

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA II

Jiří Neustupa

Elektronická verze skript pro rok 2024/2025

Obsah

Úvod	3
------------	---

I. Diferenciální počet funkcí více proměnných

1. Euklidův prostor \mathbb{E}_n . Body a množiny v \mathbb{E}_n	4
2. Funkce více proměnných, základní pojmy.	10
3. Limita a spojitost.	15
4. Parciální derivace. Diferencovatelná funkce. Tečná rovina. Diferenciál.	22
5. Derivace v daném směru. Gradient. Parciální derivace vyšších řádů. Parciální derivace složené funkce.	30
6. Extrémy funkce více proměnných.	37
7. Implicitní funkce.	44
8. Cvičení.	47

II. Riemannův integrál funkcí dvou a tří proměnných

1. Dvojný integrál – motivace a definice. Dvourozměrná Jordanova míra a měřitelné množiny v \mathbb{E}_2	50
2. Existence a vybrané vlastnosti dvojného integrálu.	54
3. Výpočet dvojného integrálu – Fubiniho věta a transformace do polárních souřadnic.	56
4. Některé fyzikální aplikace dvojného integrálu.	60
5. Trojný integrál – motivace a definice. Třírozměrná Jordanova míra a měřitelné množiny v \mathbb{E}_3	61
6. Existence a vybrané vlastnosti trojného integrálu.	64
7. Výpočet trojného integrálu – Fubiniho věta a transformace do cyklindrických a do sférických souřadnic.	65
8. Některé fyzikální aplikace trojného integrálu.	70
9.* Více o substituční metodě výpočtu dvojného a trojného integrálu.	71
10. Cvičení.	73

III. Křivkové integrály

1. Jednoduché křivky v \mathbb{E}_2 a v \mathbb{E}_3	76
2. Křivkový integrál skalární funkce. (Křivkový integrál 1. druhu.)	80
3. Některé fyzikální aplikace křivkového integrálu skalární funkce.	83
4. Křivkový integrál vektorové funkce. (Křivkový integrál 2. druhu.)	85
5. Greenova věta.	88
6. Cvičení.	90

IV. Plošné integrály

1. Jednoduché plochy v \mathbb{E}_3	93
2. Plošný integrál skalární funkce. (Plošný integrál 1. druhu.)	98
3. Některé fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce.	103
4. Plošný integrál vektorové funkce. (Plošný integrál 2. druhu.)	104
5. Operátory divergence a rotace. Gaussova–Ostrogradského věta a Stokesova věta.	107
6. Cvičení.	111

V. Potenciální a solenoidální vektorové pole

1. Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě. Potenciální pole – definice a základní vlastnosti.	
2. Potenciální pole v \mathbb{E}_2	119
3. Potenciální pole v \mathbb{E}_3	123
4.* Solenoidální pole.	126
5. Cvičení.	131

Rejstřík	134
Seznam vybraných symbolů	136
Doporučená literatura	136
Z další literatury	136

Úvod

Tento text je studijní pomůckou k předmětu Matematika II, vyučovanému na Strojní fakultě ČVUT v letním semestru v prvním roce studia. Navazuje na skriptum Matematika I (viz [5]). Text obsahuje i některé partie, které se běžně u zkoušky z předmětu Matematika II nevyžadují, nicméně s obsahem skriptu úzce souvisí. Tyto partie, buď kapitoly nebo odstavce, jsou označeny hvězdičkou. Pokud je studenti nepoužijí hned, mohou se k nim v případě potřeby nebo zájmu vrátit později.

Obsahem předmětu Matematika II i obsahem tohoto textu je zejména diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných. Tato látka má mnoho aplikací v technice i v přírodních vědách. Pojmy, kterými se zde zabýváme, mají vícerozměrný charakter. (Při studiu Matematiky II přesně pochopíte, co tím míníme.) Jejich dobré a aktivní zvládnutí proto vyžaduje nejen znalost základních definic, vět, formulí a určitou početní zručnost, ale i dobrou prostorovou představivost. Při objasňování takových pojmů, právě díky časté možnosti jejich geometrické interpretace například ve třírozměrném prostoru, má nezastupitelné místo osobnost učitele. Přes veškerou snahu nemůže vždy psaný text s dvourozměrnými obrázky výklad učitele nahradit a studentům proto doporučujeme, aby toto skriptum chápali jako doplněk k přednáškám a cvičením, kde bude probíraná látka podrobně vysvětlena.

V zájmu usnadnění pochopení mnoha pojmů jsou před jejich přesné definice předřazeny odstavce, ve kterých se snažíme popsat motivaci k zavedení pojmů a vysvětlit proč tyto pojmy jsou definovány uvedeným způsobem. To se týká zejména různých typů integrálů, křivek a ploch. V odstavcích, které mají motivační charakter, často opouštíme exaktní způsob výkladu a dovoluujeme si na intuitivní úrovni pracovat i s termíny jako například “nekonečně malé kladné číslo dt ”, “nekonečně krátký úsek křivky”, apod., které dnešnímu pojetí množiny reálných čísel nebo geometrie křivek odporují. Několik dalších pojmů (orientace uzavřené křivky v rovině, orientace plochy vzhledem k orientaci jejího okraje, jednoduše souvislá oblast) zavádíme s tím, že spoléháme na čtenářovu představivost a preferujeme jednoduchost a názornost na úkor matematické preciznosti. V ostatních částech skriptu se snažíme na přijatelné, avšak též srozumitelné úrovni dodržet logickou korektnost výkladu. Mějte toto při čtení skriptu na paměti a rozlišujte zmíněnou dvojí logickou úroveň různých částí textu.

Skriptum obsahuje řadu známých a důležitých vět aplikované matematiky, jako jsou Greenova věta, Gaussova–Ostrogradského věta, Stokesova věta, atd. Tvrzení těchto vět jsou vyjádřena pomocí jistých integrálních formulí. Studenti, ale i autoři různých odborných statí, někdy chybně redukuje tyto věty pouze na zmíněné formule a zapomínají, že nedílnou součástí vět jsou i jejich předpoklady. Bylo by naivní se domnívat, že formule jsou platné kdykoliv. Opak je pravdou – tyto formule platí pouze za určitých podmínek. Předpoklady vět jsou stručným a jednoduchým vymezením těchto podmínek a jsou stejně důležité, jako tvrzení vět. Nezapomínejte proto na ně.

Ve skriptu jsou vzorově vyřešeny některé příklady. Jiné, neřešené příklady, jsou zařazeny na konci každého tematického celku. Mnoho dalších, řešených i neřešených příkladů, můžete nalézt ve skriptu E. Brožíkové a M. Kittlerové [1].

Autor skriptu děkuje svému kolegovi doc.RNDr. Čenku Zlatníkovi, CSc. za pečlivé přečtení skriptu, diskuze a rady, které přispěly ke srozumitelnosti i matematické korektnosti textu. Jestliže ve skriptu přesto objevíte nedostatky, pak tyto jdou výhradně na vrub autora.

I. Diferenciální počet funkcí více proměnných

Funkce více proměnných v matematice i jejích aplikacích popisují situace, kdy jedna veličina (tzv. závisle proměnná) závisí na několika jiných veličinách (tzv. nezávisle proměnných). Na různých místech tohoto textu najdete mnoho konkrétních příkladů takových funkcí.

Uvidíte, že teorie funkcí více proměnných se v některých bodech liší od teorie funkcí jedné proměnné, kterou znáte z kurzu Matematika I. Mezi teorií funkcí dvou, tří, nebo i více proměnných však již příliš velký rozdíl není. V tomto textu se budeme zabývat funkcemi, které závisí obecně na n proměnných. Bude-li se vám výklad jevit příliš abstraktní, představujte si, že $n = 2$. V zájmu dobré srozumitelnosti textu mnoho pojmů stejně nejprve vysvětlíme na příkladu funkce dvou proměnných a až poté ukážeme jejich zobecnění pro funkce n proměnných.

Proměnné budeme většinou značit x_1, x_2, \dots, x_n , někdy též t_1, t_2, \dots, t_k . V konkrétním případě, kdy $n = 2$, budeme proměnné většinou značit x_1, x_2 nebo x, y . Podobně, pro $n = 3$ budeme proměnné většinou značit x_1, x_2, x_3 nebo x, y, z . Vidíte, že proměnné obecně tvoří uspořádané n -tice reálných čísel. Lze je tedy považovat za prvky n -rozměrného Euklidova prostoru \mathbb{E}_n . Funkce n proměnných obecně nemusí být definovaná v celém prostoru \mathbb{E}_n , ale pouze v nějaké množině v \mathbb{E}_n . Vlastnosti funkce n proměnných úzce souvisí s typem množiny, na které je funkce definovaná. V následující kapitole si proto připomeneme definici prostoru \mathbb{E}_n (známou z Matematiky I) a poté se seznámíme s různými typy množin v \mathbb{E}_n .

I.1. Euklidův prostor \mathbb{E}_n . Body a množiny v \mathbb{E}_n .

I.1.1. n -rozměrný Euklidův prostor \mathbb{E}_n . Předpokládejme, že n je přirozené číslo. Množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel označujeme \mathbb{R}^n a nazýváme n -rozměrný aritmetický prostor. Prvky \mathbb{R}^n nazýváme body. Body označujeme velkými písmeny a jejich souřadnice (uspořádané n -tice) zapisujeme v hranatých závorkách. Například $A = [a_1, \dots, a_n]$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ atd.

Definujeme-li v \mathbb{R}^n vzdálenost dvou libovolných bodů $X = [x_1, \dots, x_n]$ a $Y = [y_1, \dots, y_n]$ vzorcem

$$(I.1.1) \quad \|Y - X\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

stává se z \mathbb{R}^n tzv. n -rozměrný Euklidův prostor. Tento prostor označujeme \mathbb{E}_n .

Vzdálenost bodů X a Y se někdy také značí $|Y - X|$, $|X - Y|$, $d(X, Y)$ nebo $\rho(X, Y)$. V tomto textu však budeme preferovat značení $\|Y - X\|$ nebo $\|X - Y\|$. (Je to totéž.)

Počátek souřadného systému v \mathbb{E}_n , tj. bod jehož všechny souřadnice jsou nulové, budeme značit O .

Ze střední školy i z kurzu Matematika I víte, že \mathbb{E}_1 si můžete představovat jako přímku, \mathbb{E}_2 jako rovinu a \mathbb{E}_3 jako prostor, ve kterém žijeme. (Je to pouze přibližná představa, astronomové již dávno zjistili, že náš vesmír ve skutečnosti není \mathbb{E}_3 .)

Vektorem v \mathbb{E}_n budeme vždy mínit tzv. volný vektor v \mathbb{E}_n . (Viz skriptum [5], str. 4.) Vektory budeme v tomto textu většinou označovat malými tučnými písmeny. (Další

možností je dělat nad označením vektoru šipku.) Souřadnice vektoru budeme zapisovat v kulatých závorkách. Můžeme tedy například psát: $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ atd.

Součtem bodu $X = [x_1, \dots, x_n]$ a vektoru $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ rozumíme bod $X + \mathbf{a} = [x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n]$. Naopak, rozdíl dvou bodů $Y = [y_1, \dots, y_n]$ a $X = [x_1, \dots, x_n]$ považujeme za vektor $Y - X = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Délkou vektoru $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ nazýváme číslo

$$(I.1.2) \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

(Vzdálenost $\|Y - X\|$ dvou bodů X, Y lze tedy chápat jako délku vektoru $Y - X$.)

Kreslete si sami ke všem pojům, definovaným v této kapitole, obrázky v \mathbb{E}_2 !

I.1.2. Okolí bodu v \mathbb{E}_n . Prstencové okolí bodu v \mathbb{E}_n . *Okolím* bodu A o poloměru R rozumíme množinu $\{X \in \mathbb{E}_n; \|X - A\| < R\}$ (tj. množinu všech bodů $X \in \mathbb{E}_n$, jejichž vzdálenost od A je menší než R). Takové okolí označujeme $\mathcal{U}_R(A)$. (\mathcal{U} proto, že pojem “okolí bodu” vznikl v Německu a německy se okolí řekne “die Umgebung”.) Pokud poloměr okolí není důležitý, značíme je pouze $\mathcal{U}(A)$.

Ve speciálním případě, kdy $n = 1$ a A je bodem o souřadnici a na reálné ose (tj. $A = [a]$), je okolí $\mathcal{U}_R(A)$ otevřeným intervalem $(a - R, a + R)$. Podobně, je-li $n = 2$, je okolí $\mathcal{U}_R(A)$ otevřeným kruhem se středem v bodě A a poloměrem R .

Vyjmeme-li z okolí $\mathcal{U}_R(A)$ jeho střed A , dostáváme množinu $\mathcal{U}_R(A) - \{A\} = \{X \in \mathbb{E}_n; 0 < \|X - A\| < R\}$. Tuto množinu nazýváme *prstencové okolí* bodu A o poloměru R a značíme ji $\mathcal{P}_R(A)$. Pokud poloměr prstencového okolí není důležitý, můžeme toto okolí značit pouze $\mathcal{P}(A)$.

Místo “prstencové okolí” se někdy používají názvy “neúplné okolí” nebo “redukované okolí”, v tomto textu však zůstaneme u názvu “prstencové okolí”.

I.1.3. Vnitřní bod množiny. Hraniční bod množiny. Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ a $A \in M$. Bod A nazýváme *vnitřním bodem* množiny M , pokud existuje okolí $\mathcal{U}(A)$ takové, že $\mathcal{U}(A) \subset M$.

Okolí $\mathcal{U}(A)$ v definici vnitřního bodu může být jakkoliv malé. Podstatné ale je, že nějaké takové okolí existuje.

Bod A nazýváme *hraničním bodem* množiny M , jestliže se v každém jeho okolí nachází alespoň jeden bod množiny M a alespoň jeden bod, který nepatří do M .

V definici hraničního bodu je velmi důležité slovo “každém”. To také znamená “jakkoliv velkém”, nebo spíše “jakkoliv malém”. Hraniční bod množiny M může sám patřit do M , ale také tomu tak být nemusí.

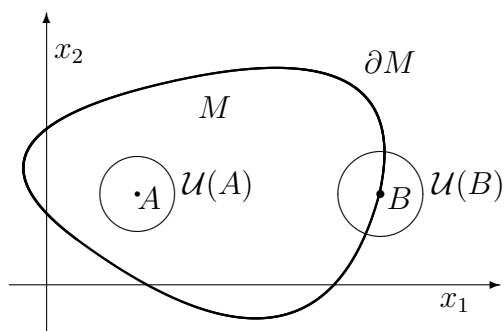
I.1.4. Vnitřek množiny. Otevřená množina. Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$. Množinu všech vnitřních bodů M nazýváme *vnitřek* množiny M . Značíme jej M° .

Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá *otevřená*, je-li $M = M^\circ$. (Jinými slovy: Množina M je otevřená, je-li každý její bod jejím vnitřním bodem.)

I.1.5. Hranice množiny. Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí* M . Značíme ji ∂M nebo Γ_M . (V tomto textu budeme dávat přednost ∂M .)

Bod A na obr. 1 je vnitřním bodem množiny M , bod B je jejím hraničním bodem.

Obr. 1



I.1.6. Uzávěr množiny. Uzavřená množina. Necht' $M \subset \mathbb{E}_n$. Uzávěrem množiny M nazýváme sjednocení $M \cup \partial M$. Uzávěr M značíme \overline{M} .

Množinu M nazýváme uzavřenou, jestliže $M = \overline{M}$.

I.1.7. Příklady. 1. Předpokládejme nejprve, že $n = 1$ a M je otevřeným intervalem $(0, 1)$. Každý bod intervalu M je zároveň jeho vnitřním bodem. M je tedy, v souladu s definicí I.1.4, otevřenou množinou. Hraničními body jsou 0 a 1. Uzávěrem intervalu M je proto uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$.

2. Nyní předpokládejme, že $n = 1$ a M je množinou všech přirozených čísel \mathbb{N} . Tato množina M nemá žádné vnitřní body, proto je $M^\circ = \emptyset$. Každý bod množiny M je jejím hraničním bodem, proto je $\partial M = M$. Uzávěrem M je $\overline{M} = M \cup \partial M = M$. Množina M je shodná se svým uzávěrem, tudíž je uzavřená.

3. Buď $n = 1$ a $M = \mathbb{E}_1$. Každý bod M je vnitřním bodem, množina M je tudíž otevřená. Množina M nemá žádné hraniční body, proto je $\partial M = \emptyset$. Uzávěrem M je $\overline{M} = M \cup \partial M = M \cup \emptyset = M$. Množina M je rovna svému uzávěru, proto je rovněž uzavřenou množinou.

Toto je trochu překvapivé: Množina $M = \mathbb{E}_1$ je v \mathbb{E}_1 zároveň otevřená i uzavřená. Podobně lze ukázat, že množina $M = \mathbb{E}_n$ je v \mathbb{E}_n zároveň otevřená i uzavřená. Lze dokázat, že jediná další množina v \mathbb{E}_n s touto vlastností, je prázdná množina.

4. Buď nyní $n = 2$ a $M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_2 > 0\}$. Každý bod množiny M je jejím vnitřním bodem. Proto je $M = M^\circ$ a množina M je otevřená. Hranicí M je přímka $x_2 = 0$ (osa x_1). Uzávěrem M je $\overline{M} = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_2 \geq 0\}$ (sjednocení M a osy x_1).

5. Buď $n = 2$ a $M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$. Vnitřkem množiny M je $M^\circ = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 > 0, x_2 > 0\}$ (otevřený první kvadrant). Hranicí M je sjednocení dvou polopřímek: $\partial M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \cup \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$. Uzávěrem je množina $\overline{M} = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (uzavřený první kvadrant). Množina M není ani otevřená, ani uzavřená.

6. Buď $n = 2$ a $M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Vnitřkem množiny M je $M^\circ = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 < 4\}$. Hranicí je $\partial M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ (kružnice o středu v počátku a poloměru 2). Uzávěrem je $\overline{M} = M$. Množina M je uzavřená.

I.1.8. Některé další vlastnosti množin. Není těžké dokázat, že platí následující tvrzení nebo identity:

1. Sjednocení nebo průnik konečně mnoha otevřených množin v \mathbb{E}_n je otevřená množina.
2. Sjednocení nebo průnik konečně mnoha uzavřených množin v \mathbb{E}_n je uzavřená množina.

Dále předpokládejme, že $M \subset \mathbb{E}_n$.

3. Pro každý bod $A \in M$ nastává právě jedna ze dvou možností:
 - a) A je vnitřním bodem M ,
 - b) nebo A je hraničním bodem M .
4. $\partial M = \partial(\mathbb{E}_n - M) = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{E}_n - M}$
5. ∂M je uzavřená množina.
6. $M^\circ = M - \partial M$
7. M je otevřená množina právě když neobsahuje žádný svůj hraniční bod (tj. když $M \cap \partial M = \emptyset$).
8. M je uzavřená množina právě když obsahuje všechny své hraniční body (tj. když $\partial M \subset M$).
9. M je otevřená množina právě když její doplněk $\mathbb{E}_n - M$ je uzavřená množina.

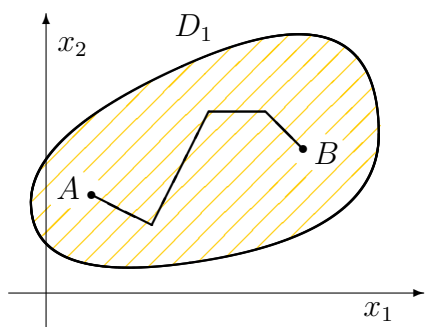
I.1.9. Úsečka v \mathbb{E}_n . Lomená čára v \mathbb{E}_n . Jsou-li A a B dva různé body v \mathbb{E}_n , pak množinu všech bodů X typu $X = A + t(B - A)$ (pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$) nazýváme úsečkou v \mathbb{E}_n s krajními body A a B . Značíme ji \overline{AB} .

Nechť A_1, A_2, \dots, A_k je k navzájem různých bodů v \mathbb{E}_n . Sjednocení úseček $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{k-1}A_k}$ nazýváme lomenou čarou v \mathbb{E}_n .

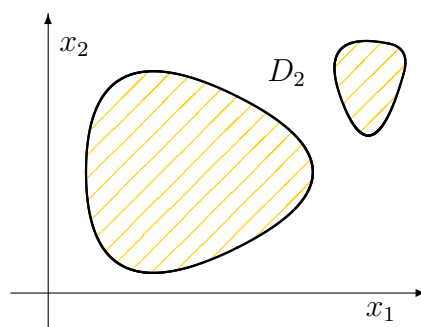
I.1.10. Oblast v \mathbb{E}_n . Množinu $D \subset \mathbb{E}_n$, která

- a) je otevřená a
 - b) její libovolné dva body lze spojit lomenou čarou, která celá leží v D ,
- nazýváme oblast.

Vlastnost b) se nazývá souvislost. Oblast v \mathbb{E}_n je tedy také možné definovat jako množinu v \mathbb{E}_n , která je otevřená a souvislá.



Obr. 2a



Obr. 2b

I.1.11. Příklady. 1. Množina D_1 na obr. 2a je souvislá. Množina D_2 na obr. 2b není souvislá. (Skládá se ze dvou komponent.)

2. Množiny

$$D_3 = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 < 9\},$$

$$D_4 = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 < 0\},$$

$$D_5 = (-1, 1) \times (-1, 1)$$

jsou oblasti v \mathbb{E}_2 .

3. Množiny

$$D_6 = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 \leq 9\},$$

$$D_7 = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 < 0 \text{ nebo } x_1 > 5\}$$

nejdou oblasti v \mathbb{E}_2 . (D_6 není otevřená a D_7 není souvislá.)

I.1.12. Omezená množina v \mathbb{E}_n . Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá omezená, jestliže existuje okolí počátku $\mathcal{U}_R(O)$ takové, že $M \subset \mathcal{U}_R(O)$.

(Jistě si umíte představit, že aby omezená množina M byla obsažena v $\mathcal{U}_R(O)$, musí být poloměr R “dostatečně velký”. Na tom ale nezáleží. Podstatné je, že nějaký “dostatečně velký” poloměr R a okolí $\mathcal{U}_R(O)$, obsahující množinu M , existují.)

Množina v \mathbb{E}_n , která není omezená, se nazývá neomezená.

Najděte a napište si sami příklady omezených a neomezených množin v \mathbb{E}_n .

I.1.13. Posloupnost bodů v \mathbb{E}_n . Každé zobrazení množiny přirozených čísel \mathbb{N} do \mathbb{E}_n nazýváme posloupností v \mathbb{E}_n . Posloupnost v \mathbb{E}_n je tedy přiřazení, které každému přirozenému číslu k přiřazuje bod X_k v \mathbb{E}_n . Posloupnost značíme $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ nebo $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ nebo jenom krátce $\{X_k\}$.

