

týden

- Vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů, dimenze, báze, podprostor. Speciálně, prostory  $R^n$ ,  $E_n$  a  $V(E_n)$ . Operace s vektory ve  $V(E_n)$  (sčítání a odčítání vektorů, násobení vektoru reálným číslem, skalární součin dvou vektorů).

Matice typu  $m \times n$ , matice transponovaná, trojúhelníková, čtvercová, jednotková.
- Rovnost dvou matic, operace s maticemi (jejich součet, rozdíl, násobení matice reálným číslem, součin dvou matic). Hodnost matice. Určení hodnosti konkrétní matice (včetně matic s parametry).

Determinant čtvercové matice. Vlastnosti a výpočet determinantů. Regulární a singulární matice. Inverzní matice, podmínky pro její existenci, její výpočet. Úlohy s parametry.
- Soustava lineárních algebraických rovnic (souřadnicový i maticový zápis). Gaussova eliminační metoda. Frobeniova věta. Existence a počet řešení homogenní i nehomogenní soustavy, struktura množiny všech řešení. Cramerovo pravidlo. Řešení soustav lineárních rovnic s parametry.

Vlastní číslo a vlastní vektor čtvercové matice, geometrický význam. Charakteristická rovnice čtvercové matice. Nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů konkrétní matice pro  $n = 2$ ,  $n = 3$ .
- Množina reálných čísel  $R$ , rozšířená množina reálných čísel  $R^*$ , operace a uspořádání v množině  $R^*$ . Různé typy okolí bodů v  $R^*$ . Posloupnost reálných čísel, posloupnost shora omezená, zdola omezená, omezená, rostoucí, klesající.

Limita posloupnosti. Základní věty o limitách posloupností (aritmetické operace, sevřená posloupnost, vybraná posloupnost), použití při výpočtu limit posloupností.

*Shrnutí a doplnění pojmů ze střední školy (viz též 3. cvičení):* Funkce jedné reálné proměnné, definiční obor, obor hodnot, graf. Zúžení (restrikce) funkce. Funkce sudá, lichá, periodická. Složená funkce. Inverzní funkce. Funkce shora omezená, zdola omezená, omezená, rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, monotónní, ryze monotónní. Přehled základních funkcí: mocninná, polynom,  $n$ -tá odmocnina, lineární lomená, exponenciální, logaritmická, goniometrické.
- Funkce cyklometrické.

Limita funkce (vlastní i nevlastní, ve vlastním i v nevlastním bodě). Limita zprava, limita zleva. Základní věty o limitách funkcí. Limita složené funkce. Výpočet jednodušších limit.

Spojitosť funkce v bodě, spojitost zprava a zleva. Spojitosť funkce na intervalu. Věty o spojitosti součtu, rozdílu, součinu, podílu dvou funkcí. Věta o spojitosti složené funkce a věta o spojitosti inverzní funkce. Věta o nabývání mezíhodnot (Darbouxova věta) a věta o existenci maxima a minima spojitě funkce na omezeném uzavřeném intervalu.
- Derivace funkce v bodě  $x_0$ , derivace zprava a zleva, nevlastní derivace. Geometrická i fyzikální interpretace pojmu derivace. Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$ . Přibližné řešení rovnice  $f(x) = 0$  (informativně).

Souvislost existence derivace funkce a její spojitosti v bodě a na intervalu. Vzorce pro derivace elementárních funkcí (příklady odvození).

Věty o derivaci součtu a rozdílu dvou funkcí, násobku funkce reálným číslem, součinu a podílu dvou funkcí.

Věty o derivaci složené funkce, inverzní funkce. Použití na konkrétních příkladech.

Derivace vyšších řádů.

Diferenciál funkce v bodě, jeho geometrický význam, použití k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Věta o střední hodnotě (Lagrangeova), grafické znázornění. L'Hospitalovo pravidlo.

