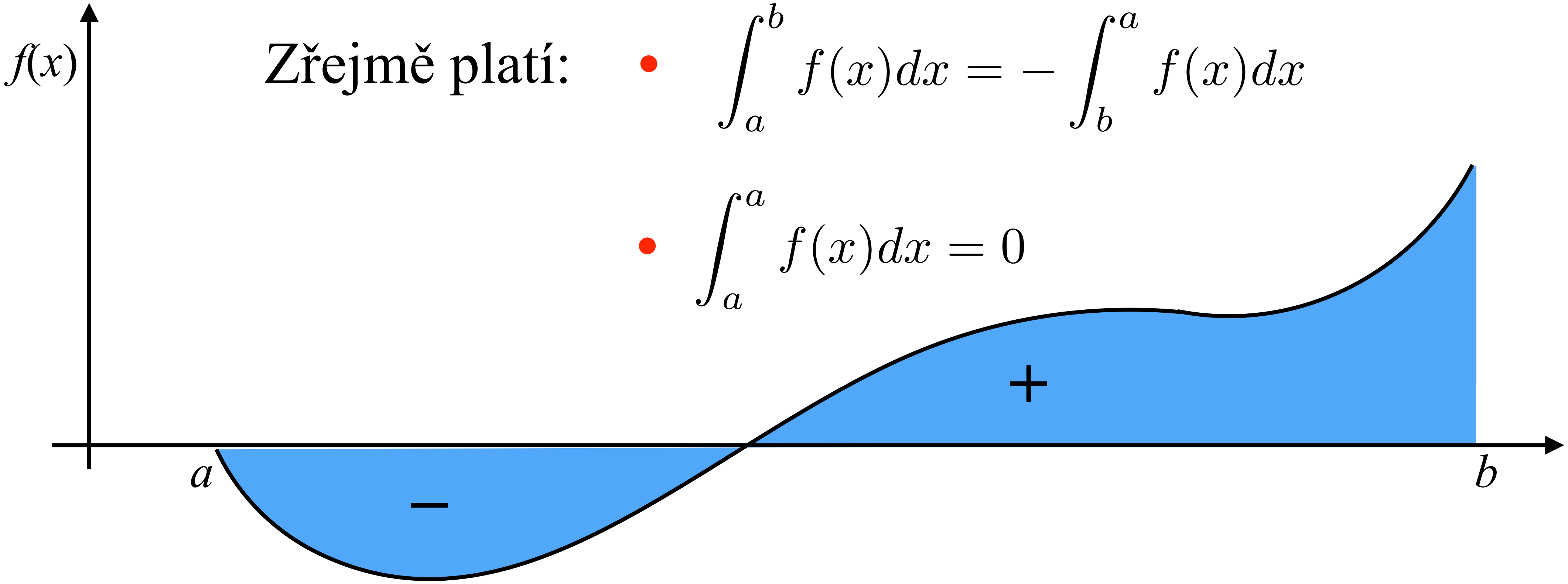
$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu$$

μ je tzv. *střední hodnota* integrálu funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$

IV.6. Riemanův integrál

$\int_a^b f(x)dx =$ plocha mezi grafem funkce a osou x nad intervalem $\langle a,b \rangle$



Zřejmě platí:

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- $$a \le c \le b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(linearita vzhledem k mezím)

- $$\int_a^b \big(r.f(x) + s.g(x)\big)dx = r.\int_a^b f(x)dx + s.\int_a^b g(x)dx, \quad r,s \in R$$

(linearita vzhledem k funkci)

IV.6. Riemanův integrál

Věta (o existenci Riemanova integrálu): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom existuje Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

Říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Věta: Nechť jsou funkce f a g obě integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$.

a) Je-li $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, potom jsou tyto funkce integrovatelná také v intervalu $\langle c,d\rangle$.

b) Liší-li se funkce f a g v intervalu $\langle a,b\rangle$ pouze v konečně mnoha bodech, potom je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

c) Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$, potom je také

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (Newtonova-Leibnitzova formule): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^1 (4x^3 + 2x - 5)dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1+4x}}dx,$$

Věta (o integraci per partes): Nechť funkce f a g mají spojité derivace v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

$$\int_0^2 x.e^{2x}dx, \qquad \int_0^\pi sin^2(x)dx,$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (o integraci substitucí): Nechť funkce g má spojitou derivaci v intervalu $\langle a,b\rangle$ a zobrazuje $\langle a,b\rangle$ do intervalu J. Nechť funkce f je spojitá v J. Potom

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \, dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin 4x \, dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{4-x^2}dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1+4x}}dx,$$

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce *f* je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

Platí:

- Funkce $P(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$.
- Ve všech bodech $x \in \langle a,b\rangle$ ve kterých je funkce *f* spojitá je $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)dt = f(x).$
- Je-li $f(x)$ spojitá v intervalu I, potom funkce $P(x)$ je její primitivní funkcí v I.
- Je-li $f(x)$ spojitá, $g(x)$ a $h(x)$ jsou diferencovatelné v intervalu I, potom pro $x \in$ I platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f\big(h(x)\big).h'(x) - f\big(g(x)\big).a'(x)$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (plošný obsah oblasti ohraničené křivkami): Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^2$ ohraničená grafy spojitých funkcí f a g nad intervalem $\langle a,b\rangle$: $O=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2: g(x) \le y \le f(x),\ x\in\langle a,b\rangle\}$. Potom plošný obsah této oblasti je dán vztahem

$$P(O) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

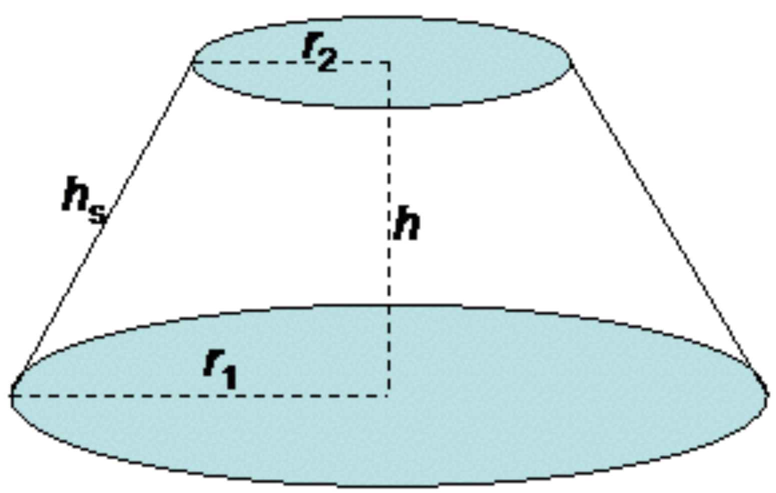
Příklad: Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami f: $y = 1 - x^2$ a g: $y = x^2$.

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (objem rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom objem tělesa T je dán vztahem

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Příklad: Odvoďte vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

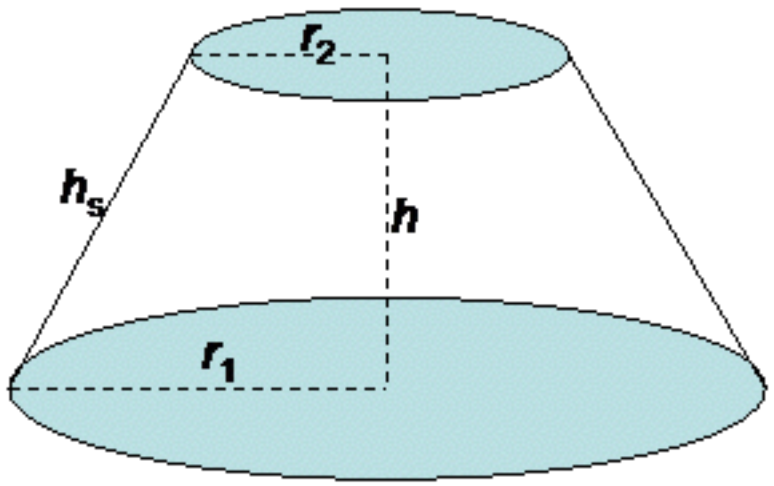


IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (povrch pláště rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom povrch pláště rotačního tělesa T je dán vztahem

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

Příklad: Odvoďte vzorec pro povrch pláště komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.



IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (délka části grafu funkce): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ je rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

Hmotnost homogenní rovinné křivky:

$$m = \rho \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

Statické momenty homogenní rovinné křivky:

$$m_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

Souřadnice těžiště homogenní rovinné křivky:

$$x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}.$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenní rovinné plochy:

$$m = \rho \int_a^b f(x)dx$$

Statické momenty homogenní rovinné plochy:

$$m_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^2(x)dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x f(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenní rovinné plochy:

$$x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}.$$

Momenty setrvačnosti homogenní rovinné plochy:

$$J_x = \frac{\rho}{3} \int_a^b f^3(x)dx, \quad J_y = \rho \int_a^b x^2 f(x)dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenního rotačního tělesa:

$$m = \rho\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Statické momenty homogenního rotačního tělesa:

$$m_{xx} = m_{xy} = 0, \quad m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x f^2(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenního rotačního tělesa:

$$x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = z_T = 0.$$

Momenty setrvačnosti homogenního rotačního tělesa vzhledem k ose rotace:

$$J_x = \frac{\rho\pi}{2} \int_a^b f^4(x)dx.$$

IV. 9. Nevlastní integrál

Riemannův integrál jako funkce horní meze. Nevlastní Riemannův integrál.

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

Numerický výpočet Riemannova integrálu, lichoběžníková metoda.