I.1.14. Limita posloupnosti v \mathbb{E}_n . Bod $A \in \mathbb{E}_n$ nazýváme limitou posloupnosti $\{X_k\}$, jestliže

$$(I.1.3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|X_k - A\| = 0.$$

Používáme značení: $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = A$, $\lim X_k = A$ nebo pouze $X_k \rightarrow A$.

Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n , která má v \mathbb{E}_n limitu, se nazývá konvergentní. Je-li limitou bod A , říkáme, že posloupnost $\{X_k\}$ konverguje k bodu A .

I.1.15. Poznámka. Jinými slovy můžeme říci, že A je limitou posloupnosti $\{X_k\}$, jestliže posloupnost vzdáleností X_k od A má limitu nula. Posloupnost vzdáleností X_k od A je posloupnost reálných čísel a pojem limity posloupnosti reálných čísel je známý z kurzu Matematika I.

Z Matematiky I také víte, že posloupnost reálných čísel (na kterou lze nahlížet jako na posloupnost bodů v \mathbb{E}_1) může mít nejvýše jednu limitu (viz [5], věta III.1.8). Stejně tvrzení platí i pro posloupnost bodů v \mathbb{E}_n :

I.1.16. Věta. *Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n může mít nejvýše jednu limitu.*

Je-li totiž $\{X_k\}$ posloupnost bodů v \mathbb{E}_n , pak evidentně není možné, aby existovaly dva různé body A a B takové, že vzdálenosti X_k od A se blíží k nule pro $k \rightarrow +\infty$ a zároveň vzdálenosti X_k od B se blíží k nule pro $k \rightarrow +\infty$.

I.1.17. Věta. Necht' $\{X_k\}$ je posloupnost bodů v \mathbb{E}_n , přičemž $X_k = [x_{1k}, \dots, x_{nk}]$. Necht' $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. Pak

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = A \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{ik} = a_i \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Tuto větu lze snadno dokázat, použijeme-li (I.1.3) a rozepíšeme-li pečlivě $\|X_k - A\|$ pomocí (I.1.1).

Věta I.1.17 říká, že limitu posloupnosti bodů $\{X_k\}$ lze počítat "po souřadnicích". To znamená, že první souřadnice limitního bodu A je rovna limitě prvních souřadnic bodů X_k (tj. $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{1k} = a_1$), druhá souřadnice limitního bodu A je rovna limitě druhých souřadnic bodů X_k (tj. $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = a_2$) atd.

I.1.18. Příklad. Rozhodněme, zda posloupnost bodů

$$X_k = \left[\frac{\sin k}{k}, \frac{k^2 - 7k}{6 - 5k - 2k^2}, \frac{k + 1}{k + 5} \right], \quad (k = 1, 2, \dots)$$

je konvergentní v \mathbb{E}_3 . V případě, že ano, určíme limitu.

Ř e š e n í: Uvažovanou posloupnost lze zapsat: $\{X_k\} = \{[x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}]\}$, kde

$$x_{1k} = \frac{\sin k}{k}, \quad x_{2k} = \frac{k^2 - 7k}{6 - 5k - 2k^2}, \quad x_{3k} = \frac{k + 1}{k + 5}.$$

Pro limity posloupností $\{x_{1k}\}$, $\{x_{2k}\}$ a $\{x_{3k}\}$ platí:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{1k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin k}{k} = 0, & \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^2 - 7k}{6 - 5k - 2k^2} = -\frac{1}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{3k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k + 1}{k + 5} = 1. \end{aligned}$$

Všechny posloupnosti $\{x_{1k}\}$, $\{x_{2k}\}$ a $\{x_{3k}\}$ mají konečné limity a tudíž jsou konvergentní. Na základě věty I.1.17 můžeme učinit závěr: Posloupnost $\{X_k\}$ je konvergentní v \mathbb{E}_3 a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = \left[0, -\frac{1}{2}, 1 \right].$$

I.1.19.* Hromadný bod množiny. Izolovaný bod množiny. Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{E}_n$. Bod $A \in \mathbb{E}_n$ nazýváme hromadným bodem množiny M , jestliže v množině M existuje alespoň jedna posloupnost bodů $\{X_k\}$, různých od A , konvergující k bodu A .

Hromadný bod množiny M může sám patřit do množiny M , ale také tomu tak být nemusí. Název je odvozen od toho, že v jakkoliv malém okolí hromadného bodu se body množiny M "hromadí", neboli vždy se jich tam najde nekonečně mnoho.

Bod $A \in M$ nazýváme izolovaným bodem množiny M , jestliže A není hromadným bodem množiny M .

I.1.20.* Příklady. 1. Předpokládejme, že $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_1$ a M je otevřeným intervalem $(0, 1)$.

Pak každý bod uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je hromadným bodem M . M nemá žádné izolované body.

2. Necht' $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_1$ a $M = \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel). Tato množina M nemá žádné hromadné body. Každý její bod je zároveň jejím izolovaným bodem.
3. Necht' $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_1$ a $M = \{1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Každý bod množiny M je jejím izolovaným bodem. Jediným hromadným bodem množiny M je bod 0, který sám však do množiny M nepatří.
4. Necht' $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_2$ a $M = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. (M je otevřený kruh se středem v počátku a poloměru $\sqrt{2}$.) Tato množina M nemá žádné izolované body. Hromadné body M tvoří množinu $\overline{M} = \{X = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$.

I.1.21.* Některé další vlastnosti hromadných a izolovaných bodů. Není těžké dokázat následující tvrzení:

1. Bod $A \in M$ je izolovaným bodem množiny M právě když existuje okolí $\mathcal{U}(A)$, ve kterém se kromě bodu A již nenachází žádný další bod množiny M .
- 2.* M je uzavřená množina právě když M obsahuje všechny své hromadné body.

I.2. Funkce více proměnných, základní pojmy.

I.2.1. Funkce více proměnných – motivace a příklady. Při matematickém modelování různých jevů, stavů a procesů se velmi často vyskytují případy, kdy jedna proměnná veličina závisí na větším počtu jiných proměnných veličin. Uvedme některé příklady:

- Objem V kuželu, jehož podstavou je kruh, závisí na poloměru podstavy r a na výšce kuželu v takto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.
- Velikost síly, kterou je hmotným bodem o hmotnosti M , umístěným v počátku souřadného systému v \mathbb{E}_3 , přitahován jiný hmotný bod o hmotnosti m a souřadnicích $[x_1, x_2, x_3]$, je

$$F = \frac{\kappa M m}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

(κ je Newtonova gravitační konstanta.) F tudíž závisí na M , m , x_1 , x_2 a x_3 .

- Podle zjednodušeného matematického modelu (Ch. Cobb a P. Douglas, 1928) celková produkce P ekonomiky za jeden rok závisí na množství vykonané práce L a množství vloženého kapitálu K takto: $P = 1.01 L^{0.75} K^{0.25}$.

– O některých funkcích víme, že existují, ale jejich vyjádření nějakou formulí (předepisující provedení konečně mnoha operací) buď neznáme, nebo to vůbec není možné. Například každému bodu $X = [x_1, x_2, x_3]$ v místnosti je možné přiřadit teplotu T . Teplota navíc závisí na čase t . T je tedy funkcí čtyř proměnných: x_1 , x_2 , x_3 a t . Přesné vyjádření T , v místnosti komplikovaného tvaru a s různými zdroji tepla, je však prakticky nemožné. T můžeme pouze přibližně popsat tabulkou teplot ve zvolených bodech X a ve zvolených časových okamžicích t . Takovou tabulku lze získat buď měřením nebo výpočtem, popis výpočtu by však značně přesahoval obsah předmětu Matematika II.

I.2.2. Funkce n proměnných. Definiční obor. Zápis funkce. Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{E}_n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny M do \mathbb{R} nazýváme funkcí n proměnných.

(Hodnotami funkce f jsou reálná čísla, proto též hovoříme o reálné funkci n proměnných.) Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme ji $D(f)$.

Funkce f , definovaná na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, každému bodu $X = [x_1, \dots, x_n] \in M$ přiřazuje reálné číslo, které značíme $f(X)$ nebo $f(x_1, \dots, x_n)$. Veličiny x_1, \dots, x_n nazýváme nezávisle proměnné. Definujeme-li funkci f rovnicí $y = f(x_1, \dots, x_n)$, pak říkáme, že y (nebo i samotná funkce f) “závisí” na proměnných x_1, \dots, x_n .

Pro značení funkcí více proměnných platí stejná pravidla, jako u funkcí jedné proměnné. Na zcela exaktní úrovni je tedy mezi f a $f(X)$ tento rozdíl: Zatímco f je označení funkce, $f(X)$ je číslo – a to hodnota funkce f v bodě X . Podobně jako u funkcí jedné proměnné, nebudeme však ani zde toto pravidlo dodržovat zcela důsledně a funkci budeme často označovat jak f , tak třeba $f(X)$, $f(x_1, x_2)$, $f(x_1, \dots, x_n)$, $f(x, y)$ atd. První značení (tj. f) má tu výhodu, že je přesné a krátké. Další značení (tj. například $f(x_1, x_2)$) má jinou výhodu, a to že je z něj okamžitě patrné, na kolika a jakých proměnných f závisí.

Funkce budeme často značit i jinými písmeny než f , například g , h , F , apod.

Nechť f je například funkce, která každému bodu $X = [x_1, x_2]$ z množiny $M = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_2 \geq 1\}$ přiřazuje číslo $x_1 + \sqrt{x_2}$. Tuto skutečnost můžeme zapsat takto:

1. $f : y = x_1 + \sqrt{x_2}$ pro $x_2 \geq 1$,
2. $f(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}; [x_1, x_2] \in M$,

apod. Mějte na paměti následující důležité pravidlo, které již znáte z teorie funkcí jedné proměnné: pokud v definici funkce není explicitně (tj. výslovně) zadán definiční obor, pak za definiční obor považujeme množinu všech možných hodnot nezávisle proměnných, pro které má formule, jíž je funkce definovaná, smysl. Jestliže tedy definujeme funkci g například rovnicí

$$(I.2.1) \quad g(x, y, z) = x \ln(y + z)$$

bez bližší specifikace definičního oboru, pak definičním oborem funkce g rozumíme množinu všech bodů $[x, y, z] \in \mathbb{E}_3$, pro které má výraz na pravé straně (I.2.1) smysl. Je to množina $\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y + z > 0\}$. Píšeme:

$$D(g) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y + z > 0\}.$$

I.2.3. Obor hodnot. Graf. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, definovaná na množině $M \subset \mathbb{E}_n$.

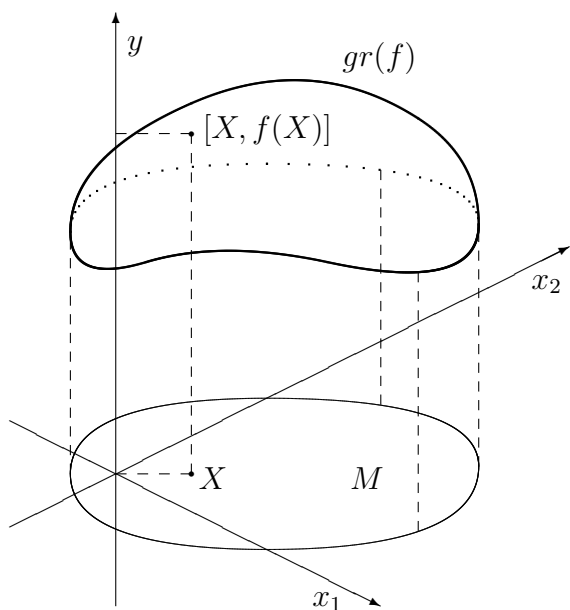
Oborem hodnot funkce f rozumíme množinu

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists X \in M : y = f(X)\}.$$

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\text{gr}(f) = \{[X, y] \in \mathbb{E}_{n+1}; X \in M \text{ a } y = f(X)\}.$$

Ze střední školy i z kurzu Matematika I je vám známo, že grafem “rozumné” funkce jedné proměnné je křivka v \mathbb{E}_2 . (“Rozumnou” funkcí míníme například spojitou funkci, podrobně to však na tomto místě nebudeme rozebírat.) Podobně, grafem “rozumné”



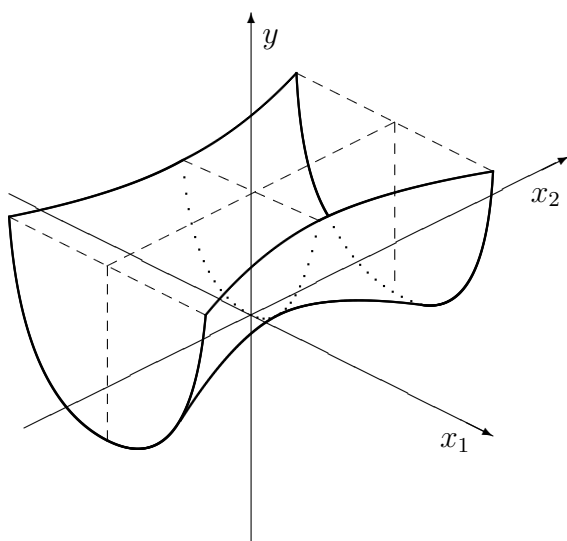
Obr. 3

funkce dvou proměnných je plocha v \mathbb{E}_3 . (Viz obr. 3.) Analogicky, grafem “rozumné” funkce tří proměnných je útvar v \mathbb{E}_4 . To si však již jen stěží někdo dokáže představit.

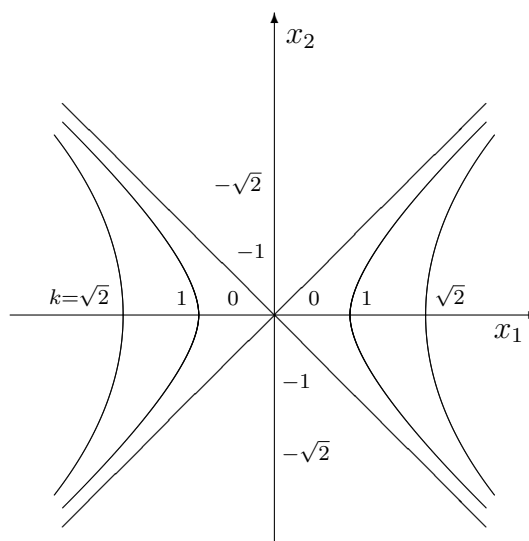
I.2.4. Izokřivky. Kromě grafu existuje ještě jedna možnost, jak vizuálně přiblížit funkci dvou proměnných. Tou možností je sestavení soustavy tzv. izokřivek.

Je-li $y = f(x_1, x_2)$ funkce dvou proměnných a k je zvolené reálné číslo, pak množinu bodů $\{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; f(x_1, x_2) = k\}$ nazýváme *izokřivkou* funkce f . Rovnici $f(x_1, x_2) = k$ nazýváme rovnicí uvažované izokřivky.

Funkce dvou proměnných může mít nekonečně mnoho izokřivek: Různým hodnotám k odpovídají různé izokřivky. Izokřivka může být i prázdná množina, jestliže $k \notin H(f)$. Izokřivka obecně nemusí být křivkou: Například pro konstantní funkci $y = k$ na množině M je izokřivka o rovnici $f(x_1, x_2) = k$ množinou identickou s M . Název “izokřivka” se vžil proto, že pro většinu spojitých a nekonstantních funkcí f jsou izokřivky skutečně tím, co si představujeme pod pojmem “křivka”. Často se též používá název “izočára”.



Obr. 4a



Obr. 4b

I.2.5. Příklady izokřivek. a) Izokřivky jsou běžně používány při kreslení map: Například křivky, spojující body se stejnou nadmořskou výškou, jsou izokřivkami funkce $y = f(x_1, x_2)$, udávající nadmořskou výšku místa o souřadnicích x_1, x_2 . (Používá se název *vrstevnice*.) Nebo křivky, spojující body se stejnou teplotou, jsou izokřivkami funkce $y = T(x_1, x_2)$, udávající teplotu v bodě $[x_1, x_2]$. (Tyto izokřivky se nazývají *izotermny*.) Křivky, spojující body se stejným tlakem, jsou izokřivkami funkce $y = P(x_1, x_2)$, udávající tlak v bodě $[x_1, x_2]$. (Těmto izokřivkám se říká *izobary*.)

b) Kružnice o rovnicích $x_1^2 + x_2^2 = k$ (pro různá $k > 0$) jsou izokřivkami funkce $y = x_1^2 + x_2^2$. (Grafem této funkce je rotační paraboloid v \mathbb{E}_3 – viz [5], str. 43.)

c) Na obr. 4a vidíte část grafu funkce $y = x_1^2 - x_2^2$ a na obr. 4b vidíte odpovídající soustavu izokřivek. Izokřivkami jsou hyperboly o rovnicích $x_1^2 - x_2^2 = k$ pro různá $k \in \mathbb{R}$.

I.2.6. Izoplochy. Je-li f funkce tří proměnných a k je reálné číslo, pak množinu bodů $\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3; f(x_1, x_2, x_3) = k\}$ nazýváme *izoplochou* funkce f .

Izoplocha je podobným pojmem, jako izokřivka, ovšem “o jednu dimenzi výše”. Uvažovaná funkce je funkcí tří proměnných, nikoliv pouze dvou, a izoplocha je množinou v \mathbb{E}_3 , nikoliv pouze v \mathbb{E}_2 . Izoplocha může být obecně velmi rozmanitou množinou, pro většinu spojitých a nekonstantních funkcí tří proměnných je však její tvar v souladu s tím, co si představujeme pod pojmem “plocha”.

Například kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ je izoplochou funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

I.2.7. Operace s funkcemi. Předpokládejme, že f a g jsou funkce n proměnných s definičními obory $D(f), D(g) \subset \mathbb{E}_n$. *Součtem* funkcí f a g rozumíme funkci h , jejíž definiční obor je $D(h) = D(f) \cap D(g)$ a která každému $X \in D(h)$ přiřazuje hodnotu $h(X) = f(X) + g(X)$. Zkráceně píšeme: $h = f + g$. Analogicky definujeme i *rozdíl* a *součin* dvou funkcí.

Podobně můžeme definovat i podíl funkcí f a g . V definičním oboru podílu se však nesmí vyskytovat žádné body, ve kterých je jmenovatel nulový. Definice podílu tedy zní: *Podílem* funkcí f a g rozumíme funkci h , jejímž definičním oborem je množina $D(h) = D(f) \cap \{X \in D(g); g(X) \neq 0\}$ a která každému $X \in D(h)$ přiřazuje číslo $h(X) = f(X)/g(X)$. Zkráceně píšeme: $h = f/g$.

Vidíte, že operace mezi funkcemi více proměnných se definují stejně, jako v případě funkcí jedné proměnné. Podobně je tomu i s dalšími pojmy, které následují v této kapitole.

I.2.8. Složená funkce. Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných x_1, \dots, x_n . Dosadíme-li na místo těchto proměnných další funkce, které závisí například na k proměnných t_1, \dots, t_k :

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k),$$

získáme funkci

$$(I.2.2) \quad y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k)).$$

Tuto funkci nazýváme *složenou funkcí*. f je *vnější funkce* a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou *vnitřní funkce*.

Je patrné, že aby složená funkce (I.2.2) byla definovaná v nějaké množině $G \subset \mathbb{E}_k$, musí být všechny funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ definovány v množině G a

$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k)] \in D(f) \quad \text{pro všechna } [t_1, \dots, t_k] \in G.$$

I.2.9. Příklad. Předpokládejme, že $y = f(x_1, x_2)$ je funkce dvou proměnných, definovaná v \mathbb{E}_2 . x_1 a x_2 můžeme považovat za kartézské souřadnice bodu $X = [x_1, x_2]$ v \mathbb{E}_2 . Jsou-li r, φ polární souřadnice téhož bodu X , pak $x_1 = r \cos \varphi$ a $x_2 = r \sin \varphi$. (Viz odstavec II.3.5.) Dosadíme-li toto vyjádření x_1 a x_2 do funkce f , získáme složenou funkci $y = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

I.2.10. Omezená funkce. Nechť f je funkce n proměnných a $M \subset D(f)$. Funkci f nazýváme shora omezenou na množině M , jestliže existuje reálné číslo K takové, že $\forall X \in M : f(X) \leq K$.

Analogicky, funkci f nazýváme zdola omezenou na množině M , jestliže existuje reálné číslo L takové, že $\forall X \in M : f(X) \geq L$.

Funkci f nazýváme omezenou na množině M , je-li f na M omezená zdola i shora.

Je-li funkce f shora omezená na celém svém definičním oboru $D(f)$, pak tuto funkci nazýváme krátce shora omezenou. Analogicky definujeme i funkci zdola omezenou a omezenou.

I.2.11. Příklad. Funkce $f : y = x_1^2 + x_2^2$ je zdola omezená, nikoliv však shora omezená, v \mathbb{E}_2 . Grafem f je paraboloid.

I.2.12. Vektorová funkce. Vektorové pole. V mechanice a dalších disciplínách často pracujeme s funkcemi, které každému bodu nějaké množiny přiřazují nikoliv reálné číslo, ale vektor. Jako příklad můžeme uvést rychlost tekutiny, proudící v oblasti M . Rychlost v každém bodě $X = [x_1, x_2, x_3] \in M$ je vektor, nikoliv skalár. Jiným příkladem je deformace tělesa, vyplňujícího původně oblast $M \subset \mathbb{E}_3$: Každému bodu $X = [x_1, x_2, x_3] \in M$ lze přiřadit vektor, udávající posunutí bodu X . Funkce, jejichž hodnotami jsou vektory, nazýváme vektorovými funkcemi. Přesná definice vektorové funkce zní:

Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{E}_n$. Zobrazení, které každému bodu $X \in M$ přiřazuje vektor v \mathbb{E}_n , nazýváme vektorovou funkcí.