7. Souvislost znaménka první derivace a průběhu funkce na intervalu.  
Lokální extrémů funkce, souvislosti s první a druhou derivací. Nalezení lokálních extrémů konkrétních funkcí.  
Globální extrémů spojité funkce na intervalu. Nalezení globálních extrémů konkrétních funkcí.
8. Konvexní a konkávní funkce na intervalu. Inflexní bod. Souvislost znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) funkce na intervalu. Nalezení inflexních bodů konkrétních funkcí.  
Asymptoty. Vyšetření průběhu funkce.
9. Křivost, osculační kružnice.  
Taylorův polynom (speciálně MacLaurinův polynom) stupně  $n$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$ . Odvození vzorců pro koeficienty Taylorova polynomu. Taylorova věta, Lagrangeův tvar zbytku. Aproximace jednodušších funkcí Taylorovými polynomy.  
Primitivní funkce, neurčitý integrál. Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce a neurčitého integrálu na intervalu. Základní (tzv. tabulkové) neurčité integrály.  
Věta o integraci per-partes. Použití na jednodušších příkladech.
10. Věta o integraci substitucí. Použití této věty (tzv. 1. a 2. substituční metoda). Výpočet jednodušších neurčitých integrálů pomocí různých substitucí.  
Racionální funkce, rozklad na součet parciálních zlomků.  
Integrace racionální funkce s polynomem stupně nejvýše 3 ve jmenovateli.
11. Integrace funkcí typu  $\sin^m x \cdot \cos^n x$ .  
Integrace iracionálních funkcí typu  $R(x, \sqrt[n]{(ax + b)/(cx + d)})$ .  
Riemannův integrál, geometrická a fyzikální interpretace, základní vlastnosti.  
Newtonova–Leibnizova formule. Střední hodnota funkce na intervalu.  
Metoda per-partes pro Riemannův integrál.
12. Substituční metoda pro Riemannův integrál.  
Aplikace Riemannova integrálu: obsah plochy, objem rotačního tělesa, délka křivky.  
Riemannův integrál jako funkce horní meze. Nevlastní Riemannův integrál.
13. Numerický výpočet Riemannova integrálu, lichoběžníková metoda. Opakování a shrnutí látky.

## Matematika I – akademický rok 2012/13, plán cvičení

Pokud není uvedeno jinak, jsou čísla úloh uvedena z [2], tj. **Vybrané příklady** ze skript Sbíрка příkladů z Matematiky I (2006). Ve sbírce z dřívějších vydání je číslování úloh až do čísla 359 shodné, úlohy od čísla 575 mají ve starších skriptech číslo o 198 menší než v [2].

Výrazné doporučení studentům: Samostatně řešit úlohy ze zkoušek 2009 až 2012 - viz soubor [3].