Je-li vektorová funkce \mathbf{f} definovaná v množině $M \subset \mathbb{E}_n$, pak existuje n skalárních funkcí f_1, \dots, f_n takových, že

$$\mathbf{f}(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X)) \quad \text{pro každé } X \in M.$$

Tuto skutečnost krátce zapisujeme:

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

f_1, \dots, f_n nazýváme souřadnicové funkce vektorové funkce \mathbf{f} . Označíme-li $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jednotkové vektory, orientované souhlasně s osami x_1, \dots, x_n , pak také můžeme používat zápis

$$\mathbf{f}(X) = f_1(X) \mathbf{e}_1 + \dots + f_n(X) \mathbf{e}_n \quad \text{pro každé } X \in M$$

nebo

$$\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + \dots + f_n \mathbf{e}_n.$$

Speciálně, když $n = 3$, tak místo vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ často používáme označení $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (podobně, jako když místo x_1, x_2, x_3 značíme souřadnice x, y, z .) Vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory, které jsou postupně orientované souhlasně s osami x, y, z . Vektorovou funkci \mathbf{f} se souřadnicovými funkcemi U, V, W pak můžeme zapisovat takto:

$$\mathbf{f} = (U, V, W) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{f} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}.$$

Je-li $n = 2$ a \mathbf{f} je “rovinná” vektorová funkce se souřadnicovými funkcemi U, V , pak můžeme analogicky psát:

$$\mathbf{f} = (U, V) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{f} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}.$$

Dalšími příklady vektorových funkcí jsou intenzita gravitačního pole, intenzita elektrostatického nebo magnetického pole atd. Ve všech těchto případech je možné každému bodu X z určité množiny $M \subset \mathbb{E}_3$ přiřadit vektor – sílu, kterou působí gravitační (nebo elektrostatické) pole na hmotný bod o jednotkové hmotnosti (nebo na jednotkový náboj) umístěný v bodě X , apod. Ve fyzice se často místo “funkce” používá název “pole”: Hovoří se o poli rychlosti proudící tekutiny, o gravitačním poli a o elektromagnetickém poli. Proto i v matematice místo “vektorová funkce” často používáme název *vektorové pole*.

V některých případech, zejména při fyzikálních aplikacích, je vhodné zdůraznit rozdíl mezi vektorovou funkcí (vektorovým polem) a obyčejnou funkcí, jejíž hodnoty jsou reálná čísla (skaláry). Proto “obyčejnou” funkci n proměnných někdy nazýváme *skalární funkcí* nebo *skalárním polem*. Jako příklady skalárních polí můžeme uvést pole teplot v tělese vyplňujícím množinu $M \subset \mathbb{E}_3$, intenzitu osvětlení na rovinné desce, pokrývající množinu $M \subset \mathbb{E}_2$ atd.

V tomto textu se budeme zabývat zejména skalárními funkcemi. Abychom to nemuseli pořád opakovat, učiníme tuto úmluvu: Kdykoliv použijeme název “funkce” bez jakéhokoliv adjektiva, budeme mít na mysli skalární funkci. S vektorovými funkcemi a s jejich integrály se setkáme zejména v kapitolách III.4, III.5, IV.4 a IV.5.

I.3. Limita a spojitost.

I.3.1. Limita funkce – motivace. Připomeňme označení, zavedené ve skriptu [5], str. 46: \mathbb{R}^* je tzv. rozšířená množina reálných čísel. Je to sjednocení množiny reálných čísel \mathbb{R} a dvouprvkové množiny $\{-\infty; +\infty\}$. Další podrobnosti o množině \mathbb{R}^* lze nalézt v [5], str. 46.

Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Když řekneme, že “ $f(X)$ se blíží k a ”, pokud se “ X blíží k A ”, tak si pod tím jistě dokážete něco představit. Z kurzu Matematika I už víte, že matematika umí takovou představu přesně popsat pomocí pojmu “limita”. V následujících odstavcích budeme definovat dva typy limit. V prvním případě budeme předpokládat, že X se blíží k A “ze všech stran”. (Limita v bodě A , odstavec I.3.2.) Ve druhém případě budeme předpokládat, že X se také blíží k bodu A , avšak X přitom patří do nějaké množiny M . (Limita v bodě A vzhledem k množině M , odstavec I.3.8.) X se tedy může blížit k A například po určité křivce nebo z nějaké množiny, na jejíž hranici leží bod A , apod.

I.3.2. Limita funkce. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$, $a \in \mathbb{R}^*$ a existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(A)$, které je celé obsaženo v definičním oboru funkce f . Jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathcal{P}(A)$ platí implikace

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow a,$$

pak číslo a nazýváme *limitou funkce f pro X blížíící se k A* . Píšeme:

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = a \quad \text{nebo} \quad \lim_{x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n} f(x_1, \dots, x_n) = a.$$

Připomeňme, že $X_k \rightarrow A$ je pouze kratší zápis toho, že $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = A$. Podobně, $f(X_k) \rightarrow a$ znamená, že $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(X_k) = a$.

Vidíte, že aby funkce f mohla mít limitu pro $X \rightarrow A$, musí být definovaná v nějakém prstencovém okolí bodu A . Funkce f pak má limitu rovnou a pro $X \rightarrow A$, jestliže, zhruba řečeno, při X blížíícím se k A z jakéhokoliv směru, se funkční hodnoty $f(X)$ blíží k číslu a . V bodě A samotném funkce definovaná být může i nemusí. Existence a hodnota limity $f(X)$ pro $X \rightarrow A$ závisí výhradně na chování funkce f v prstencovém okolí bodu A , nikoliv v bodě A samém. To je stejné, jako u funkce jedné proměnné.

Limitu funkce f n proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ jsme definovali pomocí dvou limit posloupností: $\lim X_k$ a $\lim f(X_k)$. Upozorňujeme čtenáře, že toto není jediná možnost, jak limitu funkce n proměnných definovat. Při vývoji diferenciálního počtu funkcí více proměnných vzniklo více možných definic, všechny však vyjadřují totéž.

Ze skutečnosti, že posloupnost reálných čísel $\{f(X_k)\}$ může mít (pro $k \rightarrow +\infty$) nejvýše jednu limitu a , lze snadno odvodit následující větu:

I.3.3. Věta. *Funkce f může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ nejvýše jednu limitu.*

To znamená, že jsou možné pouze dva případy:

- 1) $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$ neexistuje (jinými slovy: funkce f v bodě A nemá žádnou limitu),
- 2) nebo $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$ existuje a má jedinou hodnotu a .

I.3.4. Příklad. $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ Vyšetříme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$.

Funkce f je definovaná v celém \mathbb{E}_2 s výjimkou bodu $[0, 0]$. $f(x, y)$ závisí na x a y pouze prostřednictvím výrazu $x^2 + y^2$. Když se $[x, y]$ blíží k $[0, 0]$, tak se $x^2 + y^2$ blíží k nule. Označíme-li tedy $z = x^2 + y^2$, pak z $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ plyne, že $z \rightarrow 0$. Proto

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

I.3.5. Příklad. $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ Vyšetříme $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} g(x, y)$.

Funkce g je definovaná v $\mathbb{E}_2 - \{[0, 0]\}$. Představme si nejprve, že $[x, y]$ se blíží k $[0, 0]$ po ose x . To znamená, že $y = 0$, $x \neq 0$ a $x \rightarrow 0$. Pak

$$g(x, y) = g(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Proto $g(x, y) \rightarrow 1$ pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ po ose x . Dále si představme, že $[x, y]$ se blíží k $[0, 0]$ po ose y . To znamená, že $x = 0$, $y \neq 0$ a $y \rightarrow 0$. Pak

$$g(x, y) = g(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Proto $g(x, y) \rightarrow -1$ pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ po ose y . Hodnoty $g(x, y)$ se tedy mohou blížit minimálně ke dvou různým číslům (1 a -1), jestliže $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ z různých směrů. Kdyby limita $g(x, y)$ pro $[x, y] \rightarrow [0, 0]$ existovala, pak by musela mít zároveň hodnotu 1 i -1 . To však odporuje větě I.3.3. Proto limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} g(x, y)$$

neexistuje.

I.3.6. Poznámka. Postup z příkladu I.3.5 lze zobecnit: Jestliže

1) $g(X) \rightarrow a_1$ pro X blížící se k A po nějaké křivce C_1 a

2) $g(X) \rightarrow a_2$ (kde $a_2 \neq a_1$) pro X blížící se k A po nějaké jiné křivce C_2 ,

pak $\lim_{X \rightarrow A} g(X)$ neexistuje.

I.3.7. Příklad. $g(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 + 2x_2)}{x_1 + 2x_2}$ Vyšetříme $\lim_{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0]} g(x_1, x_2)$.

Funkce g je definovaná pro $x_1 + 2x_2 \neq 0$. To znamená, že je definovaná ve všech bodech \mathbb{E}_2 kromě přímky $x_1 + 2x_2 = 0$. Tato přímka prochází bodem $[0, 0]$. Funkce g tedy není definovaná v žádném (celém) prstencovém okolí bodu $[0, 0]$, protože jakékoliv prstencové okolí $[0, 0]$ má s přímkou $x_1 + 2x_2 = 0$ neprázdný průnik. Proto limita

$$\lim_{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0]} g(x_1, x_2)$$

neexistuje.

I.3.8.* Limita funkce vzhledem k množině. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^*$, M je množina v \mathbb{E}_n , A je hromadný bod množiny M a existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(A)$, pro něž platí $\mathcal{P}(A) \cap M \subset D(f)$. Jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathcal{P}(A) \cap M$ platí implikace

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow a,$$

pak číslo a nazýváme limitou funkce f pro X blížící se k A vzhledem k množině M .

Píšeme:

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = a \quad \text{nebo} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n \\ [x_1, \dots, x_n] \in M}} f(x_1, \dots, x_n) = a.$$

Typickou situací která je motivem k zavedení a vyšetřování limity vzhledem k množině M je případ, kdy A se nachází na hranici množiny M a nezávisle proměnná X se neblíží k limitnímu bodu A ze všech stran, ale jenom z množiny M . Je patrné, že aby funkce f mohla mít limitu v bodě A vzhledem k množině M , nemusí již být definovaná v nějakém celém prstencovém okolí $\mathcal{P}(A)$. Stačí, když je definovaná na průniku $\mathcal{P}(A)$ s množinou M . Aby měla uvedená definice rozumný smysl, požadujeme rovněž, aby v množině M existovala alespoň jedna posloupnost bodů $\{X_k\}$, různých od A , která konverguje k A . To je splněno, je-li A hromadným bodem množiny M .

Vidíte, že limita funkce pro $X \rightarrow A$, definovaná v odstavci I.3.2, je vlastně limitou pro $X \rightarrow A$ vzhledem k libovolnému prstencovému okolí bodu A .

Pro limitu funkce více proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ vzhledem k množině $M \subset \mathbb{E}_n$ platí stejná věta, jako I.3.3:

I.3.9.* Věta. Funkce f může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ nejvýše jednu limitu vzhledem k množině $M \subset \mathbb{E}_n$.

I.3.10.* Příklad. Vraťme se k limitě z příkladu I.3.7. Pokud budeme limitu počítat jakožto limitu vzhledem k množině těch x_1 a x_2 , pro která je $x_1 + 2x_2 \neq 0$ (neboli $[x_1, x_2] \in M = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 + 2x_2 \neq 0\}$), pak můžeme označit $u = x_1 + 2x_2$ a pro limitu platí:

$$\lim_{\substack{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0] \\ [x_1, x_2] \in M}} \frac{\sin(x_1 + 2x_2)}{x_1 + 2x_2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Ještě poznamenejme, že místo $\lim_{\substack{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0] \\ [x_1, x_2] \in M}}$ můžeme pod “lim” psát i $\lim_{\substack{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0] \\ x_1 + 2x_2 \neq 0}}$.

I.3.11.* Příklad. Vyšetříme limitu $\lim_{\substack{[x, y] \rightarrow [2, 1] \\ x - 2y \geq 0}} [2x - y + \sqrt{x - 2y}]$.

Uvažovaná funkce je definovaná v polorovině $M = \{[x, y]; x - 2y \geq 0\}$, na jejíž hranici leží bod $[2, 1]$. Jestliže se bod $[x, y]$ blíží k $[2, 1]$ a zároveň $[x, y]$ zůstává v množině M , pak zřejmě $x \rightarrow 2$ a $y \rightarrow 1$ a

$$\lim_{\substack{[x, y] \rightarrow [2, 1] \\ x - 2y \geq 0}} [2x - y + \sqrt{x - 2y}] = 2 \cdot 2 - 1 + \sqrt{2 - 2 \cdot 1} = 3.$$

I.3.12. Rozdíl, součet, součin a podíl limit. Z teorie funkcí jedné proměnné víme, že limita součtu (rozdílu atd.) dvou nebo více funkcí se za jistých jednoduchých předpokladů rovná součtu (rozdílu atd.) limit. Stejná tvrzení platí i pro limity funkcí více proměnných. Tato tvrzení zde znovu vypíšeme, pro jednoduchost však pouze pro limitu definovanou v odstavci I.3.2, tj. limitu pro $X \rightarrow A$.

Předpokládejme, že $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = a$ a $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = b$. Pak

$$\lim_{X \rightarrow A} [f(X) \pm g(X)] = a \pm b,$$

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) \cdot g(X) = a \cdot b,$$

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a}{b}$$

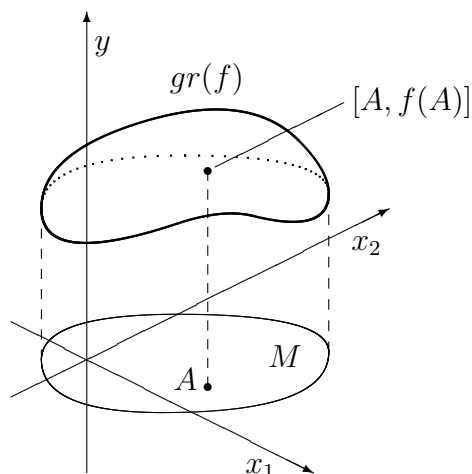
za předpokladu, že výrazy na pravých stranách mají smysl.

Předpoklad o tom, že výrazy na pravých stranách mají smysl, znamená, že na pravých stranách nesmí vzniknout například výrazy $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $5/0$, apod. Stejná tvrzení platí i pro limitu pro $X \rightarrow A$ vzhledem k nějaké množině.

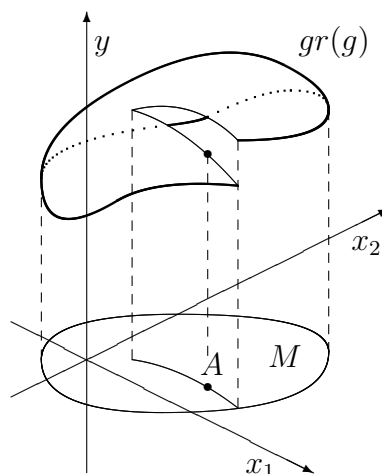
Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné znáte i limity pro $x \rightarrow \pm\infty$. Ve vícerozměrném prostoru \mathbb{E}_n však nemá rozumný smysl definovat dva směry “do $+\infty$ ” nebo “do $-\infty$ ”, jako v \mathbb{E}_1 . Nicméně, lze vyšetřovat chování (limitu) funkce, vzdaluje-li se X neomezeně od počátku (tj. $\|X - O\| \rightarrow +\infty$) buď jakýmkoliv směrem nebo pouze v určité neomezené množině. Takovými typy limit se však v tomto textu zabývat nebudeme.

I.3.13. Spojitost funkce – motivace. Na obr. 5a a obr. 5b vidíte grafy dvou funkcí dvou proměnných na množině $M \subset \mathbb{E}_2$. Zatímco grafem funkce f (obr. 5a) je “neporušená plocha” v \mathbb{E}_3 “nad” množinou M , o grafu funkce g (obr. 5b) se totéž říci nedá. Matematika charakterizuje takové chování funkcí f a g pomocí pojmu “spojitost”: O funkci f můžeme říci, že je “spojitá” v bodě A i na množině M , o funkci g však neplatí ani jedno, ani druhé.

V dalších odstavcích najdete přesné definice spojitosti v bodě A , spojitosti v bodě A vzhledem k množině M a spojitosti na množině M , spolu s dalšími komentáři.



Obr. 5a



Obr. 5b

I.3.14. Spojitost funkce v bodě A . Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $A \in D(f)$ a existuje okolí $\mathcal{U}(A)$, které je celé obsaženo v $D(f)$. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě A , jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathcal{U}(A)$ platí implikace

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow f(A).$$

Porovnáte-li tuto definici s definicí I.3.2 (limita funkce), uvidíte, že platí toto jednoduché tvrzení: *Funkce f je spojitá v bodě A právě tehdy, je-li*

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Definice spojitosti funkce n proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ je tudíž rozšířením definice spojitosti funkce jedné proměnné v bodě $a \in \mathbb{E}_1$, známé z Matematiky I. Smysl definice zůstává stejný. Zhruba řečeno: Když se X blíží k A z jakékoliv strany, funkční hodnoty $f(X)$ se musí blížit k hodnotě funkce f v limitním bodě A , tj. k $f(A)$.

I.3.15. Spojitost funkce v bodě A vzhledem k množině M . Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $M \subset \mathbb{E}_n$ a $A \in D(f) \cap M$. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě A vzhledem k množině M , jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v M platí implikace

$$X_k \rightarrow A \implies f(X_k) \rightarrow f(A).$$

Smysl definice je zřejmý: Spojitost funkce f v bodě A vzhledem k množině M závisí pouze na chování f v bodech množiny M . Když se X blíží k A , přitom ale X zůstává

v M , pak se funkční hodnoty $f(X)$ musí blížit k hodnotě $f(A)$. Jak se chová funkce f mimo množinu M , i to, jestli je tam vůbec definovaná, není podstatné.

Typickou situací, kdy má smysl hovořit o spojitosti funkce f v bodě A vzhledem k množině M , je případ, kdy A leží na hranici množiny M . Pokud A je vnitřním bodem M , pak spojitost v bodě A (ve smyslu definice I.3.14) a spojitost v bodě A vzhledem k množině M splývají.

Příkladem spojitosti funkce vzhledem k množině je u funkce jedné proměnné spojitost v bodě $a \in \mathbb{E}_1$ zprava nebo zleva. Spojitost zprava v bodě a je totiž spojitostí vzhledem k pravému okolí a a spojitost zleva v bodě a je spojitostí vzhledem k levému okolí a .

I.3.16. Spojitost funkce na množině M . Předpokládejme, že f je funkce n proměnných a M je množina v \mathbb{E}_n , obsažená v $D(f)$. Říkáme, že funkce f je spojitá na množině M , jestliže v každém bodě $X \in M$ je spojitá vzhledem k množině M .

Jednoduchým příkladem spojitosti na množině je v teorii funkcí jedné proměnné spojitost funkce na intervalu.

Z definice I.3.16 okamžitě plyne toto jednoduché tvrzení:

Je-li funkce f (n proměnných) spojitá na množině M a $M_0 \subset M$, pak funkce f je také spojitá na množině M_0 .

I.3.17.* Poznámka. Z definice spojitosti funkce v bodě A vzhledem k množině M je patrné, že je-li A izolovaným bodem množiny M , pak jakákoliv funkce, jejíž definiční obor obsahuje bod A , je spojitá v bodě A vzhledem k množině M . Odtud a z definice I.3.16 dále vyplývá, že pokud se množina M skládá pouze z izolovaných bodů, pak každá funkce, která je na ní definovaná, je na ní zároveň spojitá.

Praktickou otázkou je, jak poznáme, že nějaká funkce je spojitá v bodě A , spojitá v bodě A vzhledem k množině M , nebo spojitá na celé množině M . Velmi užitečné jsou při tom následující věty:

I.3.18. Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu, absolutní hodnoty a podílu).

a) Předpokládejme, že funkce f a g (n proměnných) jsou spojitě v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. Pak funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a $|f|$ jsou také spojitě v bodě A . Je-li $g(A) \neq 0$, pak podíl f/g je rovněž spojitou funkcí v bodě A .

(Výše uvedená část věty platí i pro spojitost v bodě A vzhledem k množině M .)

b) Jsou-li funkce f a g (n proměnných) spojitě na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, pak i funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a $|f|$ jsou spojitě na množině M . Je-li navíc $g(X) \neq 0$ pro $\forall X \in M$, pak podíl f/g je rovněž spojitou funkcí na množině M .

Pomocí principu matematické indukce lze nyní snadno ukázat, že stejná tvrzení platí nejenom pro součet dvou funkcí, ale i pro součet jakéhokoliv konečného počtu funkcí. Totéž platí pro rozdíl, součin atd.

Následující věta pojednává o spojitosti složené funkce. Připomeňme, že když vytváříme složenou funkci pomocí funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$, pak za každou z proměnných x_1, \dots, x_n dosadíme nějakou novou funkci, která závisí například na k proměnných t_1, \dots, t_k : $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$. Myšlenka věty o spojitosti složené

funkce je zcela jednoduchá – jsou-li všechny vnitřní funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ spojité v bodě $A = [a_1, \dots, a_k] \in \mathbb{E}_k$, zobrazují-li společně bod A na bod $B \in \mathbb{E}_n$ a je-li vnější funkce f spojitá v bodě B , pak složená funkce je spojitá v bodě A . Podobně, jsou-li všechny vnitřní funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ spojité na množině $G \subset \mathbb{E}_k$, zobrazují-li společně tuto množinu do množiny $M \subset \mathbb{E}_n$ a je-li vnější funkce f spojitá na množině M , pak složená funkce je spojitá na množině G . Nicméně, přesný zápis těchto tvrzení je formálně trochu komplikovaný:

I.3.19. Věta (o spojitosti složené funkce). a) Předpokládejme, že funkce

$$(I.3.1) \quad y = f(x_1, \dots, x_n)$$

je spojitá v bodě $B = [b_1, \dots, b_n]$, funkce

$$(I.3.2) \quad x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$$

jsou všechny spojité v bodě $A = [a_1, \dots, a_k]$ a $B = [\varphi_1(A), \dots, \varphi_n(A)]$. Pak složená funkce

$$(I.3.3) \quad y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k))$$

je spojitá v bodě A .

b) Předpokládejme, že vnější funkce (I.3.1) je spojitá na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, všechny vnitřní funkce (I.3.2) jsou spojité na množině $G \subset \mathbb{E}_k$ a zobrazení

$$(I.3.4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{aligned}$$

zobrazuje množinu G do M . Pak složená funkce (I.3.3) je spojitá na množině G .

Předpoklad, že zobrazení (I.3.4) zobrazuje množinu G do množiny M znamená, že pro každé $T = [t_1, \dots, t_k] \in G$ patří bod $X = [x_1, \dots, x_n]$, jehož souřadnice jsou dány rovnicemi (I.3.4), do množiny M .

Nyní už můžeme vyšetřit spojitost mnoha konkrétních funkcí. Uvádíme příklad:

I.3.20. Příklad. Funkce

$$h(x, y, z) = \ln(x + y) + \cos(y - z)$$

je spojitou funkcí v poloprostoru $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + y > 0\}$ (který je jejím definičním oborem).

Je zřejmé, že G je definičním oborem funkce h . Podmínka $x + y > 0$ vyplývá z toho, že $x + y$ je argumentem logaritmu a logaritmus je definován pouze pro kladné hodnoty svého argumentu.

Funkce $h(x, y, z)$ je součtem dvou složených funkcí: $\ln(x + y)$ a $\cos(y - z)$. Vnější funkce logaritmus je spojitá na $(0, +\infty)$. Vnitřní funkce $x + y$ je spojitá v G a zobrazuje G do $(0, +\infty)$. Složená funkce $\ln(x + y)$ je tedy spojitá v G . Vnější funkce kosinus je spojitá v \mathbb{E}_1 . Vnitřní funkce $y - z$ je spojitá v G a zobrazuje G do \mathbb{E}_1 . Složená funkce

$\cos(y - z)$ je proto spojitá v G . Funkce h , jakožto součet dvou spojitých funkcí v G , je také spojitá funkce v G .

Na konci této kapitoly ještě uvádíme větu, která je obdobou známé věty z teorie funkcí jedné proměnné:

I.3.21. Věta (o nabývání mezihodnot). *Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je spojitá na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, A a B jsou dva body v množině M a L je lomená čára, která spojuje body A a B a která leží celá v M . Pak ke každému číslu y mezi $f(A)$ a $f(B)$ (včetně možné rovnosti) existuje bod $X \in L$ takový, že $y = f(X)$.*

Této větě se také říká, stejně jako analogické větě pro funkce jedné proměnné, Darbouxova věta. Její význam je jednoduchý. Představte si, že se pohybujete po lomené čáře L od A k B . Hodnoty funkce f se v bodech, kterými procházíte, mění spojitě. Funkce f tedy nemůže žádnou zvolenou hodnotu y mezi $f(A)$ a $f(B)$ přeskočit. Někde na lomené čáře L proto musíte narazit na bod X , ve kterém je $y = f(X)$.

I.4. Parciální derivace. Diferencovatelná funkce. Tečná rovina. Diferenciál.

I.4.1. Parciální derivace – motivace. Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné znáte pojem derivace. Jistě si vzpomínáte, že $f'(a)$ je směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. $f'(a)$ vyjadřuje míru, s jakou se mění hodnoty $f(x)$, když proměnná x prochází bodem a . Předpokládejme nyní, že f je funkce n proměnných a $A = [a_1, \dots, a_n]$ je bod v definičním oboru funkce f . Zajímá-li nás míra změny hodnot $f(X)$, když proměnný bod X prochází bodem A , pak musíme nejprve určit směr, kterým X prochází bodem A . V \mathbb{E}_n totiž, na rozdíl od \mathbb{E}_1 , je daleko více možností. Zvolíme-li za příslušný směr například směr rovnoběžný s osou x_1 , pak proměnný bod X má první souřadnici x_1 proměnnou, ale všechny ostatní jsou konstantní a stejné, jako souřadnice bodu A : $X = [x_1, a_2, \dots, a_n]$. (Kreslete si obrázek v \mathbb{E}_2 .) Na $f(X) = f(x_1, a_2, \dots, a_n)$ pak můžeme hledět jako na funkci jedné proměnné x_1 a můžeme ji jako takovou podle x_1 v bodě $x_1 = a_1$ derivovat. Příslušná derivace je rovna limitě

$$(I.4.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h},$$

jestliže tato limita existuje a je konečná. (Srovnejte s definicí III.4.3 ve skriptu [5], str. 63.) Uvažovanou derivaci nazýváme parciální derivací f podle x_1 v bodě A . Tato derivace vyjadřuje míru změny hodnot funkce f , prochází-li proměnná X bodem A směrem shodným s orientací osy x_1 . Přesnou definici parciální derivace obsahuje následující odstavec I.4.2.

Limitu (I.4.1) můžeme zapsat i kratším způsobem: Vraťme se k označení $A = [a_1, \dots, a_n]$. Je-li \mathbf{e}_1 jednotkový vektor, orientovaný souhlasně s osou x_1 (viz označení v odstavci I.2.13), pak $[a_1 + h, a_2, \dots, a_n] = A + h\mathbf{e}_1$. Limita (I.4.1) je tudíž identická s limitou

$$(I.4.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_1) - f(A)}{h}.$$

Nyní můžeme přikročit k definici parciální derivace podle obecné proměnné x_i .

I.4.2. Parciální derivace v bodě A . Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, i je jedno z čísel $1, \dots, n$ a \mathbf{e}_i je jednotkový vektor v \mathbb{E}_n , orientovaný souhlasně se souřadnou osou x_i . Existuje-li konečná limita

$$(I.4.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě A a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i}f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

(Místo A můžeme v závorce též vypsát jednotlivé souřadnice a_1, \dots, a_n .)

I.4.3. Poznámka. Vidíte, že limita (I.4.3) je zobecněním limity (I.4.2) (což není nic jiného, než jen trochu odlišný zápis limity (I.4.1)). Pokud je vám původní zápis (I.4.1) bližší než zápis (I.4.2), můžete v definici I.4.2 vyjít z (I.4.1) a místo limity (I.4.3) můžete parciální derivaci podle x_i definovat limitou

$$(I.4.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) \right].$$

Je úplně jedno, kterou limitu (tj. (I.4.3) nebo (I.4.4)) v definici použijeme, protože obě vyjadřují totéž. V každém případě platí, že pokud parciální derivace f podle x_i v bodě A existuje, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) \right]. \end{aligned}$$

I.4.4. Parciální derivace jako funkce. Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných. Funkci, která každému bodu $X = [x_1, \dots, x_n] \in D(f)$, ve kterém existuje parciální derivace f podle x_i , přiřazuje hodnotu této parciální derivace, nazýváme parciální derivací f podle x_i . Značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}f \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Pro její definiční obor platí inkluze

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f).$$

I.4.5. Výpočet parciální derivace. Z definice I.4.2 je zřejmé, že parciální derivace funkce f podle x_i vznikne tak, že na f hledíme jako na funkci jedné proměnné, a to x_i , a jako takovou ji derivujeme. Ostatní proměnné přitom považujeme za parametry nebo za konstanty. Při výpočtu parciální derivace se budeme řídit přesně stejnými pravidly. Výpočet parciální derivace je pak stejný, jako výpočet derivace funkce jedné proměnné.

I.4.6. Příklad. $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2^2 + 3x_1^5x_2^7 - 3x_1^4$ Pak platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2^2 + 15x_1^4x_2^7 - 12x_1^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1x_2 + 21x_1^5x_2^6 \quad \text{pro } [x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2.$$

I.4.7. Příklad. $f(x, y, z) = 2x^2y^3 - 5xz + e^{x^2+y^2+z^2}$ Pak platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 4xy^3 - 5z + 2xe^{x^2+y^2+z^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 6x^2y^2 + 2ye^{x^2+y^2+z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -5x + 2ze^{x^2+y^2+z^2} & \text{pro } [x, y, z] \in \mathbb{E}_3. \end{aligned}$$

I.4.8. Parciální derivace a spojitost. Z teorie funkcí jedné proměnné víte, že z existence derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a plyne spojitost funkce f v bodě a . (Viz skriptum [5], str. 64.) Otázkou je, zda podobné tvrzení platí i pro funkce více proměnných. Přesně řečeno: Plyne z existence parciálních derivací funkce více proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ spojitost této funkce v bodě A ? Odpověď je: NE. Funkce více proměnných může mít všechny parciální derivace v bodě A a přesto nemusí být v bodě A spojitá. Ukážeme to na jednoduchém příkladu:

Příklad. Necht' f je funkce dvou proměnných, která je definovaná takto:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \text{ a } y \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0. \end{cases}$$

Funkce f má hodnoty 0 v celé rovině \mathbb{E}_2 s výjimkou obou os x a y , na kterých jsou její hodnoty rovny 1. Z definice parciální derivace v odstavci I.4.2 i z jejího vyjádření v poznámce I.4.3 snadno plyne, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h, 0) - f(0, 0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [1 - 1] = 0$$

a podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(0, h) - f(0, 0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [1 - 1] = 0.$$

(Můžete také použít tuto úvahu: Funkce f je konstantní na obou osách x i y . Její parciální derivace v bodě $[0, 0]$ jak podle x , tak podle y , jsou tudíž, jakožto derivace konstantních funkcí, rovny nule.) Funkce f , přestože obě její parciální derivace v bodě $[0, 0]$ existují, však není v bodě $[0, 0]$ spojitá.

Pokračování. Vidíte, že vlastnost "mít parciální derivace" je v případě funkce více proměnných slabší vlastností, než vlastnost "mít derivaci" u funkce jedné proměnné. V případě funkce f jedné proměnné existence derivace v bodě a zajišťuje spojitost f v bodě a a existenci tečny ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$. U funkce více proměnných existence parciálních derivací negarantuje ani jedno, ani druhé. Je proto přirozené se ptát:

- 1) *Co zajišťuje u funkce více proměnných spojitost?*
- 2) *Co zajišťuje u funkce více proměnných existenci tečné roviny a jaká je její rovnice?*

(Graf funkce f je množinou, například plochou, v \mathbb{E}_3 – viz obr. 3. Místo o tečné přímce tedy musíme hovořit o tečné rovině.)

V dalších odstavcích najdete odpovědi na tyto otázky. Uvidíte, že vlastností funkce, která zajišťuje spojitost i existenci tečné roviny je tzv. diferencovatelnost. Z Matematiky I víte, že o funkci $y = f(x)$, která má derivaci v bodě a , se někdy říká, že je diferencovatelná v bodě a . U funkce více proměnných se však diferencovatelností v bodě A míní o něco více, než je pouhá existence parciálních derivací v bodě A . V odstavcích I.4.9 a I.4.10 vyložíme, co to znamená, že funkce více proměnných je diferencovatelná v bodě A . Protože pojem diferencovatelné funkce velmi úzce souvisí s pojmem tečné roviny, budeme význam obou pojmů vysvětlovat současně.

I.4.9. Tečná rovina, diferencovatelná funkce – motivace. Představme si pro jednoduchost, že $y = f(x_1, x_2)$ je funkce dvou proměnných, jejímž grafem je plocha σ , a $A = [a_1, a_2]$ je bod v $D(f)$. Souřadnice v \mathbb{E}_3 budeme v tomto odstavci značit x_1 , x_2 a y . (x_1 a x_2 jsou nezávisle proměnné a y je závisle proměnná.) Označme P bod v \mathbb{E}_3 , jehož souřadnice jsou $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ a $y = f(a_1, a_2)$. (To znamená, že $P = [a_1, a_2, f(a_1, a_2)] = [A, f(A)]$.) P je bod na ploše σ .

Přirozené požadavky na tečnou rovinu k ploše σ v bodě P jsou:

- a) *Tečná rovina prochází bodem P .*
- b) *Tečná rovina není rovnoběžná s osou y .*
- c) *Plocha σ se k tečné rovině v bodě P “přimyká”.*

Požadavek b) vychází z analogie s funkcemi jedné proměnné, kde derivace zajišťuje existenci tečny, která není rovnoběžná s osou y . Rovin v \mathbb{E}_3 , které vyhovují požadavkům a) a b), je nekonečně mnoho. Jsou to grafy všech možných lineárních funkcí $y = L(X)$, kde $X = [x_1, x_2]$,

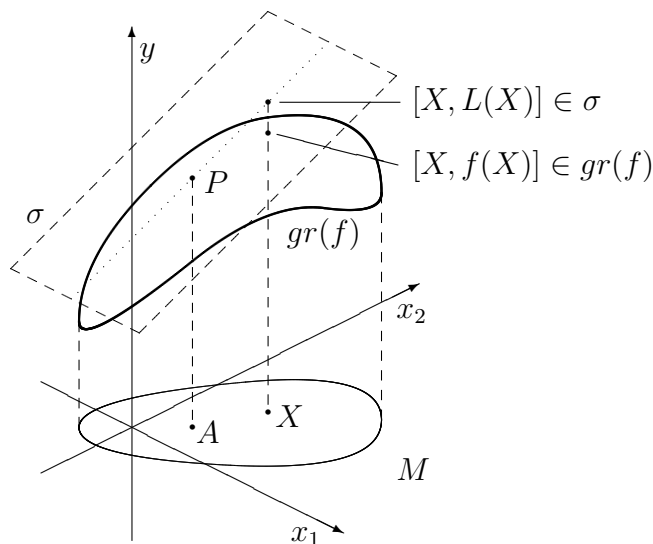
$$(I.4.5) \quad L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

a k_1 a k_2 jsou reálné koeficienty.

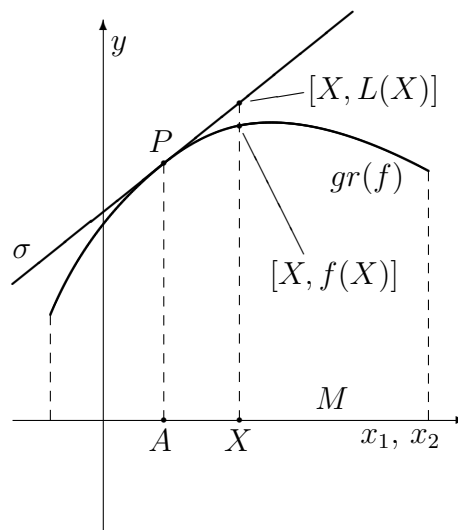
Než objasníme, co přesně rozumíme požadavkem c), vysvětlíme smysl tohoto požadavku na příkladu: Představte si, že máte lupu s proměnným zvětšením. Díváte-li se touto lupou na bod P a nastavujete větší a větší zvětšení, pak plocha σ by se v zorném poli lupy měla méně a méně lišit od tečné roviny. Při hypotetickém nekonečném zvětšení by plocha σ měla v zorném poli lupy s tečnou rovinou zcela splýnout. Popišme tuto představu matematicky. Body na tečné rovině mají souřadnice $[X, L(X)]$. Body na ploše σ mají souřadnice $[X, f(X)]$. Tyto body se liší ve třetí souřadnici. Rozdíl třetích souřadnic je $f(X) - L(X)$. Nastavování stále většího zvětšení lupy znamená, že v zorném poli lupy se zobrazují pouze body ve zmenšujícím se okolí bodu P , tj. body, pro jejichž první dvě souřadnice platí $x_1 \rightarrow a_1$ a $x_2 \rightarrow a_2$. Pak $X \rightarrow A$, tj. $\|X - A\| \rightarrow 0$. Požadavek, aby v zorném poli lupy plocha σ stále více splývala s tečnou rovinou znamená, že $f(X) - L(X)$ se má také blížit k nule, a to dokonce “rychleji”, než $\|X - A\|$. Vyjádřeno matematicky:

$$(I.4.6) \quad \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

Situace je nakreslena na obr. 6a. Na obr. 6b vidíte dvourozměrný řez obrázkem 6a rovinou, procházející body A a X a rovnoběžnou s osou y . (Osa y je čárkovane zakreslena v pozadí.)



Obr. 6a



Obr. 6b

Nyní můžeme vše shrnout: Rovina $y = L(X)$ (kde lineární funkce L je dána rovnicí (I.4.5)) splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše σ v bodě P , jestliže je splněna podmínka (I.4.6). Lze dokázat, že pokud je podmínka (I.4.6) splněna, koeficienty k_1 a k_2 jsou jednoznačně určeny a tečná rovina je tudíž také jednoznačně určená. Důkaz najdete v odstavci I.4.12. K tečné rovině se znovu vrátíme v odstavci I.4.13, kde uvedeme její přesnou definici i rovnici.

Uvedený výklad můžeme nyní snadno zobecnit pro funkci n proměnných. V tomto případě je $A = [a_1, \dots, a_n]$, $X = [x_1, \dots, x_n]$ a lineární funkce L má tvar

$$(I.4.7) \quad L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + \dots + k_n \cdot (x_n - a_n).$$

k_1, \dots, k_n jsou reálné koeficienty. Místo toho, že k ploše, která je grafem funkce $y = f(X)$, existuje v bodě $P = [A, f(A)]$ tečná rovina, se v matematické analýze častěji používá rčení, že “funkce f je v bodě A diferencovatelná”. Přesná a stručná definice je uvedena v následujícím odstavci.

I.4.10. Diferencovatelná funkce. Předpokládejme, že $y = f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných a $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. O funkci f říkáme, že je diferencovatelná v bodě A , jestliže existuje lineární funkce (I.4.7) taková, že

$$(I.4.8) \quad \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

O funkci f říkáme, že je diferencovatelná v množině $M \subset \mathbb{E}_n$, jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny M .

V odstavci I.4.15 najdete jednoduchou postačující podmínku, která umožňuje poznat, že funkce f je diferencovatelná v bodě A nebo v otevřené množině $M \subset \mathbb{E}_n$. Diferencovatelnost funkce f v bodě A má důležité důsledky. S prvními dvěma se seznámíme v odstavcích I.4.11 a I.4.12.

I.4.11. Věta. *Je-li funkce f (n proměnných) diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak je v bodě A spojitá.*

D ů k a z : Z diferencovatelnosti funkce f v bodě A plyne existence lineární funkce L tvaru (I.4.7), která splňuje podmínku (I.4.8). Spojitost funkce f v bodě A lze nyní dokázat takto:

$$\begin{aligned}\lim_{X \rightarrow A} f(X) &= \lim_{X \rightarrow A} [f(A) + (f(X) - L(X)) + (L(X) - f(A))] \\ &= \lim_{X \rightarrow A} \left[f(A) + \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} \|X - A\| + (L(X) - f(A)) \right] = f(A).\end{aligned}$$

I.4.12. Věta. *Je-li funkce f (n proměnných) diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak má v bodě A parciální derivace podle všech proměnných.*

D ů k a z : Vypočítejme například parciální derivaci f podle x_1 v bodě A . Zvolme $X = A + h\mathbf{e}_1 = [a_1 + h, a_2, \dots, a_n]$. Předpokládejme nejprve, že $h > 0$. Pak $\|X - A\| = h$ a $L(X) = f(A) + k_1 \cdot h$. Z podmínky (I.4.8) dostáváme, že

$$0 = \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(A + h\mathbf{e}_1) - f(A)}{h} - k_1 \right).$$

Stejnou rovnost obdržíme i v případě, že $h < 0$ a $h \rightarrow 0^-$. Odtud plyne, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_1) - f(A)}{h} = k_1.$$

Podobně, parciální derivace f podle dalších proměnných x_2, \dots, x_n v bodě A rovněž existují a jsou postupně rovny koeficientům k_2, \dots, k_n .

Nyní se vraťme k tečné rovině ke grafu funkce f , dvou proměnných, v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$. Předpokládejme, že funkce f je v bodě $A = [a_1, a_2]$ diferencovatelná. Z odstavce I.4.9 vyplývá, že tečná rovina je grafem jedné z nekonečně mnoha lineárních funkcí tvaru (I.4.5). (Té, která splňuje podmínku (I.4.6).) V důkazu věty I.4.12 jsme dále odvodili, že v lineární funkci (I.4.5), která vyhovuje podmínce (I.4.6), jsou koeficienty k_1 a k_2 jsou rovny parciálním derivacím f podle x_1 a x_2 v bodě A . Můžeme tedy vyslovit definici:

I.4.13. Tečná rovina. Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$, dvou proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme rovinu o rovnici

$$(I.4.9) \quad y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

(Souřadnice v \mathbb{E}_3 jsou zde značeny x_1, x_2 a y , stejně jako v odstavci I.4.9.)

Definici můžeme snadno zobecnit pro funkci n proměnných:

Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$, n proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_{n+1}$ nazýváme množinu bodů v \mathbb{E}_{n+1} , vyhovujících rovnici

$$(I.4.10) \quad y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n).$$

(Souřadnice v \mathbb{E}_{n+1} jsou zde značeny x_1, \dots, x_n, y .)

Tečná rovina ke grafu funkce n proměnných je rovinou v prostoru \mathbb{E}_{n+1} . Pokud je $n > 2$, pak dimenze prostoru \mathbb{E}_{n+1} je větší, než 3. Takový prostor, i rovinu v něm, si těžko umíme představit. Abychom vyjádřili, že rovina v tomto prostoru je “něčím více”, než pouze rovinou v \mathbb{E}_3 , často ji nazýváme “nadrovinou”. U funkce obecně n proměnných tudíž často místo o tečné rovině hovoříme o tečné nadrovině.

I.4.14. Normála. V tomto odstavci se opět omezíme na funkci dvou proměnných. Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$ je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Normálou grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme přímkou v \mathbb{E}_3 , která prochází bodem P a je v tomto bodě kolmá k tečné rovině. Směrovým vektorem normály je vektor

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), -1 \right).$$

Parametrické rovnice normály jsou

$$(I.4.11) \quad x_1 = a_1 + t \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \quad x_2 = a_2 + t \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \quad y = f(A) - t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Souřadnice v \mathbb{E}_3 jsou zde značeny x_1, x_2, y .)

I.4.15. Lineární aproximace. Diferenciál. Předpokládejme, že funkce f , n proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. Ze všech možných lineárních funkcí (tj. funkcí jejichž grafem je rovina v \mathbb{E}_{n+1}) je zřejmě nejlepší aproximací funkce f v okolí bodu A ta lineární funkce, jejíž grafem je tečná rovina. Taková lineární funkce má rovnici, identickou s rovnicí tečné roviny, tj. s rovnicí (I.4.10).

Pro $X = [x_1, \dots, x_n]$ “blízko” A tudíž přibližně platí

$$(I.4.12) \quad f(X) \doteq f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n).$$

Toto přibližné vyjádření $f(X)$ často zapisujeme ve tvaru

$$(I.4.13) \quad f(X) \doteq f(A) + df,$$

kde

$$(I.4.14) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n).$$

Výraz df nazýváme diferenciálem funkce f v bodě A . Vidíte, že diferenciál závisí jak na poloze bodu A , tak na rozdílech $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$. Proto je přesnější místo pouhého df psát například $df[A](x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

Označíme-li $dx_1 = x_1 - a_1, \dots, dx_n = x_n - a_n$, pak $X = [x_1, \dots, x_n] = [a_1 + dx_1, \dots, a_n + dx_n]$ a

$$(I.4.15) \quad f(a_1 + dx_1, \dots, a_n + dx_n) \doteq f(a_1, \dots, a_n) + df[A](dx_1, \dots, dx_n),$$

kde

$$(I.4.16) \quad df[A](dx_1, \dots, dx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot dx_n.$$

Abychom zdůraznili, že diferenciál funkce více proměnných je, na rozdíl od diferenciálu funkce jedné proměnné, diferenciálem “vzhledem ke všem proměnným”, nazýváme jej též často *totálním diferenciálem*.

I.4.16. Jak poznáme, že funkce je diferencovatelná. V odstavcích I.4.9–I.4.15 jste viděli, že diferencovatelnost funkce f v bodě A je důležitou vlastností, která má řadu důsledků. Otázkou však je, jak jednoduše poznáme, zda daná funkce f je v daném bodě A diferencovatelná. Ověřování podmínky (I.4.8) z definice diferencovatelné funkce by totiž příliš jednoduché nebylo. Odpověď poskytuje následující věta. Část a) se týká diferencovatelnosti funkce f v bodě A , část b) obsahuje postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce f v otevřené množině M .

Věta. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných.

- a) Má-li funkce f spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak je diferencovatelná v bodě A .
- b) Je-li M otevřená množina v \mathbb{E}_n a funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v množině M , pak je diferencovatelná v množině M .