týden

1. Základní informace o předmětu, požadavky k zápočtu. Vstupní test.  
Procvičení důležitých okruhů SŠ matematiky: Mocniny, úpravy výrazů. Řešení jednoduchých rovnic a nerovnic. Definiční obor funkcí. Úlohy: č. 657, 660, 664, 667, 668.
2. "Základní" funkce: mocninná, lineární, kvadratická, n-tá odmocnina, logaritmické, exponenciální, goniometrické (definiční obor, spojitost, graf, limity v krajních bodech). Vlastnosti funkcí (sudá, lichá, periodická). Funkce složená. Funkce inverzní.  
Vektory v  $E_2$  a v  $E_3$ , jejich geometrická interpretace. Počítání s vektory. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů. Dimenze a báze vektorového prostoru. Úlohy: č. 687, 694, 695, 698, 704, 707, 674, 675, 678, 679, 709, 723, 727, 733, 734, 2, 8, 15, 22, 25, 42 – 45, 73, 85.
3. Operace s maticemi. Hodnota matice. Determinanty. Inverzní matice. Lineární závislost, nezávislost vektorů, báze (úlohy řešené pomocí matic, resp. determinantů). Úlohy s parametry. Úlohy: č. 51, 53, 68 – 70, 79, , 109, 111, 112, 117, 124, 132, 139, 143, 148, 149, 160, 161, 166, 168, 171, 174– 177, 180, 185, 190, 200.
4. Soustavy lineárních algebraických rovnic (homogenní, nehomogenní). Frobeniova věta. Cramerovo pravidlo. Geometrická interpretace (vzájemná poloha rovin, přímek).  
Úlohy: č. 273, 275, 287, 288, 295, 308, 310, 317, 324, 328, 332, 338, 370.
5. Soustavy lineárních rovnic s parametry. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic. Úlohy: č. 278, 280, 283, 300, 301, 348, 359, 360, 369, 236, 237, 241, 243, 245, 250, 252, 252, 256.
6. Posloupnosti reálných čísel a jejich limity. Sevřená posloupnost, vybraná posloupnost. Úlohy s faktoriály. Funkce cyklometrické. Limita funkce. Limita složené funkce.  
Úlohy: č. 575, 577 – 581, 591, 594, 596, 599, 609, 612, 618 – 623, 629, 637 – 639, 642, 648, 651, 654, 661, 718, 767, 791, 792, 796, 797, 807, 816, 839, 863 – 865, 902, 909, 929, 931, 932, 937, 939, 943.
7. Derivace funkce. Rovnice tečny a normály ke grafu funkce. Přibližný výpočet funkční hodnoty. Derivace složené funkce. L'Hospitalovo pravidlo.  
Úlohy: č. 837, 840, 859, 866, 869, 882, 891, 904, 960, 968, 972, 976, 979, 980, 990, 991, 993, 999, 1001, 1003, 1008, 1017–1021, 1027, 1028, 1047, 1049, 1062, 1066, 1071, 1109, 1110, 1118, 1119.
8. Intervaly monotónie a lokální extrémů funkce. Globální extrém. Úlohy: č. 1144 – 1146, 1151, 1156, 1160, 1209, 1211, 1164, 1169, 1174, 1175, 1177, 1179, 1204, 1209, 1211, 1241.
9. Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce. Inflexní body. Asymptoty. Průběh funkce. Úlohy: č. 1255, 1256, 1260, 1262, 1264, 1267, 1270, 1274, 1275, 1277, 1278, 1279, 1282, 1292, 1293, 1295, 1308, 1319, 1321.
10. Aproximace funkcí Taylorovými polynomy. Neurčité integrály – použití tabulkových integrálů, metoda per-partes. Úlohy: č. 1330, 1331, 1333, 1337, 1346, 1351, 1352, 1354, 1362, 1376, 1450, 1452, 1454, 1455, 1459, 1461, 1467, 1473, 1481–1486, 1494, 1504, 1506, 1510.
11. Neurčité integrály – substituční metoda. Integrace racionálních funkcí. Úlohy: č. 1514 – 1519, 1532 – 1534, 1542, 1546, 1555, 1572, 1620, 1628, 1720, 1724, 1731, 1733, 1734, 1748, 1749, 1751, 1754, 1755.
12. Integrace funkcí typu  $\sin^m x \cdot \cos^n x$ . Integrace iracionálních funkcí typu  $R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$ . Riemannův integrál, jeho výpočet. Newtonova–Leibnizova formule. Střední hodnota funkce na intervalu. Metoda per-partes pro Riemannův integrál.  
Úlohy: č. 1815, 1823, 1828, 1832, 1892, 1896, 1898, 1985, 1986, 1989, 1991–3, 1996, 2000, 2002.
13. Substituční metoda pro Riemannův integrál. Aplikace Riemannova integrálu: obsah plochy, objem rotačního tělesa, délka křivky. Nevlastní Riemannův integrál. Zápočet. Úlohy: č. 2010–12, 2015, 2017, 2020, 2024, 2030–32, 2036, 2038– 2040, 2044, 2050, 2051, 2054, 2056–8, 2060, 2063, 2067–2070, 2074, 2075, 2077 + Další příklady, č. 1 – 15. Skriptum [1], úlohy č. V.4.9: a – d, f – i, k, V.6.8: a, b, c, d, h.