I.4.17. Příklad. $f(x_1, x_2) = 2 \ln x_1 - x_2^2$

Je funkce f diferencovatelná v bodě $A = [1, 3]$? Pokud ano, napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $P = [1, 3, f(1, 3)]$. Napište, jak vypadá diferenciál funkce f v bodě A . Pomocí diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu $f(1.2, 3.2)$.

Řešení: Funkce f má parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2.$$

Obě parciální derivace jsou spojitými funkcemi v bodě A . Funkce f je tudíž (podle věty I.4.16) diferencovatelná v bodě A . Funkce f a její parciální derivace mají v bodě A hodnoty:

$$f(1, 3) = -9, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 3) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 3) = -6.$$

Rovnici tečné roviny v bodě $P = [1, 3, -9]$ získáme dosazením do rovnice (I.4.9):

$$y = -9 + 2(x_1 - 1) - 6(x_2 - 3).$$

(Souřadnice v \mathbb{E}_3 jsou značeny x_1 , x_2 a y .) Diferenciál získáme dosazením do (I.4.15):

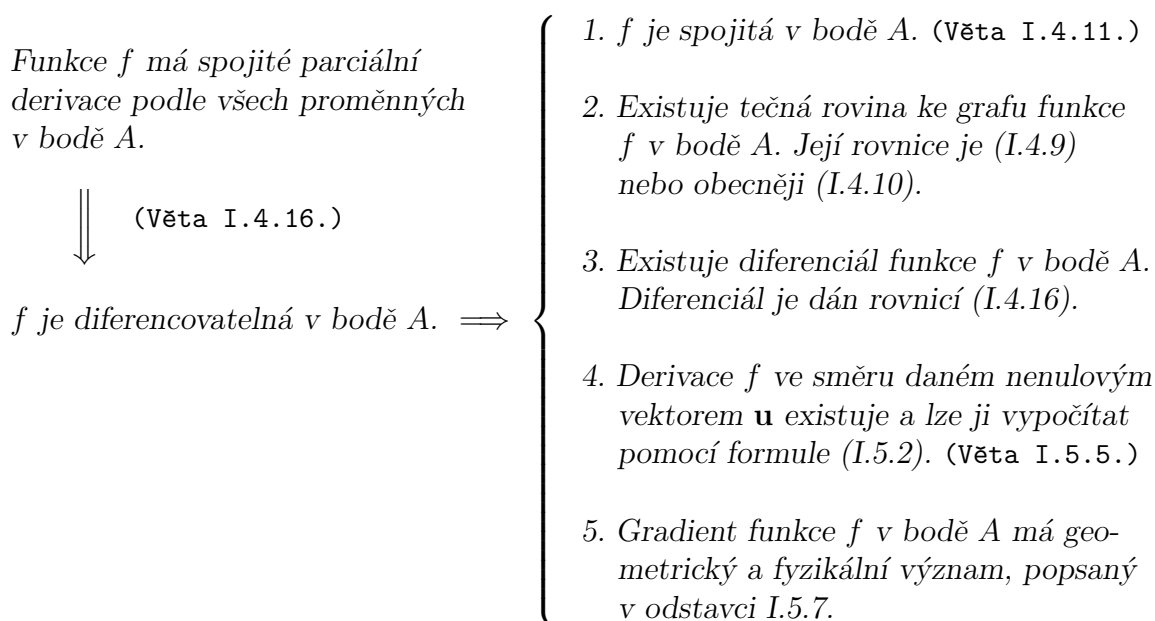
$$df[1, 3](dx_1, dx_2) = 2 dx_1 - 6 dx_2.$$

Přibližnou hodnotu $f(1.1, 3.2)$ vypočítáme pomocí vzorce (I.4.15), který použijeme s hodnotami $dx_1 = 0.1$ a $dx_2 = 0.2$:

$$f(1.1, 3.2) \doteq f(1, 3) + df[1, 3](dx_1, dx_2) = -9 + 2 \cdot 0.1 - 6 \cdot 0.2 = -10.$$

I.4.18. Shrnutí důležitých vět. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných a $A \in \mathbb{E}_n$. Věta I.4.16 říká, že ze spojitosti parciálních derivací funkce f v bodě A plyne diferencovatelnost f v bodě A . Z diferencovatelnosti pak plyne spojitost funkce f v bodě

A (věta I.4.11) a celá řada dalších vlastností. Následující schéma symbolicky shrnuje tyto a některé další důležité věty. Body 4. a 5. budou probrány až v kapitole I.5, v zájmu úplnosti schématu je však zařazujeme i zde.



I.5. Derivace v daném směru. Gradient. Parciální derivace vyšších řádů. Parciální derivace složené funkce.

I.5.1. Derivace v daném směru. V odstavcích I.4.1 a I.4.2 je vysvětlena a definována parciální derivace funkce f , n proměnných, v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. Připomínáme, že parciální derivace f podle x_i v bodě A vyjadřuje míru změny hodnot $f(X)$, když “proměnný” bod X prochází bodem A směrem, shodným s orientací osy x_i . Tento směr je definován jednotkovým vektorem \mathbf{e}_i . Přirozená potřeba vyjádření míry, s jakou se mění hodnoty $f(X)$, prochází-li X bodem A směrem, definovaným nějakým obecným jednotkovým vektorem \mathbf{u}^0 (který nemusí být shodný s žádným z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$) vede k následující definici:

Předpokládejme, že f je funkce n proměnných, $A \in D(f)$ a \mathbf{u}^0 je jednotkový vektor v \mathbb{E}_n . Existuje-li konečná limita

$$(I.5.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{u}^0) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme derivací funkce f ve směru \mathbf{u}^0 v bodě A (nebo také směrovou derivací f v bodě A podle \mathbf{u}^0) a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

I.5.2. Poznámka. Definici derivace funkce f v daném směru můžeme snadno rozšířit i na případ, kdy směr je definován obecným nenulovým vektorem, který nemusí být

jednotkový: Jestliže \mathbf{u} je nenulový vektor v \mathbb{E}_n , pak jednotkovým vektorem ve směru \mathbf{u} je vektor $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. Derivaci f v bodě A ve směru \mathbf{u} definujeme rovností

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

(Derivace na pravé straně už je známá z odstavce I.5.1.)

V odstavci I.5.5 uvidíte, že postačující podmínkou pro existenci derivace funkce f v daném směru v bodě A je diferencovatelnost funkce f v bodě A . V tomto odstavci se také dozvíte, jak je možné derivaci funkce v daném směru jednoduše vypočítat. Vzorec, který budeme při výpočtu používat, obsahuje tzv. gradient funkce. S tímto pojmem se proto nyní seznámíme.

I.5.3. Gradient. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných x_1, \dots, x_n a A je bod v \mathbb{E}_n , ve kterém má funkce f parciální derivace podle všech proměnných. Gradientem funkce f v bodě A nazýváme vektor, který značíme $\text{grad } f(A)$ a pro který platí:

$$\text{grad } f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right),$$

nebo v souladu s označením, zavedeným v odstavci I.2.12,

$$\text{grad } f(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \mathbf{e}_n.$$

Vektorovou funkci, která každému bodu $X \in D(f)$, ve kterém má funkce f parciální derivace podle všech proměnných, přiřazuje vektor $\text{grad } f(X)$, nazýváme krátce gradientem funkce f . Značíme ji $\text{grad } f$. Je patrné, že $D(\text{grad } f) \subset D(f)$.

I.5.4. Příklad. $f(x, y, z) = 3xy + e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ Vypočítejte $\text{grad } f$.

Funkce f má parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}.$$

Gradientem f je vektorová funkce

$$\text{grad } f = (3y - 2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, 3x - 2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)})$$

Gradientem f ve zvoleném bodě A , například $A = [0, 1, -1]$, je vektor

$$\text{grad } f(0, 1, -1) = (3, -2e^{-2}, 2e^{-2}).$$

I.5.5. Existence a výpočet derivace funkce ve směru \mathbf{u} . Za předpokladu, že funkce f je diferencovatelná v bodě A a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je nenulový vektor v \mathbb{E}_n , je možné dokázat, že derivace f ve směru \mathbf{u} v bodě A existuje a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot u_n \right).$$

Tuto formuli lze zapsat jednodušším způsobem pomocí gradientu funkce f v bodě A . Výsledek je tak důležitý, že jej zapíšeme jako samostatnou větu:

Věta. Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. Předpokládejme dále, že \mathbf{u} je nenulový vektor v \mathbb{E}_n . Pak derivace funkce f v bodě A ve směru \mathbf{u} existuje a je možné ji vypočítat pomocí formule

$$(I.5.2) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\text{grad } f(A) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \quad \left(= \text{grad } f(A) \cdot \mathbf{u}^0, \quad \text{kde } \mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right).$$

I.5.6. Příklad. Vypočítejme derivaci funkce $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ v bodě $A = [1, -1]$ ve směru, definovaném vektorem $\mathbf{u} = (3, 2)$ (pokud derivace existuje).

Řešení: Parciální derivace funkce f jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 5y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 2y.$$

Obě parciální derivace jsou spojité v celém \mathbb{E}_2 , funkce f je tudíž (podle věty I.4.16) diferencovatelná v celém \mathbb{E}_2 . Pro nás je podstatné, že je diferencovatelná v bodě A . Hledaná derivace tudíž existuje. Gradientem f v bodě A je vektor

$$\text{grad } f(1, -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \right) = (6x + 5y, 5x + 2y) \Big|_{[x,y]=[1,-1]} = (1, 3).$$

Pomocí vzorce (I.5.2) dostáváme:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, -1) = \frac{(1, 3) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{(1, 3) \cdot (3, 2)}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

I.5.7. Geometrický a fyzikální význam gradientu. Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je diferencovatelná v bodě A . Předpokládejme dále, že $\text{grad } f(A)$ je nenulový vektor. Ptejme se: *V jakém směru má funkce f největší derivaci?* Označíme-li α úhel, který svírají vektory $\text{grad } f(A)$ a \mathbf{u} , pak z formule (I.5.2) plyne:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\|\text{grad } f(A)\| \|\mathbf{u}\| \cos \alpha}{\|\mathbf{u}\|} = \|\text{grad } f(A)\| \cos \alpha.$$

výraz na pravé straně má maximální možnou hodnotu, je-li $\alpha = 0$. (Pak $\cos \alpha = 1$.) Můžeme tedy učinit závěr: Funkce f má v bodě A největší derivaci ve směru, definovaném vektorem $\text{grad } f(A)$. Jinými slovy: vektor $\text{grad } f(A)$ udává směr maximálního růstu funkce f v bodě A . Odtud též plyne, že vektor $\text{grad } f(A)$ je kolmý k izokřivce (pro $n = 2$) nebo k izoploše (pro $n = 3$), která prochází bodem A .

Ukažme jednu možnou fyzikální interpretaci odvozeného výsledku: Předpokládejme, že $T(x_1, x_2, x_3)$ je pole teplot v tělese $V \subset \mathbb{E}_3$ a $A \in V$. Vektor $\text{grad } T(A)$ udává směr, ve kterém je v bodě A růst teploty maximální. Naopak, $-\text{grad } T(A)$ udává směr maximálního poklesu teploty v bodě A . Toto má velmi důležitý důsledek v termomechanice: dle tzv. Fourierova zákona se teplo šíří právě směrem maximálního poklesu teploty a tzv. tepelný tok je tudíž vektor, rovný $-k \text{grad } T$. (Součinitel k závisí na materiálu tělesa a nazývá se *koeficient tepelné vodivosti*.)

I.5.8. Tečna a normála k izokřivce. Příklad. Jaká je rovnice tečny a normály ke křivce, definované v \mathbb{E}_2 rovnicí $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3x - 2y = 1$, v bodě $A = [-1, 1]$?

Ř e š e n í : Množina bodů $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, vyhovujících rovnici $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3x - 2y = 1$, je izokřivkou funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 3x - 2y$.

Vyřešme problém nejprve na obecné úrovni. Předpokládejme, že funkce $f(x_1, x_2)$ je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2]$, grad $f(A)$ je nenulový vektor a izokřivka $f(x_1, x_2) = k$ prochází bodem A , tj. $f(a_1, a_2) = k$. Vektor grad $f(A)$ je kolmý k izokřivce (= vrstevnici) funkce f v bodě A . (Viz odstavec I.5.7.) Proto je také kolmý k přímce, která je tečnou k izokřivce funkce f v bodě A . Bod $X = [x_1, x_2]$ tudíž leží na tečně k izokřivce právě když vektor $X - A$ je kolmý ke grad $f(A)$, tj. právě když $\text{grad } f(A) \cdot (X - A) = 0$. Rozepsáním tohoto skalárního součinu získáme rovnici tečny:

$$(I.5.3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2) = 0.$$

Normálou k izokřivce v bodě A je přímka, která prochází bodem A a je v něm kolmá k izokřivce, tj. kolmá k tečně. Její rovnicí (jak plyne z analytické geometrie v \mathbb{E}_2) proto je:

$$(I.5.4) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_2 - a_2) = 0.$$

(Směrovým vektorem normály je grad $f(A)$.)

Nyní se vraťme k zadané funkci $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 3x - 2y$ a k označení proměnných x, y místo x_1, x_2 . Funkce f má v bodě $[-1, 1]$ parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = (2x - 2y + 3) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=1}} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = (6y - 2x - 2) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=1}} = 6.$$

Dosazením do obecné rovnice (I.5.3) získáme rovnici tečny k izokřivce $x^2 + 3y^2 - 2xy + 3x - 2y = 1$ v bodě $[-1, 1]$:

$$-(x + 1) + 6(y - 1) = 0.$$

Dosazením do rovnice (I.5.4) obdržíme rovnici normály k téže izokřivce v bodě $[-1, 1]$:

$$6(x + 1) + (y - 1) = 0.$$

I.5.9. Tečná rovina a normála k izoploše. V odstavci I.4.13 jsme se seznámili s rovnicí tečné roviny k ploše v \mathbb{E}_3 , která je grafem funkce dvou proměnných. Jaká je však rovnice tečné roviny a normály k ploše v \mathbb{E}_3 , která je dána obecnou rovnicí $f(x_1, x_2, x_3) = k$, v bodě $A = [a_1, a_2, a_3]$? (V souladu s terminologií, zavedenou v odstavci I.2.6, se jedná o izoplochu funkce f .) Předpokládáme, že souřadnice bodu A uvedené rovnici vyhovují, funkce f je v bodě A diferencovatelná a jejím gradientem v bodě A je nenulový vektor.

Analogický problém, pouze “o jednu dimenzi níže”, jsme řešili v odstavci I.5.8. Pomocí podobných úvah můžeme i zde odvodit, že tečná rovina má rovnici

$$(I.5.5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(A) \cdot (x_3 - a_3) = 0.$$

Normálou v bodě A je přímka v \mathbb{E}_3 , která prochází bodem A a je k zadané ploše, tj. také k tečné rovině (I.5.5), kolmá. Směrovým vektorem normály je tudíž vektor grad $f(A)$. Parametrická rovnice normály je:

$$(I.5.6.) \quad X = A + t \cdot \text{grad } f(A); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rozepsáno do souřadnic:

$$x_1 = a_1 + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \quad x_2 = a_2 + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \quad x_3 = a_3 + t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3}(A), \quad t \in \mathbb{R}.$$

I.5.10. Parciální derivace vyšších řádů. Předpokládejme, že f je funkce n proměnných x_1, \dots, x_n a $i \in \{1; \dots; n\}$. Připomeňme, že funkce $\partial f / \partial x_i$ je parciální derivace f podle x_i .

Je-li $j \in \{1; \dots; n\}$, pak parciální derivaci podle x_j funkce $\partial f / \partial x_i$ nazýváme parciální derivací 2. řádu (nebo druhou parciální derivací) funkce f podle x_j a x_i . Označujeme ji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \left(\text{případně} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pokud } j = i \right).$$

Pro definiční obory platí inkluze $D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) \subset D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f)$.

Parciální derivace třetího, čtvrtého a dalších řádů jsou definovány obdobně.

I.5.11. Příklad. $f(x, y, z) = 5x^2 + 2y^3 + xy^2 \cos z$

Vypočítejme parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Ř e š e n í : $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + y^2 \cos z$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + 2xy \cos z$.

Proto platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y \cos z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -y^2 \sin z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2y \cos z.$$

I.5.12. Záměna pořadí parciálních derivací. V příkladu I.5.11 vychází, že

$$(I.5.7) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Druhá parciální derivace funkce f podle x a y tedy vyšla stejná, když jsme funkci f nejprve derivovali podle x a potom podle y , nebo naopak. Je přirozené se ptát, zda je to náhoda, nebo zda to tak musí vyjít vždy. Správná odpověď je někde uprostřed: Rovnost (I.5.7) obecně platná není – viz následující příklad. Na druhé straně, pro “dostatečně rozumné” funkce f rovnost (I.5.7) platí – viz věta I.5.13.

Příklad. Zde ukážeme příklad funkce f , pro kterou rovnost (I.5.7) neplatí. Necht' $f(x, y) = |x| + y$. Je patrné, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{E}_2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in \mathbb{E}_2, x > 0, \\ -1 & \text{pro } [x, y] \in \mathbb{E}_2, x < 0. \end{cases}$$

Parciální derivace f podle x neexistuje v bodech typu $[0, y]$, tj. na ose y . Odtud plyne, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{E}_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{E}_2, x \neq 0.$$

Vidíte, že například v bodě $O = [0, 0]$ derivace $\partial^2 f / \partial x \partial y$ existuje a je rovna nule, zatímco derivace $\partial^2 f / \partial y \partial x$ neexistuje.

Následující věta ukazuje, že pro širokou třídu funkcí f nicméně rovnost (I.5.7) platí. Větu objevil a dokázal francouzský matematik A. Clairaut (1713–1765).

I.5.13. Věta (o záměně pořadí parciálních derivací). *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných x_1, \dots, x_n a $i, j \in \{1; \dots; n\}$. Jestliže obě druhé parciální derivace $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ a $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ existují v bodě $X = [x_1, \dots, x_n]$ a alespoň jedna z nich je v bodě X spojitá, pak*

$$(I.5.8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X).$$

I.5.14. Parciální derivace složené funkce – motivace. Představme si, že v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ funkce $p(x_1, x_2, x_3)$ udává tlak v bodě $[x_1, x_2, x_3]$. V D se pohybuje sonda, přičemž její poloha v časovém okamžiku t je $[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$. Jaká je změna (tj. derivace podle času) tlaku, naměřeného přístrojem umístěným v sondě?

Předpokládejme, že všechny funkce jsou diferencovatelné ve všech uvažovaných bodech. ($p(x_1, x_2, x_3)$ je diferencovatelná ve všech bodech oblasti D a $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ jsou diferencovatelné ve všech uvažovaných časových okamžicích t .)

Označme p_s tlak, naměřený přístrojem v sondě. p_s závisí na poloze sondy a ta závisí prostřednictvím funkcí $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ na čase t . p_s je proto funkcí t : $p_s(t) = p(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Máme vyjádřit derivaci $p_s(t)$ podle t .

Jsou-li všechny funkce explicitně známé, jedná se o jednoduchý problém. Je-li například

$$(I.5.9) \quad p(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} + 100 - x_3, \quad x_1(t) = x_2(t) = ct, \quad x_3(t) = 2ct$$

(kde c je konstanta), pak dosazením $x_1(t), x_2(t)$ a $x_3(t)$ do $p(x_1, x_2, x_3)$ získáme explicitní vyjádření funkce $p_s(t)$:

$$p_s(t) = p(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = e^{-6c^2 t^2} + 100 - 2ct.$$

Odtud plyne, že

$$(I.5.10) \quad \frac{dp_s}{dt}(t) = -12c^2 t e^{-6c^2 t^2} - 2c.$$

Neznáme-li explicitní vyjádření funkcí $p(x_1, x_2, x_3)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$, pak jde o to, jak můžeme alespoň na obecné úrovni vyjádřit derivaci složené funkce $p_s(t) = p(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Lze dokázat, že platí vzorec

$$(I.5.11) \quad \frac{dp_s}{dt}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t).$$

Slovy: *Derivaci složené funkce podle t obdržíme tak, že vnější funkci postupně derivujeme podle všech proměnných, každou derivaci násobíme derivací příslušné proměnné podle t a všechny takto získané členy sečteme.* Přesvědčte se sami, že mají-li všechny funkce $p(x_1, x_2, x_3)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$ konkrétní tvar (I.5.9), pak použitím vzorce (I.5.11) vyjde derivace funkce $p_s(t)$ stejně, jako v (I.5.10).

Zobecnění vzorce (I.5.11) obsahuje následující věta:

I.5.15. Věta (o parciální derivaci složené funkce). Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných a

$$(I.5.12) \quad x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$$

jsou funkce k proměnných. Derivaci složené funkce

$$y = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k))$$

podle proměnné t_j (kde $j \in \{1; \dots; k\}$) lze vyjádřit formulí

$$(I.5.13) \quad \frac{\partial y}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}.$$

Formule platí za předpokladu, že vnější funkce f je diferencovatelná v bodě $X = [x_1, \dots, x_n]$, vnitřní funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou diferencovatelné v bodě $T = [t_1, \dots, t_k]$ a souřadnice bodů X a T jsou svázány rovnicemi (I.5.12). Parciální derivace funkce f jsou uvažovány v bodě X , parciální derivace funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou uvažovány v bodě T .

Vzorec (I.5.13) lze zapsat i tímto způsobem:

$$(I.5.14) \quad \frac{\partial y}{\partial t_j} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

(pro $j \in \{1; \dots; k\}$).

I.5.16. Příklad. Předpokládejme, že f je diferencovatelná funkce dvou proměnných v \mathbb{E}_2 a $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ pro $[s, t] \in \mathbb{E}_2$. Ukažme, že funkce g vyhovuje v \mathbb{E}_2 rovnici

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Označme $x = s^2 - t^2$ a $y = t^2 - s^2$. Pak $g(s, t) = f(x, y)$. Podle věty I.5.15 platí:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-2s),$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (2t).$$

Odtud plyne, že

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st \frac{\partial f}{\partial x} - 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(-2st \frac{\partial f}{\partial x} + 2st \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

I.6. Extrémy funkcí více proměnných.

I.6.1. Lokální extrémy. Nechť f je funkce n proměnných a $A \in D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in \mathcal{P}(A) : f(X) \leq f(A)$.

Podobně, funkce f má v bodě A lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(A)$ takové, že $\forall X \in \mathcal{P}(A) : f(X) \geq f(A)$.

Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Změníme-li nerovnosti v definici lokálních extrémů na ostré, získáme definici tzv. ostrých lokálních extrémů:

Říkáme, že funkce f má v bodě A ostré lokální maximum (respektive ostré lokální minimum), existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in \mathcal{P}(A) : f(X) < f(A)$ (respektive $\forall X \in \mathcal{P}(A) : f(X) > f(A)$).

I.6.2. Poznámka. Umíte si představit, jak vypadá graf funkce dvou proměnných v okolí bodu, ve kterém má funkce ostré lokální maximum? Například tak, že grafem je plocha v \mathbb{E}_3 , podobající se zemskému povrchu v okolí vrcholu nějaké hory. Tento vrchol může být lokálním maximem, nikoliv však nutně celkovým, absolutním maximem, protože o kus dále se mohou nacházet vyšší hory.

I.6.3. Nutná podmínka pro lokální extrém – úvaha. Předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že $y = f(x_1, x_2)$ je diferencovatelná funkce dvou proměnných. Jejím grafem je plocha v \mathbb{E}_3 . Rozvinete-li trochu představu, popsanou v předcházející poznámce I.6.2, pak vás nepřekvapí zjištění, že funkce f může mít lokální extrém pouze v těch bodech, ve kterých je tečná rovina vodorovná (tj. rovnoběžná s rovinou x_1, x_2). Slova “může mít” a “pouze” jsou podstatná: Sdělují, že v jiných bodech, než v těch ve kterých je tečná rovina vodorovná, lokální extrém existovat nemůže. Zároveň však netvrdí, že v každém bodě, ve kterém je tečná rovina vodorovná, musí funkce f nutně mít lokální extrém. To by nebyla pravda: Jistě znáte místo, kterému se na horách říká “sedlo”. V takovém místě je tečná rovina k zemskému povrchu vodorovná, ale žádné lokální maximum nebo lokální minimum tam není.

Rovnicí tečné roviny ke grafu funkce $y = f(x_1, x_2)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je rovnice (I.4.9). Tečná rovina je vodorovná, jsou-li obě parciální derivace f podle x_1 i x_2 v bodě A nulové. Jinými slovy: tečná rovina (I.6.1) je vodorovná, je-li gradient funkce f v bodě A nulový vektor.

Dospěli jsme k závěru: Diferencovatelná funkce f může mít (nikoliv musí, ale může!) lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých má všechny parciální derivace nulové, neboli její gradient je nulový vektor. V následující větě je tento důležitý poznatek znovu formulován.

I.6.4. Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Nechť funkce f , n proměnných, je diferencovatelná v bodě A . Má-li f v bodě A lokální extrém, pak*

$$(I.6.1) \quad \text{grad } f(A) = \mathbf{0}.$$

I.6.5. Poznámka. Jinými slovy: *diferencovatelná funkce f může mít v bodě A lokální extrém pouze tehdy, platí-li (I.6.1).*

Z Matematiky I znáte nutnou podmínku pro to, aby funkce $y = f(x)$, která má derivaci v bodě a , mohla mít v bodě a lokální extrém. Nutnou podmínkou je rovnost $f'(a) = 0$. Podmínka (I.6.1) je zcela analogická. Funkce f je ovšem nyní funkcí n proměnných a podmínka (I.6.1) vyjadřuje, že

$$(I.6.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0.$$

I.6.6. Kritický (stacionární) bod. Zahrneme-li do našich úvah i funkce, které nejsou v bodě A diferencovatelné, můžeme konstatovat: *Funkce f (n proměnných) může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ lokální extrém pouze v případě, že*

- i) *f je diferencovatelná v bodě A a $\text{grad } f(A) = \mathbf{0}$,*
- ii) *nebo f není diferencovatelná v bodě A .*

Bod A , který vyhovuje podmínce i) nebo podmínce ii), se nazývá kritický bod funkce f . (V literatuře se též často používá název stacionární bod.)

I.6.7. Postačující podmínka pro lokální extrém – úvaha a označení. Jistě si pamatujete, že pro funkci jedné proměnné je rovnost $y = f'(a)$ pouze podmínkou nutnou, nikoliv však postačující pro to, aby funkce měla v bodě a lokální extrém. (Viz [5], str. 71.) Podobně, ani pro funkci f n proměnných není rovnost (I.6.1) (nebo rovnosti (I.6.2)) postačující pro existenci lokálního extrému v bodě A . Toto lze dokumentovat na příkladu již zmíněného sedla – viz odstavec I.6.3. Vzniká otázka: Co je postačující podmínkou pro lokální extrém? Odpověď ukážeme v jednodušším případě funkce dvou proměnných: $y = f(x_1, x_2)$. Použijme ještě jednu analogii s funkcí jedné proměnné: V případě funkce $y = f(x)$ je postačující pro lokální extrém současná platnost podmínek $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$ (ostré lokální minimum) nebo $f'(a) = 0$ a $f''(a) < 0$ (ostré lokální maximum). (Viz [5], str. 75.) U funkce dvou proměnných je situace komplikovanější, protože druhých parciálních derivací má funkce f v bodě A více. Můžeme z nich sestavit matici, kterou označíme \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}.$$

Označme dále

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \quad \Delta_2(A) = \det \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}.$$

Lze dokázat, že platí věta:

I.6.8. Věta (postačující podmínky pro lokální extrémy). Předpokládejme, že $y = f(x_1, x_2)$ je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě A a $\text{grad } f(A) = \mathbf{0}$. Pak platí:

- a) Jestliže $\Delta_1(A) > 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, má funkce f v bodě A ostré lokální minimum.
- b) Jestliže $\Delta_1(A) < 0$ a $\Delta_2(A) > 0$, má funkce f v bodě A ostré lokální maximum.
- c) Je-li $\Delta_2(A) < 0$, pak f nemá v bodě A lokální extrém.

I.6.9.* Poznámka. Nerovnosti $\Delta_1(A) > 0$ a $\Delta_2(A) > 0$ zajišťují, že matice \mathcal{M} je tzv. pozitivně definitní, tj. pro každý nenulový vektor \mathbf{z} v \mathbb{E}_2 , který si představujeme jako sloupec (matici typu 2×1), platí: $(\mathcal{M} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} > 0$. (Druhá tečka označuje skalární součin sloupcových vektorů $\mathcal{M} \cdot \mathbf{z}$ a \mathbf{z} .) Tvrzení a) věty I.6.8 lze tedy formulovat takto: Je-li A kritickým bodem funkce $y = f(x_1, x_2)$ a matice \mathcal{M} je pozitivně definitní, má f v bodě A ostré lokální minimum.

Bez podrobnějšího vysvětlování pouze konstatujeme, že tvrzení b) věty I.6.8 lze také formulovat takto: Je-li A kritickým bodem funkce $y = f(x_1, x_2)$ a matice \mathcal{M} je negativně definitní, má f v bodě A ostré lokální maximum.

Nerovnost $\Delta_2(A) < 0$, spolu s předpokladem, že A je kritický bod funkce f , zajišťují, že graf funkce f v okolí bodu A vytváří tzv. sedlo. (Viz též odstavec I.6.3.) Funkce f tedy v bodě A nemá lokální extrém.

Pokud je $\Delta_2(A) = 0$ nebo $\Delta_2(A) > 0$ a $\Delta_1(A) = 0$, pak podle věty I.6.8 nemůžeme rozhodnout o tom, zda funkce f má nebo nemá v bodě A lokální extrém a případně jakého typu extrém je. (Věta totiž v takovém případě netvrdí nic.)

I.6.10. Postup hledání lokálních extrémů funkce f dvou proměnných.

1. Najdeme všechny body, ve kterých je funkce f diferencovatelná a má tam obě parciální derivace rovny nule.

(O diferencovatelnosti lze rozhodnout pomocí věty I.4.16.)

2. Vypočítáme druhé parciální derivace funkce f a zjistíme, jaké hodnoty ve všech nalezených bodech mají výrazy Δ_1 a Δ_2 . O existenci a typu lokálního extrému pak rozhodneme pomocí věty I.6.8.

Postup v bodě 2. je možný pouze tehdy, jsou-li splněny předpoklady věty I.6.8. Je-li A kritický bod funkce f a předpoklady věty I.6.8 v bodě A (případně žádná z podmínek a), b), c) této věty) splněny nejsou, pak rozhodnutí o existenci a typu lokálního extrému je obecně složitějším problémem, který lze řešit pouze podrobnější analýzou konkrétní funkce f .

I.6.11. Příklad. Najdeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Ř e š e n í : První parciální derivace funkce f jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x.$$

Obě parciální derivace jsou spojité v \mathbb{E}_2 , funkce f je tudíž diferencovatelná v \mathbb{E}_2 . Položíme-li parciální derivace rovny nule, obdržíme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé x a y :

$$4x^3 - 4y = 0, \quad 4y^3 - 4x = 0.$$

Vyjádríme-li z první rovnice y ($y = x^3$) a dosadíme-li toto do druhé rovnice, dostaneme: $4x^9 - 4x = 0$, neboli $x^9 - x = 0$. Výraz $x^9 - x$ můžeme rozložit:

$$\begin{aligned} x^9 - x &= x(x^8 - 1) = x(x^4 + 1)(x^4 - 1) = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) \\ &= x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že rovnice $x^9 - x = 0$ má reálné kořeny: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Odpovídající hodnoty y jsou: $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$. Funkce f má tudíž tři kritické body: $[0, 0]$, $[-1, -1]$ a $[1, 1]$. f může mít lokální extrém pouze v těchto bodech. Ke stanovení, ve kterém z nich skutečně je lokální extrém a jedná-li se o lokální maximum nebo lokální minimum, použijeme větu I.6.8. Druhé parciální derivace funkce f jsou:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Nyní snadno vypočítáme, že $\Delta_1(0, 0) = 0$, $\Delta_2(0, 0) = -16$, $\Delta_1(-1, -1) = 12$, $\Delta_2(-1, -1) = 128$, $\Delta_1(1, 1) = 12$ a $\Delta_2(1, 1) = 128$. Body $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ vyhovují předpokladům v části a) věty I.6.8. (Δ_1 i Δ_2 jsou kladné.) Proto f má v obou těchto bodech ostré lokální minimum. Bod $[0, 0]$ splňuje předpoklad v části c) věty I.6.8. V tomto bodě tudíž funkce f nemá ani lokální maximum, ani lokální minimum. (Jedná se o “sedlový bod”.)

I.6.12. Maximum a minimum funkce na množině. Nechť f je funkce n proměnných a $M \subset D(f)$. Říkáme, že f nabývá v bodě $A \in M$ svého *maxima na množině M* , jestliže $\forall X \in M : f(X) \leq f(A)$. Píšeme: $f(A) = \max_{X \in M} f(X)$ nebo jenom $f(A) = \max_M f$, respektive $f(A) = \max_M f$.

Maximum funkce f na celém svém definičním oboru značíme krátce $\max f$.

Analogicky můžeme definovat i *minimum funkce f na množině M* . Značíme je $\min_{X \in M} f(X)$ nebo jenom $\min_M f$, respektive $\min_M f$. Minimum funkce f na celém definičním oboru $D(f)$ značíme krátce $\min f$.

Maximum a minimum funkce f na množině M nazýváme souhrnně *extrémy funkce f na množině M* . Abychom tyto extrémy odlišili od lokálních extrémů, používáme též často názvy *absolutní extrémy* nebo *globální extrémy*.

Podobně, jako je tomu u funkcí jedné proměnné, i v případě funkce více proměnných se může stát, že některý z extrémů (nebo dokonce oba) neexistuje.

I.6.13. Příklad. Funkce $f : z = x^2 - y^2$ není ani zdola, ani shora omezená v \mathbb{E}_2 . V žádném bodě \mathbb{E}_2 tudíž nenabývá svého maxima ani minima.

V otevřeném kruhu $K = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 < 1\}$ funkce f je omezená, neboť pro $[x, y] \in K$ platí:

$$(I.6.3) \quad |f(x, y)| = |x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2 < 1.$$

Nicméně, maximum ani minimum f na K neexistuje. Ukažme to například pro maximum: Předpokládejme, že $\max_K f$ existuje. Ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Vzhledem k (I.6.3) musí být hodnota maxima menší, než 1. ($\max_K f$ je největší

funkční hodnotou f na K a jsou-li všechny funkční hodnoty menší, než 1, musí být i maximum menší, než 1.) Zvolme bod $[x, y] \in K$ na ose x . Jeho y -ová souřadnice je tudíž nulová, tj. $[x, y] = [x, 0]$. Předpokládejme, že se zvolený bod blíží k bodu $[1, 0]$, který leží na hranici K . Pak $x \rightarrow 1$ a $f(x, 0) = x^2 \rightarrow 1$. Odtud je patrné, že funkce f nabývá v K hodnot, jakkoliv blízkých číslu 1. Její maximum v K proto nemůže být menší, než 1. To je však spor s tím, že $\max_K f < 1$.

V uzavřeném kruhu $\bar{K} = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ již maximum i minimum funkce f existují: $\max_{\bar{K}} f = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$ a $\min_{\bar{K}} f = f(0, 1) = f(0, -1) = -1$.

Vyšetření extrémů funkce více proměnných na dané množině (tj. jejich existence, polohy a hodnot) patří mezi nejdůležitější okruhy problémů, kterými se diferenciální počet funkcí více proměnných zabývá. Hledání polohy extrémů funkce na dané množině jsou věnovány odstavce I.6.15–I.6.16. Následující věta obsahuje postačující podmínky pro existenci extrému. Její důležitost spočívá v tom, že jsou-li podmínky splněny, pak se nám při hledání extrému nemůže stát to, že hledáme něco, co neexistuje.

I.6.14. Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na dané množině). *Je-li $M \subset \mathbb{E}_n$ neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce f spojitá na M , pak v množině M existují body X_1 a X_2 takové, že $f(X_1) = \max_M f$ a $f(X_2) = \min_M f$.*

Jinými slovy: *spojitá funkce na neprázdné množině M , která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.*

I.6.15. Postup hledání absolutních extrémů. Předpokládejme, že už jsme se přesvědčili (například pomocí věty I.6.14), že maximum i minimum funkce f n proměnných na množině $M \in \mathbb{E}_n$ existují a řešíme problém, jak tyto extrémy najít. Podobně, jako je tomu u funkce jedné proměnné, funkce f může svých absolutních extrémů na množině M nabývat

- a) v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých je f diferencovatelná a má tam všechny parciální derivace rovny nule,
- b) nebo v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých funkce f není diferencovatelná,
- c) nebo v bodech $X \in \partial M$.

(M° je vnitřek a ∂M je hranice množiny M . Body, vyhovující podmínkám a) a b), jsou kritické body funkce f v M° .) Odtud vychází postup hledání absolutních extrémů f na množině M :

1. Najdeme body $X \in M^\circ$, ve kterých je funkce f diferencovatelná a má nulové parciální derivace.

(Znovu připomínáme, že o diferencovatelnosti lze rozhodnout pomocí věty I.4.16.)

2. Najdeme body $X \in M^\circ$, ve kterých funkce f není diferencovatelná.

(Tj. body $X \in M^\circ$, ve kterých neexistuje tečná rovina ke grafu f .)

3. Vyšetříme, ve kterých bodech $X \in \partial M$ může nabývat funkce f svých absolutních extrémů na hranici množiny M .

(Možný postup je ukázán v příkladu I.6.16.)

4. Nakonec vypočítáme hodnoty funkce f ve všech získaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.

I.6.16. Příklad. Vyšetřeme absolutní extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

na obdélníku $M = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$. (Vyšetřením extrémů se míní vyšetření jejich existence, polohy a hodnoty.)

Ř e š e n í: Funkce f je spojitou funkcí na neprázdné, omezené, uzavřené množině M . Proto podle věty I.6.14 $\max_M f$ a $\min_M f$ existují. f má parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2.$$

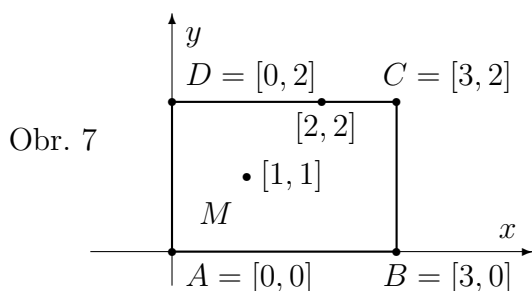
Obě parciální derivace jsou spojitými funkcemi v celém \mathbb{E}_2 , tudíž také v množině M° . Funkce f je proto (podle věty I.4.11) diferencovatelná v M° .

Položíme-li obě parciální derivace rovny nule, získáme soustavu dvou rovnic pro neznámé x a y :

$$2x - 2y = 0, \quad -2x + 2 = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení $x = 1, y = 1$. Bod $[1, 1]$ je jediným kritickým bodem funkce f . Tento bod leží v M° , proto je pro nás zajímavý.

Nyní vyšetříme extrémy funkce f na hranici obdélníku M . Hranice ∂M je sjednocením čtyř úseček: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} a \overline{DA} . (Viz obr. 7.)



Obr. 7

Na \overline{AB} je $y = 0$ a $f(x, 0) = x^2$ pro $0 \leq x \leq 3$. Funkce $f(x, 0)$, proměnné x , je rostoucí, proto má minimum (rovné 0) v bodě $x = 0$ a maximum (rovné 9) v bodě $x = 3$. Poznamenejme si tedy, že $\max_{\overline{AB}} f = f(3, 0) = 9$ a $\min_{\overline{AB}} f = f(0, 0) = 0$.

Na \overline{BC} je $x = 3$ a $f(3, y) = 9 - 4y$ pro $0 \leq y \leq 2$. Funkce $f(3, y)$, proměnné y , je klesající, proto má maximum (rovné 9) v bodě $y = 0$ a minimum (rovné 5) v bodě $y = 2$. Zjistili jsme tedy, že $\max_{\overline{BC}} f = f(3, 0) = 9$ a $\min_{\overline{BC}} f = f(3, 2) = 5$.

Na \overline{CD} je $y = 2$ a $f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$ pro $0 \leq x \leq 3$. Způsobem, který znáte z Matematiky I, snadno zjistíme, že $\max_{\overline{CD}} f = f(0, 2) = 4$ a $\min_{\overline{CD}} f = f(2, 2) = 0$. (Také je to patrné z toho, že $f(x, 2) = (x - 2)^2$.)

Na \overline{DA} je $x = 0$ a $f(0, y) = 2y$ pro $0 \leq y \leq 2$. Opět snadno zjistíme, že $\max_{\overline{DA}} f = f(0, 2) = 4$ a $\min_{\overline{DA}} f = f(0, 0) = 0$.

Největší ze všech hodnot funkce f na ∂M je tedy $9 = f(3, 0)$ a nejmenší je $0 = f(0, 0) = f(2, 2)$. Porovnáme-li tyto hodnoty s hodnotou funkce f v kritickém bodě $[1, 1]$ ($f(1, 1) = 1$), vidíme, že největší hodnotou zůstává 9 a nejmenší hodnotou zůstává 0. Můžeme tedy učinit závěr:

$$\max_M f = f(3, 0) = 9 \quad \text{a} \quad \min_M f = f(0, 0) = f(2, 2) = 0.$$

I.6.17.* Vázané extrémy. Lagrangeův multiplikátor. Představte si, že hledáte extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na jednotkové kružnici $x^2 + y^2 = 1$. K této úloze se vrátíme poté, až na obecnější úrovni ukážeme, jak ji lze řešit.

Obecná úloha zní: Hledáme maximum nebo minimum funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ za podmínky, že

$$(I.6.4) \quad g(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Podmínce (I.6.4) se říká *vazba* a extrémů funkce f v množině bodů, vyhovujících podmínce (I.6.4), se nazývají *vázané extrémy*.

Pro jednoduchost předpokládejme, že f i g jsou diferencovatelné funkce v oblasti $D \subset \mathbb{E}_n$. Utvořme funkci

$$(I.6.5) \quad F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n).$$

Proměnné λ se říká *Lagrangeův multiplikátor*. Lze dokázat, že platí:

Funkce f může mít, za podmínky (I.6.4), extrémy pouze v těch bodech $[x_1, \dots, x_n] \in D$, ke kterým existuje hodnota $\lambda \in \mathbb{R}$ taková, že $[x_1, \dots, x_n, \lambda]$ je kritickým bodem F .

Kritickými body funkce F jsou (vzhledem k předpokládané diferencovatelnosti funkcí f i g) ty body, ve kterých jsou všechny parciální derivace F podle x_1, \dots, x_n a λ rovny nule. To znamená body, ve kterých jsou splněny rovnice

$$(I.6.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ g(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Toto je soustava $n + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých: x_1, \dots, x_n a λ . Vyřešením této soustavy získáme souřadnice bodů, ve kterých funkce f může mít vázaný extrém. Ve kterém z těchto bodů se vázaný extrém skutečně nachází a jedná-li se o maximum nebo minimum, rozhodneme podle povahy konkrétní úlohy.

Nyní se vraťme k úloze, formulované na začátku tohoto odstavce. Předně: funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ je spojitá na jednotkové kružnici $x^2 + y^2 = 1$, která je neprázdnou, uzavřenou a omezenou množinou v \mathbb{E}_2 . Podle věty I.6.14 vázané absolutní extrémy f na zmíněné jednotkové kružnici existují. Funkce F má tvar:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

a soustavou rovnic (I.6.6) je

$$2x + \lambda \cdot 2x = 0, \quad 4y + \lambda \cdot 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Všechna řešení této soustavy jsou: a) $x = 0, y = \pm 1, \lambda = -2$, b) $x = \pm 1, y = 0, \lambda = -1$. Funkce f tedy může mít své vázané extrémy na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ pouze v bodech $[0, 1]$, $[0, -1]$, $[1, 0]$ a $[-1, 0]$. Výpočtem a porovnáním hodnot funkce f v těchto bodech zjistíme, že

$$\max_{x^2+y^2=1} f(x, y) = f(0, \pm 1) = 2 \quad \text{a} \quad \min_{x^2+y^2=1} f(x, y) = f(\pm 1, 0) = 1.$$

Podobným způsobem lze řešit i úlohy na vázané extrémy, které obsahují více vazebních podmínek typu (I.6.4), než jednu. Výklad příslušné metody můžete najít například v knize [2], str. 97–102.

I.7. Implicitní funkce.

I.7.1. Implicitní funkce – motivace. Jsme zvyklí na to, že funkce jedné proměnné $y = f(x)$ je zadána rovnicí, například $y = 3x^2 + 1$. Někdy se ale stává, že funkce $y = f(x)$ je výsledkem nějakých výpočtů a místo explicitního (tj. výslovného, zjevného) vyjádření y v závislosti na x obdržíme rovnici, která vypadá například takto:

$$(I.7.1) \quad 2y - 3x^2y + 2x^3 + 4 = 0$$

nebo

$$(I.7.2) \quad y^5 - 7xy^2 + 2y - 28x^2 - 11 = 0.$$

Je přirozené se ptát:

Je rovnicí (I.7.1) nebo (I.7.2) jednoznačně definovaná nějaká funkce $y = f(x)$? Pokud ano, jakou má tato funkce derivaci?