## Matematika I – akademický rok 2012/13, plán seminářů

Plán seminářů se tematicky shoduje s plánem cvičení. Výuka v seminářích začíná ve druhém týdnu semestru. V seminářích budou mj. řešeny úlohy ze semestrálních zkoušek předmětu Matematika I z minulých let. V semináři typu B bude též průběžně opakována i související látka ze střední školy.

### Požadavky k zápočtům a ke zkoušce

**Cvičení:** Aktivní účast, omluvení absencí, vypracování zadaných prací, absolvování testů.

Vedoucí cvičení ohodnotí práci studenta na cvičení 0–16 body. Studentům, kteří si zapisují předmět Matematika I podruhé a zápočet již získali dříve, bude zápočet znovu zapsán, nikoliv však získané body. Chtějí-li tito studenti bodové hodnocení získat, musí cvičení absolvovat znovu.

**Semináře:** Alespoň 70 % prezence. Úspěšné vypracování závěrečného testu nebo seminární práce.

**Zápočty** ze cvičení nebo seminářů se udělují v posledním týdnu výuky, **nejpozději však v týdnu následujícím**. Později lze udělit zápočet pouze ve vyjímečných případech. Ve sporných případech rozhoduje o udělení zápočtu s konečnou platností vedoucí ústavu.

### Zkouška:

K bodům za zkouškový test se přičtou body přidělené vedoucím cvičení při zápočtu. **Podmínkou** pro úspěšné absolvování zkoušky je dosažení alespoň 50 bodů, z toho však **alespoň 40 bodů ze zkouškového testu**.

Úroveň zkoušky A nebo B si volí student sám, nejpozději však 2 dny před jejím konáním. Zkouška je písemná, předpokládá se však znalost pojmů vyjmenovaných v plánu přednášek a porozumění jejich vzájemným souvislostem. Rovněž se vyžaduje znalost vyjmenovaných vět (včetně předpokladů) a schopnost jejich aplikace při řešení jednoduchých úloh, včetně ověření platnosti předpokladů. Studentům doporučujeme, aby si individuálně vyřešili úlohy ze zkoušek z let 2009 až 2012. Budou zveřejněny postupně na webových stránkách ÚTM pod odkazem Matematika I a ve firmě Copia. Na začátku října to bude první část - Lineární algebra.

**Požadavky ke zkoušce A** se tematicky shodují s obsahem přednášek (bez 13. týdne) a s obsahem cvičení. Požadavky pro zkoušku úrovně B jsou redukovány, a to převážně z hlediska náročnosti úloh ve zkouškovém testu. Podrobně jsou požadavky uvedeny v samostatném souboru na webu ÚTM a ve firmě Copia.

Pro přesnější představu o náročnosti zkoušek v úrovni A, resp. B by měl pomoci soubor [5], který obsahuje tři zkouškové testy pro každou úroveň.

### Literatura

#### Základní literatura:

- [1] J.Neustupa: **Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (též starší vydání)
- [2] J.Neustupa, S.Kračmar: **Vybrané příklady** ze skript Sběrka příkladů z Matematiky I. Firma Copia a webové stránky Ústavu technické matematiky pod odkazem Matematika I. Bude vydáno po částech během semestru.
- [3] **Matematika I** - vybrané úlohy ze zkoušek v letech 2009 - 2012. Firma Copia a webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I. První část (Lineární algebra) bude vydána na začátku října, v průběhu semestru pak další dvě části (Diferenciální počet a Integrální počet).

#### Další doporučená literatura:

- [4] E.Brožiková, M.Kittlerová: **Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Řešené příklady**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.
- [5] **Matematika I** - ukázky zkouškových testů pro rok 2012/13. Firma Copia a webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I.
- [6] J.Neustupa: **Mathematics I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004. (*Anglická verze skripta [1].*)
- [7] F. Mráz: Opakování středoškolské matematiky (vybrané partie). Webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I.
- [8] J. Černý a kolektiv: Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007 (stručný přehled a příklady ze středoškolské matematiky, částečně i řešené).