K rovnicím (I.7.1) a (I.7.2) se ještě vrátíme. Zatím však řešme tento problém na obecné úrovni, kdy místo rovnice (I.7.1) nebo (I.7.2) máme rovnici

$$(I.7.3) \quad F(x, y) = 0,$$

kde F je funkce dvou proměnných. Předpokládejme, že funkce F je spojitá. Otázka zůstává stejná:

(O) *Je rovnicí (I.7.3) jednoznačně definována nějaká funkce $y = f(x)$? Pokud ano, jakou má tato funkce derivaci?*

Je-li odpověď na první otázku kladná, pak říkáme, že rovnicí (I.7.3) je funkce $y = f(x)$ definována implicitně. (Implicitně znamená nevýslovně, skrytě.) Funkci $y = f(x)$ pak nazýváme krátce implicitní funkcí.

Otázku (O) je možné interpretovat geometricky: Body $[x, y] \in \mathbb{E}_2$, vyhovující rovnici (I.7.3) jsou body, ve kterých graf funkce $z = F(x, y)$ (plocha v \mathbb{E}_3) protíná rovinu x, y . Otázka tedy zní: *Je tento průnik křivkou v rovině x, y , která je grafem nějaké funkce $y = f(x)$?*

Je-li možné rovnici (I.7.3) vyřešit vzhledem k y a získat jednoznačné vyjádření y v závislosti na x , pak je problém jednoduchý. Příkladem je rovnice (I.7.1): z rovnice (I.7.1) snadno vypočítáte, že

$$(I.7.4) \quad y = \frac{2x^3 + 4}{3x^2 - 2} \quad \text{pro } x \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Rovnicí (I.7.4) je funkce $y = f(x)$ zadána zjevně, tj. explicitně, a její vlastnosti již umíme vyšetřit známými metodami. Rovnice (I.7.2) však představuje složitější problém, neboť y se z ní vyjádřit nedá.

Na obecné úrovni, kdy rovnice (I.7.3) může být jakkoliv složitá a y z ní vypočítat nelze, vyčerpávající odpověď na otázku (O) neexistuje. Nicméně, matematická analýza zná větu, která umožňuje získat alespoň “lokálně platnou” odpověď. Tato věta zhruba řečeno říká, že je-li rovnice (I.7.3) splněna v bodě $[x_0, y_0]$ a jsou-li splněny některé další předpoklady, pak v jistém okolí bodu x_0 je definovaná funkce $y = f(x)$, jejíž graf v okolí bodu $[x_0, y_0]$ splývá s průnikem grafu funkce $F(x, y)$ s rovinou x, y . Neboli, dosadíme-li

do (I.7.3) za $y = f(x)$, je rovnice (I.7.3) (tj. $F(x, f(x)) = 0$) splněna pro x v okolí bodu x_0 . Věta neříká ani jak funkce $y = f(x)$ explicitně vypadá, ani jak velká jsou zmíněná okolí bodů x_0 a $[x_0, y_0]$. Na druhé straně však říká, jakou má funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0 derivaci:

I.7.2. Věta (o implicitní funkci). Předpokládejme, že

- a) funkce $F(x, y)$ má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$,
- b) $F(x_0, y_0) = 0$,
- c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ a $\epsilon > 0$ a jediná funkce $y = f(x)$, definovaná v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pro kterou platí:

1. $y_0 = f(x_0)$,
2. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : y = f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ a $F(x, f(x)) = 0$,
3. funkce f je spojitá a má spojitou derivaci f' v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
4. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$.

I.7.3. Poznámka. Abychom větu příliš nekomplikovali, doplníme pouze v této poznámce, že za obecnějšího předpokladu, že funkce F má v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu k , je možné dokázat, že i implicitně definovaná funkce (kteřou krátce nazýváme „implicitní funkce“) $y = f(x)$ má v okolí bodu x_0 spojité derivace do řádu k .

Formuli v tvrzení 4. věty I.7.2 lze snadno odvodit. Na y v rovnici (I.7.3) hledíme jako na funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x . Levou stranu rovnice (I.7.3) derivujeme podle pravidla o derivování složené funkce (věta I.5.14). Obdržíme:

$$(I.7.5) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Vyjádríme-li odtud y' a uvědomíme-li si, že $y = f(x)$ a $y' = f'(x)$, dostaneme žádaný vzorec. Použijeme-li zjednodušené označení

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y},$$

můžeme vzorec zapsat ve tvaru

$$(I.7.6) \quad y' = -\frac{F_x}{F_y},$$

kde y' je uvažováno v bodě x a F_x a F_y v bodě $[x, f(x)]$.

Obdobným způsobem lze získat i vyjádření druhé derivace funkce $y = f(x)$. Předpokládejme, že funkce F má spojité druhé parciální derivace. Rovnici (I.7.5) derivujeme ještě jednou podle x . Označujeme-li pro jednoduchost parciální derivace funkce F i nadále pouze indexy, obdržíme:

$$F_{xx} + F_{yx} y' + F_{xy} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0.$$

Využijeme-li rovnosti $F_{xy} = F_{yx}$ (viz věta I.5.12) a dosadíme-li sem vyjádření y' z (I.7.6), dostaneme:

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

kde y'' je uvažováno v bodě x a všechny derivace funkce F v bodě $[x, f(x)]$. Tuto formuli si nemusíte pamatovat. Je však dobré si pamatovat postup, který k ní vede. To znamená, že rovnici (I.7.3) derivujeme dvakrát podle x a poté vyjádříme y'' .

I.7.4. Příklad. Vraťme se k rovnici (I.7.2). Funkce na levé straně je

$$F(x, y) = y^5 - 7xy^2 + 2y - 28x^2 - 11.$$

Dosazením do rovnice (I.7.2) můžete ověřit, že rovnice je splněná například v bodě $[2, 3]$. Tj. $F(2, 3) = 0$. F , jakožto polynom dvou proměnných, je funkcí, která je spojitá a má spojitě i parciální derivace všech řádu v celém \mathbb{E}_2 . Parciální derivace F podle y v bodě $[2, 3]$ je:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(2, 3) = (5y^4 - 14xy + 2) \Big|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = 323 \neq 0.$$

Podle věty I.7.2 existuje jediná funkce $y = f(x)$, definovaná v okolí bodu $x_0 = 2$, která pro všechna x z tohoto okolí vyhovuje rovnici (I.7.2). Tato funkce je rovnicí (I.7.2) v okolí bodu $x_0 = 2$ implicitně definovaná. Explicitní tvar této funkce neznáme, věta I.7.2 pouze poskytuje informaci o existenci takové funkce. Kromě toho, pomocí věty I.7.2 můžeme vypočítat i derivaci této funkce v bodě $x_0 = 2$:

$$y'(2) = f'(2) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = -\frac{-7y^2 - 56x}{5y^4 - 14xy + 2} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = -\frac{-166}{323} \doteq 0.51.$$

Vypočítejte nyní sami, pomocí postupu popsaného v odstavci I.7.3, hodnotu $y''(2)$.

I.7.5. Zobecnění věty o implicitní funkci. Místo rovnice (I.7.3) se můžeme zabývat rovnicí

$$(I.7.7) \quad F(x, y, z) = 0$$

a ptát se, za jakých podmínek je touto rovnicí definovaná implicitně funkce $z = f(x, y)$. Následující věta dává "lokální" odpověď:

Věta. Předpokládejme, že

- a) funkce $F(x, y, z)$ má spojitě parciální derivace v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$,
- b) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
- c) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ a $\epsilon > 0$ a jediná funkce $z = f(x, y)$, definovaná v okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$, pro kterou platí:

1. $z_0 = f(x_0, y_0)$,
2. $\forall [x, y] \in \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) : z = f(x, y) \in (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$ a $F(x, y, f(x, y)) = 0$,

3. funkce f je spojitá a má spojitě parciální derivace podle x a podle y v okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0, y_0)$,

$$4. \forall [x, y] \in \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) : \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial z},$$

přičemž parciální derivace funkce f jsou uvažovány v bodě $[x, y]$ a parciální derivace funkce F v bodě $[x, y, f(x, y)]$.

Zkuste nyní sami, pomocí postupu popsaného v odstavci I.7.3, vypočítat, jak budou vypadat druhé parciální derivace $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$ a $\partial^2 f / \partial y^2$.

I.8. Cvičení.

1. Určete definiční obory a obory hodnot daných funkcí. (Viz odstavec I.2.2.)

$$a) f(x, y) = e^{16-x^2-y^2} \quad b) f(x, y) = \frac{1}{x(y+3)} \quad c) f(x, y) = \ln(e^2 + x^2 + y^2)$$

$$d) f(x, y) = \sqrt[4]{y-x} \quad e) f(x, y) = \sqrt{y-x^2} \quad f) f(x, y) = \cos(3x^2 - 2y + 5)$$

$$g) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} \quad h) f(x, y, z) = yz \ln x$$

$$i) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \quad j) f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x + y + z)$$

2. Vypočítejte následující limity, pokud existují. (Viz odstavce I.3.2–I.3.12.)

$$a) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} \quad b) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4}{x^4 + y^2} \quad c) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^y \sin x}{x}$$

$$d)^* \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x \neq 0}} \frac{e^y \sin x}{x} \quad e)^* \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [2,2] \\ x+y \neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \quad f)^* \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x \neq y}} \frac{x+y}{x-y}$$

3. Na jakých množinách $M \subset \mathbb{E}_2$ jsou následující funkce spojité? (Viz odstavce I.3.14–I.3.20.)

$$a) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \quad b) f(x, y) = \frac{x^2 + y^4 + 1}{x^2 + x - 12} \quad c) f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 2y}$$

$$d) f(x, y) = \ln \frac{y}{x} \quad e) f(x, y) = \cos(x^2 + xy) \quad f) f(x, y) = e^{1/(x+y)}$$

4. Na jakých množinách $M \subset \mathbb{E}_3$ jsou následující funkce spojité? (Viz odstavce I.3.14–I.3.20.)

$$a) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2 - 4} \quad b) f(x, y, z) = \ln(xyz) \quad c) f(x, y, z) = e^z \sin(x+y)$$

$$d) f(x, y, z) = \frac{x+y}{x-y} \quad e) f(x, y, z) = \ln \frac{1}{xyz} \quad f) f(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|}$$

$$g) f(x, y, z) = \frac{1}{\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad h) f(x, y, z) = \frac{y+4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$$

5. Vypočítejte parciální derivace podle x a podle y . (Viz odstavce I.4.1–I.4.7.)
- a) $f(x, y) = x^2 - 7xy$ b) $f(x, y) = (x + 2)^2y$ c) $f(x, y) = x^2(3y - 5)^7$
d) $f(x, y) = x \sin(xy)$ e) $f(x, y) = \ln(x^2y)$ f) $f(x, y) = \frac{2x}{x - \sin y}$
g) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ h) $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$ i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
j) $f(x, y) = e^x \ln y$ k) $f(x, y) = \frac{1}{\operatorname{tg}(y/x)}$ l) $f(x, y) = y e^{x^2y}$
6. Vypočítejte parciální derivace podle x , y a z . (Viz odstavce I.4.1–I.4.7.)
- a) $f(x, y, z) = \frac{x^5y^2}{z^3}$ b) $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$
c) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x + y + z)$ d) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$
e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ f) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$
g) $f(x, y, z) = x^2 \sin^2 y \cos z^2$ h) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}}$
7. Vypočítejte parciální derivace druhého řádu následujících funkcí. (Viz odstavce I.5.9–I.5.12.)
- a) $f(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$ b) $f(x, y) = x e^y + y + x^5y^4 - 13$
c) $f(x, y) = e^{x+3y} + x \ln y + y \ln x + 3$ d) $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3x - \ln(y^2 + x)$
e) $f(x, y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$ f) $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin(xy) + x e^{y^2/2}$
8. Vypočítejte gradient funkce f v bodě A a směrovou derivaci $\partial f / \partial \mathbf{s}(A)$. (Viz odstavce I.5.3–I.5.6.)
- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$, $A = [1, 1]$, $\mathbf{s} = (3, 4)$
b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^3 - 17$, $A = [1, 1, 1]$, $\mathbf{s} = (1, 1, 1)$
c) $f(x, y, z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $A = [1, 0, 0.5]$, $\mathbf{s} = (1, 2, 2)$
9. Napište rovnici tečné roviny a normály v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ k ploše, která je grafem funkce $z = f(x, y)$. (Viz odstavce I.4.13.)
- a) $f(x, y) = 2x + y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ b) $f(x, y) = \sin(x - y)$, $x_0 = 0$, $y_0 = \pi$
c) $f(x, y) = \sqrt{x} - y$, $x_0 = 4$, $y_0 = 1$ d) $f(x, y) = \ln(x + y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$
10. Napište rovnici tečné roviny a normály v bodě A k ploše, která je daná rovnicí $f(x, y, z) = 0$. (Viz odstavce I.5.10.)
- a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, $A = [1, 1, 1]$
b) $f(x, y, z) = \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz - 4 = 0$, $A = [0, 1, 2]$

11. Vyšetřete lokální extrémů daných funkcí. (Viz odstavce I.6.1–I.6.11.)

- a) $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y$ b) $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
c) $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$ d) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$
e) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$ f) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$
g) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ h) $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$
i) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 - 11$ j) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy + 7$

12. Vyšetřete existenci, polohu a hodnotu absolutních extrémů daných funkcí na daných množinách. (Viz odstavce I.6.12–I.6.16.)

- a) $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 2$, $M = \{[x, y]; x \geq 0, y \leq 2, y \geq 2x\}$
b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 7$, $M = \{[x, y]; x \geq 0, y \leq 4, y \geq x\}$
c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$, $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3\}$
d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$, $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0\}$
e) $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$, $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
f) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{[x, y]; x \geq -1, y \geq -1, x + 2y \leq 2\}$

13. Ukažte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$ implicitně definovaná funkce $y = f(x)$. Vypočítejte derivaci této funkce v bodě x_0 a napište rovnici tečny k jejímu grafu v bodě $[x_0, y_0]$. (Viz odstavce I.7.1–I.7.4.)

- a) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 4$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$
b) $F(x, y) = x^2 - 3xy + 5xy^2 - 6y^2 - 32$, $[x_0, y_0] = [2, 3]$
c) $F(x, y) = x e^{y/x} - e^5$, $[x_0, y_0] = [1, 5]$
d) $F(x, y) = \operatorname{arctg}(2x + y)$, $[x_0, y_0] = [0, 0]$

14. Ukažte, že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{E}_3$ implicitně definovaná funkce $z = f(x, y)$. Vypočítejte její parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a napište rovnici tečné roviny k jejímu grafu v bodě $[x_0, y_0, z_0]$. (Viz odstavec I.7.5.)

- a) $F(x, y, z) = z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$
b) $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = \left[-1, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right]$
c) $F(x, y, z) = xz^2 - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 1]$
d) $F(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, $[x_0, y_0, z_0] = [\pi, \pi, \pi]$

II. Riemannův integrál funkcí dvou a tří proměnných

II.1. Dvojný integrál – motivace a definice. Dvourozměrná Jordanova míra a měřitelné množiny v \mathbb{E}_2 .

II.1.1. Dělení obdélníku a jeho norma. Nechť $\langle a, b \rangle$ je uzavřený interval na ose x a $\langle c, d \rangle$ je uzavřený interval na ose y . Pak kartézský součin $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ je obdélníkem v \mathbb{E}_2 , jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami x nebo y .

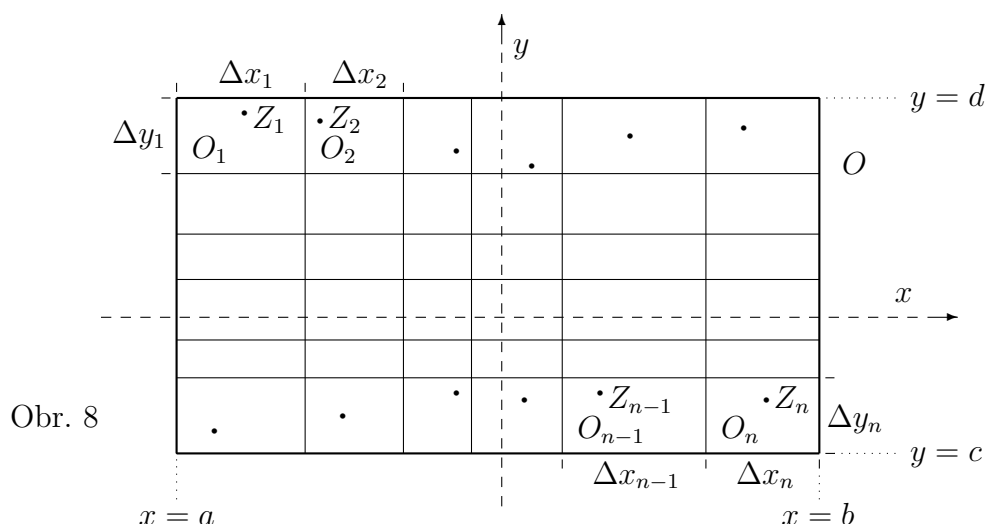
Obdélník O můžeme rozdělit pravoúhloú sítí úseček rovnoběžných s osou x nebo s osou y na n dílčích obdélníků O_1, \dots, O_n . Systém těchto obdélníků se nazývá *dělení* obdélníku O . Nazveme-li popsané dělení D , pak maximum délek stran všech dílčích obdélníků O_1, \dots, O_n označujeme $\|D\|$ a nazýváme *norma* dělení D . Jsou-li délky stran dílčích obdélníků O_1, \dots, O_n rovny $\Delta x_1, \Delta y_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n$ (viz obr. 8), pak zřejmě platí:

$$\|D\| = \max \{ \Delta x_1; \Delta y_1; \dots; \Delta x_n; \Delta y_n \}.$$

II.1.2. Fyzikální motivace. Představme si, že tenká deska má tvar obdélníku $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ v rovině xy . Deska nemusí být homogenní a její plošná hustota (tj. hmotnost vztažená k jednotce plošného obsahu – označme ji $\rho(x, y)$) se může měnit v závislosti na poloze bodu $[x, y]$. Chceme vypočítat hmotnost m desky.

Je-li deska homogenní a její plošná hustota ρ je tudíž konstantní, jedná se o jednoduchý problém: m je rovno součinu ρ a obsahu desky, tj. $m = \rho \cdot (b - a) \cdot (d - c)$.

V obecném případě, kdy ρ nemusí být konstantní, můžeme obdélník O rozdělit dělením D na mnoho menších obdélníků O_1, \dots, O_n . Označme Δx_i a Δy_i délky stran i -tého obdélníku O_i (pro $i = 1 \dots, n$). Je-li dělení D “dostatečně jemné” (tj. norma $\|D\|$ je “dosti malá”), pak neuděláme velkou chybu, když funkci ρ na každém z obdélníků O_1, \dots, O_n nahradíme konstantou. “Vhodnou” konstantou na O_i je hodnota $\rho(Z_i)$,

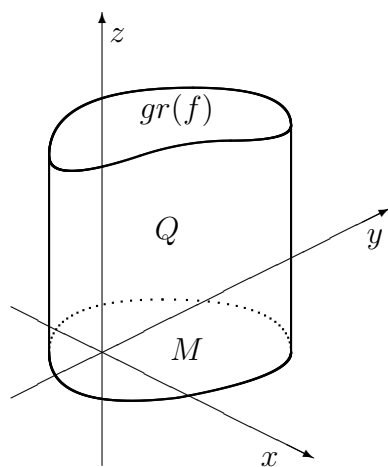


kde Z_i je nějaký zvolený bod (značka) v O_i . (Viz obr. 8.) Hmotnost m_i části desky, pokrývající obdélník O_i , je pak přibližně rovna součinu $\rho(Z_i)$ a obsahu O_i : $m_i \doteq \rho(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i$. Hmotnost celé desky O lze přibližně vyjádřit:

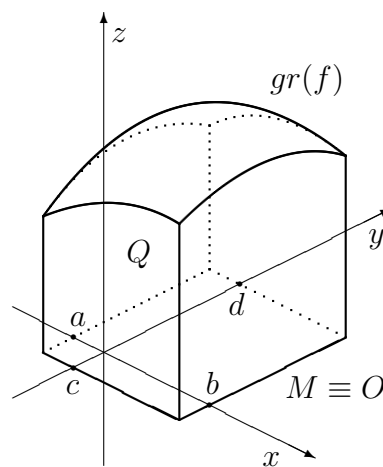
$$(II.1.1) \quad m = \sum_{i=1}^n m_i \doteq \sum_{i=1}^n \rho(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i.$$

Je přirozené očekávat, že je-li funkce ρ “dostatečně rozumná”, například spojitá, bude se součet na pravé straně blížit k přesné hodnotě hmotnosti desky O , budeme-li O dělit na stále větší počet menších částí O_1, \dots, O_n (tj. $n \rightarrow +\infty$), přičemž délky jejich stran se budou blížit k nule (tj. $\|D\| \rightarrow 0$).

II.1.3. Geometrická motivace. Představme si, že $z = f(x, y)$ je nezáporná funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_2$. Chceme definovat a vypočítat objem V množiny Q , shora omezené grafem funkce f a zdola omezené rovinou xy . (Viz obr. 9a.) Přesný popis množiny Q je: $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Předpokládejme dále pro jednoduchost, že M je obdélníkem $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. (Obr. 9b.)



Obr. 9a



Obr. 9b

Je-li funkce f konstantní na O , je množina Q kvádrem, jehož hrany mají délky $b - a$, $d - c$ a f . Objem množiny Q tudíž je: $V = f \cdot (b - a) \cdot (d - c)$.

V obecném případě, kdy funkce f nemusí být konstantní, můžeme obdélník O dělením D rozdělit na n menších obdélníků O_1, \dots, O_n . Jsou-li obdélníky O_1, \dots, O_n “velmi malé”, pak při výpočtu objemu V_i množiny “nad” obdélníkem O_i neuděláme velkou chybu, když v O_i zvolíme bod Z_i a funkci f na O_i nahradíme konstantou, rovnou $f(Z_i)$. Pro V_i pak přibližně platí: $V_i \doteq f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i$, kde Δx_i a Δy_i jsou délky stran obdélníku O_i . Objem celé množiny Q mezi grafem funkce f a rovinou xy lze přibližně vyjádřit:

$$(II.1.2) \quad V = \sum_{i=1}^n V_i \doteq \sum_{i=1}^n f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i.$$

Za přesnou hodnotu objemu V množiny Q je přirozené považovat limitu součtů na pravé straně pro $n \rightarrow +\infty$ a $\Delta x_i \rightarrow 0$, $\Delta y_i \rightarrow 0$ (tj. pro $\|D\| \rightarrow 0$), pokud tato limita existuje.

Oba součty (II.1.1) a (II.1.2) jsou stejné a obě úlohy, popsané v odstavcích II.1.2 a II.1.3, vedou k limitě součtů (II.1.1) a (II.1.2) pro $\|D\| \rightarrow 0$. V dalších odstavcích podáme přesnou definici této limity. Můžeme již na tomto místě předeslat, že pokud limita bude existovat, její hodnotu budeme nazývat *dvojným integrálem* funkce ρ (nebo f) na obdélníku O .

II.1.4. Riemannovy součty a jejich limita. Předpokládejme, že $f(x, y)$ je omezená funkce na obdélníku $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ v \mathbb{E}_2 . Nechť D je dělení O na dílčí obdélníky O_1, \dots, O_n , jejichž strany mají délky $\Delta x_1, \Delta y_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n$. Označme \mathcal{V} systém vybraných bodů $Z_i \in O_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). (Viz obr. 9.) Pak Riemannovým součtem funkce f na obdélníku O , odpovídajícím dělení D a systému bodů \mathcal{V} , nazýváme

$$(II.1.3) \quad s(f, D, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i.$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f, P, V)$ pro $\|D\| \rightarrow 0+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D obdélníku O a pro každý zvolený systém \mathcal{V} platí:

$$\|D\| < \delta \quad \implies \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$(II.1.4) \quad \lim_{\|D\| \rightarrow 0+} s(f, D, \mathcal{V}) = S.$$

II.1.5. Dvojný integrál na obdélníku. Jestliže limita (II.1.4) existuje, pak číslo S nazýváme dvojným integrálem funkce f na obdélníku O . Integrál obvykle značíme

$$\iint_O f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{nebo} \quad \iint_O f \, dx \, dy.$$

Jestliže limita (II.1.4) existuje, říkáme, že “dvojný integrál $\iint_O f \, dx \, dy$ existuje” nebo že “funkce f je integrovatelná na obdélníku O ”.

II.1.6. Dvojný integrál na obecné omezené množině v \mathbb{E}_2 . Předpokládejme, že M je omezená množina v \mathbb{E}_2 a $f(x, y)$ je omezená funkce na M . Nechť $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ je obdélník, ve kterém je množina M obsažena. Definujme

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \in O - M. \end{cases}$$

Pak dvojným integrálem funkce f na množině M rozumíme dvojný integrál funkce f^* na obdélníku O (pokud tento integrál existuje). Dvojný integrál f na M značíme

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{nebo} \quad \iint_M f \, dx \, dy.$$

Vidíte, že dvojný integrál funkce f na obecné omezené množině M je definován pomocí dvojného integrálu funkce f^* (tj. funkce f , rozšířené nulou vně množiny M) na obdélníku O . Dvojný integrál na obdélníku je již známý z odstavce II.1.5. Lze ukázat, že existence ani hodnota dvojného integrálu $\iint_O f^* \, dx \, dy$ nezávisí na tom, který z nekonečně mnoha obdélníků v \mathbb{E}_2 , obsahujících množinu M , zvolíme a označíme O . Je to dáno tím, že rozšířená funkce f^* je vně množiny M nulová.

Pokud integrál $\iint_O f^* \, dx \, dy$ existuje, pak říkáme, že také “dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje” nebo že “funkce f je integrovatelná na množině M ”. Množinu M nazýváme integrační obor nebo obor integrace a integrovanou funkci f často nazýváme integrand.

II.1.7. Fyzikální a geometrický význam dvojného integrálu. Z odstavce II.1.2 a z definice dvojného integrálu je patrný jeden z mnoha fyzikálních významů dvojného integrálu: Je-li M omezená množina (tenká deska) v \mathbb{E}_2 a $\rho(x, y)$ je plošná hustota desky (v kg/m^2), pak $\iint_M \rho \, dx \, dy$ vyjadřuje celkovou hmotnost desky M . S dalšími aplikacemi dvojného integrálu ve fyzice se seznámíte v kapitole II.4.

Z odstavce II.1.3 a z definice dvojného integrálu rovněž plyne, že je-li $f(x, y)$ nezáporná a integrovatelná funkce na množině $M \in \mathbb{E}_2$, pak integrálem $\iint_M f \, dx \, dy$ můžeme definovat objem množiny Q mezi rovinou xy a grafem funkce f na M . (Viz obr. 9a.) V kapitolách II.5–II.7 uvidíte, že tento objem a také objem obecnějších útvarů v \mathbb{E}_3 lze definovat a vypočítat i pomocí tzv. trojného integrálu.

II.1.8. Historický přístup. Dvojný integrál býval v minulosti zaváděn (nikoliv definován, protože o přesnou definici se nejedná) následujícím způsobem: Představme si pro jednoduchost, že M je opět omezená množina (tenká deska) v \mathbb{E}_2 a $\rho(x, y)$ je plošná hustota desky M . Stejně jako v odstavci II.1.2 chceme vypočítat celkovou hmotnost této desky. Rozdělme M na nekonečně mnoho nekonečně malých obdélníků typu $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$. Na každém z těchto obdélníků lze ρ považovat za konstantní funkci, mající hodnotu $\rho(x, y)$. (Obdélník $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$ vlastně díky tomu, že je “nekonečně malý”, s bodem $[x, y]$ splývá.) Hmotnost obdélníku $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$ je tudíž $dm = \rho(x, y) \cdot dx \, dy$. Sečtením všech hmotností dm přes celou množinu M získáme celkovou hmotnost m uvažované desky. Součet značíme $\iint_M \rho \, dx \, dy$ a nazýváme dvojný integrál funkce ρ na množině M .

Tento přístup je však nepřesný, protože se opírá o pojmy “nekonečně malý obdélník” a “součet nekonečně mnoha nekonečně malých čísel” dm . Představa o existenci “nekonečně malého obdélníku” odporuje současnému pojetí geometrie v \mathbb{E}_2 a rovněž pojem “součtu nekonečně mnoha nekonečně malých čísel” je bez přesné definice zcela nejasný. Vývoj matematiky i potřeby aplikací dvojného integrálu si proto vynutily pozdější vznik přesné definice a teorie dvojného integrálu. Nicméně, představa o tom, že integrál je součtem nekonečně mnoha nekonečně malých čísel $dm = \rho(x, y) \cdot dx \, dy$ se stále, například v mechanice při odvozování různých vzorců (viz kapitolu II.4), používá.

II.1.9. Měřitelná množina v \mathbb{E}_2 a její Jordanova míra. Pojem omezené množiny v \mathbb{E}_2 je pro praktické účely příliš obecný. Například lze ukázat, že existují omezené množiny $M \in \mathbb{E}_2$ tak komplikovaných tvarů, že na nich ani konstantní funkce $f(x, y) = 1$ není integrovatelná. (Příkladem je množina všech bodů čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla.) Abychom odlišili tyto “umělé” množiny, které v technických aplikacích nemají velký význam, od “rozumných” množin, zavádíme pojem tzv. měřitelné množiny.

Předpokládejme, že M je omezená množina v \mathbb{E}_2 . Říkáme, že tato množina je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže dvojný integrál konstantní funkce $f(x, y) = 1$ na M existuje. V tomto případě nazýváme číslo

$$\mu_2(M) = \iint_M dx \, dy$$

dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M .

$\mu_2(M)$ má názornou geometrickou interpretaci – definuje a poskytuje návod jak vypočítat *plošný obsah* (nebo jenom krátce *obsah*) množiny M . Až se naučíte dvojné integrály počítat, budete se moci sami přesvědčit o tom, že má-li množina M jednoduchý tvar (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh atd.), je $\mu_2(M)$ v souladu se vzorci, které pro výpočet obsahů znáte ze základní školy.

Jednoduché omezené množiny (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh, kruhová výseč atd.) jsou měřitelné. Lze dodat, že prakticky všechny další omezené množiny, se kterými se setkáte v technických aplikacích, jsou také měřitelné. Kritérium, pomocí něhož to dokážeme poznat, najdete v odstavci II.1.12. Nejdříve se však zmíníme o některých měřitelných množinách, o kterých umíme ukázat, že jejich míra je nulová.

II.1.10. Příklady množin, jejichž dvourozměrná míra je rovna nule.

- Prázdná množina a všechny množiny, sestávající z konečného počtu bodů nebo úseček.
- Grafy spojitých funkcí jedné proměnné $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$ na omezených uzavřených intervalech.
- Tzv. jednoduché hladké křivky nebo jednoduché po částech hladké křivky v \mathbb{E}_2 (viz kapitolu III.1).

Následující věta uvádí některé poměrně zřejmé vlastnosti množin v \mathbb{E}_2 , jejichž dvourozměrná Jordanova míra je nulová (krátce: množin míry nula).

II.1.11. Věta. a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*

b) *Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.*

II.1.12. Věta. (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v \mathbb{E}_2 byla měřitelná.) *Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.*

II.2. Existence a vybrané vlastnosti dvojného integrálu.

Připomínáme, že výroky “ f je integrovatelná funkce na množině M ” a “dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje” mají stejný význam. Bylo by naivní si myslet, že dvojný integrál jakékoliv funkce f na jakékoliv množině M vždy existuje (neboli jinými slovy, že pro jakoukoliv funkci f na jakékoliv množině M konstrukce, popsaná v odstavcích II.1.4–II.1.6, vždy vede k jediné hodnotě limity Riemannových součtů (II.1.3)). Především je třeba mít na paměti, že konstrukce dvojného integrálu požaduje, aby integrační obor M byl omezenou množinou a rovněž aby funkce f byla na množině M omezená. Nicméně, ani omezenost M i f sama o sobě ještě existenci integrálu nezaručuje. Je to dáno tím, že pojmy omezené množiny a omezené funkce jsou stále ještě příliš obecné a zahrnují mnoho množin i funkcí velmi “podivných” tvarů. Těmto případům se však v tomto textu věnovat nechceme. V následujícím odstavci uvádíme jednoduchou postačující podmínku pro existenci dvojného integrálu, se kterou v technických aplikacích většinou zcela vystačíme.

II.2.1. Věta. (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu.)

Nechť M je měřitelná množina v \mathbb{E}_2 a f je omezená a spojitá funkce na M . Pak dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje.

Z věty I.6.14 plyne, že spojitá funkce na omezené uzavřené množině je omezená. Větu II.2.1 je tudíž možné pozměnit. Lze požadovat o něco více na množině M , totiž uzavřenost, a za to lze vynechat předpoklad o omezenosti funkce f , neboť tu zaručuje věta I.6.14. Zformulujte a napište si sami příslušnou pozměněnou větu.

Věta II.2.1 zůstane v platnosti, nahradíme-li předpoklad o spojitosti funkce f na množině M slabším předpokladem o spojitosti f na M “až na množinu míry nula” (který připouští nespojitosti funkce f , ale pouze na množině míry nula v M).

II.2.2. Některé důležité vlastnosti dvojného integrálu.

- a) **Linearita dvojného integrálu.** Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak funkce $f + g$ a αf jsou také integrovatelné na množině M a platí

$$\iint_M (f + g) \, dx \, dy = \iint_M f \, dx \, dy + \iint_M g \, dx \, dy,$$

$$\iint_M \alpha \cdot f \, dx \, dy = \alpha \cdot \iint_M f \, dx \, dy.$$

- b) **Aditivita dvojného integrálu vzhledem k oboru integrace.** Jsou-li M_1 a M_2 měřitelné množiny, jejichž průnik má míru nula (tj. M_1 a M_2 se překrývají nejvýše na množině míry nula) a f je integrovatelná funkce na M_1 a na M_2 , pak f je integrovatelná funkce i na sjednocení $M_1 \cup M_2$ a

$$\iint_{M_1} f \, dx \, dy + \iint_{M_2} f \, dx \, dy = \iint_{M_1 \cup M_2} f \, dx \, dy.$$

- c) Je-li funkce f integrovatelná na množině $M \in \mathbb{E}_2$ a funkce g je omezená a liší se od f nejvýše na množině míry nula, pak funkce g je také integrovatelná v M a

$$\iint_M g \, dx \, dy = \iint_M f \, dx \, dy.$$

- d) Je-li f omezená funkce na množině $M \in \mathbb{E}_2$ míry nula, pak f je integrovatelná na M a

$$\iint_M f \, dx \, dy = 0.$$

- e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_2$ takové, že $f(x, y) \geq g(x, y)$ pro všechny body $[x, y] \in M$, pak

$$\iint_M f \, dx \, dy \geq \iint_M g \, dx \, dy.$$

Speciálně, je-li $f(x, y) \geq 0$ pro všechny body $[x, y] \in M$, pak

$$\iint_M f \, dx \, dy \geq 0.$$

Z tvrzení c) vyplývá, že změníme-li hodnoty funkce f v M na množině míry nula v M (ovšem tak, že změněná funkce zůstává omezená), pak hodnota integrálu $\iint_M f \, dx \, dy$ se nezmění. Při výpočtu integrálu lze dokonce množinu míry nula vynechat (tj. místo na M počítat integrál na množině $M - N$, kde $\mu_2(N) = 0$) a hodnota integrálu bude stejná. Jinými slovy: chování integrované funkce na množinách míry nula (pokud funkce zůstává omezená) nemá na existenci ani hodnotu dvojného integrálu žádný vliv. Tím také odpovídáme na často se vyskytující dotaz: “Je důležité, zda do oboru integrace zahrnujeme nebo nezahrnujeme jeho hranici?” (Například: “Je rozdíl mezi tím, zda integrujeme na uzavřeném obdélníku $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ nebo na otevřeném obdélníku $(a, b) \times (c, d)$?”) Odpověď je: NE. Pokud hranice oboru integrace má míru nula a integrovaná funkce je na ní omezená, pak je jedno, jestli ji do oboru integrace zahrnujeme, nebo ne.

II.3. Výpočet dvojného integrálu – Fubiniho věta a transformace do polárních souřadnic.

Fubiniho věta převádí výpočet dvojného integrálu na výpočet dvou jednoduchých (rozumějte: jednorozměrných) integrálů. Je možné ji použít při integraci na tzv. elementárních oborech integrace. Větu poprvé publikoval v roce 1907 Guido Fubini (1879–1943).

II.3.1. Elementární obor integrace v \mathbb{E}_2 . a) Nechť $y = \phi_1(x)$ a $y = \phi_2(x)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Pak množinu

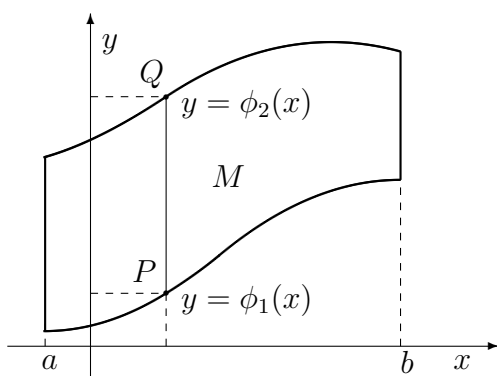
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

nazýváme *elementárním oborem integrace vzhledem k ose x* . (Viz obr. 10a.)

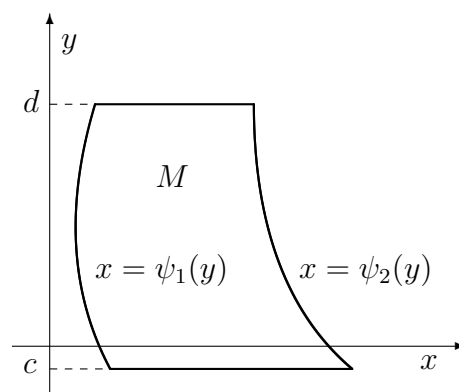
b) Nechť $x = \psi_1(y)$ a $x = \psi_2(y)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle c, d \rangle$ a nechť $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in \langle c, d \rangle$. Pak množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

nazýváme *elementárním oborem integrace vzhledem k ose y* . (Viz obr. 10b.)



Obr. 10a



Obr. 10b

Elementární obory integrace jsou měřitelné množiny v \mathbb{E}_2 . Nyní vysvětlíme myšlenku výpočtu dvojného integrálu funkce $f(x, y)$ na elementárním oboru integrace vzhledem k ose x . (Viz obr. 10a.) Představte si, že obor integrace rozřezete na nekonečně mnoho nekonečně tenkých svislých pruhů. Jeden takový pruh je úsečkou \overline{PQ} na obr. 10a. Nejprve integrujeme $f(x, y)$ na každé takové úsečce jakožto funkci proměnné y – obdržíme $F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$. Výsledek závisí na x , protože poloha úsečky \overline{PQ} závisí na x . Pak integrujeme $F(x)$ jakožto funkci proměnné x od a do b . Tímto způsobem získáme vzorec (II.3.1) v odstavci II.3.2.

V následující větě přesně formulujeme předpoklady, za kterých můžeme integrál počítat popsáním způsobem. Věta se také zabývá případem, kdy oborem integrace je elementární obor vzhledem k ose y .

II.3.2. Fubiniho věta pro dvojný integrál. a) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x , popsáný v odstavci II.3.1. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M . Pak*

$$(II.3.1) \quad \iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

b) *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y , popsáný v odstavci II.3.1. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M . Pak*

$$(II.3.2) \quad \iint_M f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

II.3.3. Poznámka. Integrálům na pravých stranách (II.3.1) a (II.3.2) se, na rozdíl od dvojných integrálů na levých stranách, často říká “dvojnásobné integrály”.

Je-li M obdélníkem $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ a funkce f je spojitá na M , pak z obou částí věty II.3.2 snadno vyplývá tento vzorec:

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

II.3.4. Příklad. Vypočítejme integrál $\iint_M (2x + 3y + 5) dx dy$, kde M je množina, omezená křivkami $y = 2x$, $y = 1/x$ a $x = \sqrt{2}$.

Ř e š e n í : Dané křivky dělí rovinu xy na různé části (nakreslete si obrázek!), pouze jedna z nich však je omezená a to je právě M . Množinu M můžeme popsat jako množina bodů $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ takových, že $\sqrt{2}/2 \leq x \leq \sqrt{2}$ a $1/x \leq y \leq 2x$.

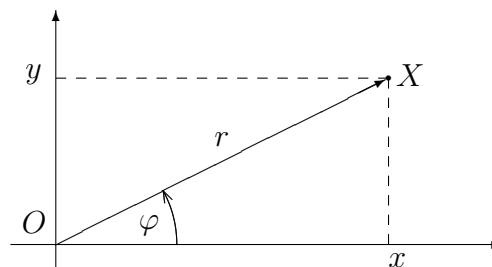
M je elementární obor integrace vzhledem k ose x . Funkce f je spojitá na M . Užitím Fubiniho věty II.3.2 dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_M (2x + 3y + 5) dx dy &= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \left(\int_{1/x}^{2x} (2x + 3y + 5) dy \right) dx \\ &= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} [2xy + \frac{3}{2}y^2 + 5y]_{y=1/x}^{y=2x} dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \left(4x^2 + 6x^2 + 10x - 2 - \frac{3}{2x^2} - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{10x^3}{3} + 5x^2 - 2x + \frac{3}{2x} - 5 \ln x \right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} = \frac{79}{12} \sqrt{2} + 7.5 - 5 \ln 2. \end{aligned}$$

Z teorie jednorozměrného integrálu si pamatujete, že účinnou metodou integrace je substituční metoda. Tuto metodu můžeme použít i při výpočtu dvojného integrálu. Při jejím použití obvykle říkáme, že integrál transformujeme do jiných souřadnic. Nejpoužívanější jiné (než kartézské) souřadnice v \mathbb{E}_2 jsou tzv. polární (nebo zobecněné polární) souřadnice.

II.3.5. Polární souřadnice v \mathbb{E}_2 .

Polohu bodu $X \in \mathbb{E}_2$ můžeme jednoznačně určit jeho polárními souřadnicemi r, φ , které mají tento geometrický význam: r je vzdálenost X od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou \overline{OX} (měřený od osy x k úsečce \overline{OX}). (Viz obr. 11.) Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi



Obr. 11

$$(II.3.3) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Z geometrického významu polárních souřadnic vyplývá, že $r \geq 0$ a φ lze brát z kteréhokoliv intervalu, jehož délka nepřesáhne 2π (například z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$).

II.3.6. Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic. Představte si, že počítáme integrál $\iint_M f(x, y) dx dy$. Pomocí rovnic (II.3.3) můžeme nahradit x, y výrazy $r \cos \varphi$ a $r \sin \varphi$. Kromě toho je však třeba

- popsat obor integrace M v polárních souřadnicích a starý popis (v kartézských souřadnicích) zaměnit novým popisem (v polárních souřadnicích),
- dosadit vhodný výraz do dvojného integrálu za $dx dy$ (podobně, jako když při substituci $x = g(t)$ v jednorozměrném integrálu dosazujeme $dx = g'(t) dt$).

Množina M odpovídá nějaké množině M' v polárních souřadnicích. (Pod M' si můžete představovat popis M v polárních souřadnicích.) V optimálním případě každému bodu $[x, y] \in M$ odpovídá právě jeden bod $[r, \varphi] \in M'$ (takový, že $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$). Množiny míry nula však nehrají žádnou roli a proto vzájemná jednoznačnost přiřazení mezi body $[x, y] \in M$ a body $[r, \varphi] \in M'$ může být porušena na množině míry nula.

Výraz $dx dy$ je třeba při transformaci do polárních souřadnic nahradit takto:

$$(II.3.4) \quad dx dy = r dr d\varphi.$$

Činitel r na pravé straně je tzv. “jakobián” (zkratka pro “Jacobiho determinant”). Více se o něm dozvíte v kapitole II.9.

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic má smysl tehdy, pokud vede ke zjednodušení integrované funkce (viz příklad II.3.8) nebo ke zjednodušení popisu oboru integrace (viz příklad II.3.7).

II.3.7. Příklad. Vypočítejme integrál $\iint_M (x + y) dx dy$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4\}$.

Ř e š e n í : M je průnikem kruhu (se středem v počátku a poloměrem 2) s prvním kvadrantem. Odpovídá oblasti $M' = \{[r, \varphi] \in \mathbb{E}_2; 0 < r < 2, 0 < \varphi < \pi/2\}$ v oboru polárních souřadnic $[r, \varphi]$. Užitím rovnic (II.3.3) a (II.3.4) dostaneme:

$$\begin{aligned} \iint_M (x+y) dx dy &= \iint_{M'} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= {}^1) \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \right) dr = \int_0^2 r^2 [\sin \varphi - \cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} dr \\ &= \int_0^2 2r^2 dr = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

¹⁾ Použili jsme Fubiniho větu.

II.3.8. Příklad. Vypočítejme integrál $\iint_M (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$.

Ř e š e n í : M lze definovat jako množinu bodů $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ takových, že $0 < x < 1$ a $0 < y < x$. Transformujeme-li tyto nerovnosti do polárních souřadnic, obdržíme:

$$(II.3.5) \quad 0 < r \cos \varphi < 1, \quad 0 < r \sin \varphi < r \cos \varphi.$$

Ze druhé nerovnosti plyne: $0 < \sin \varphi < \cos \varphi$, což znamená, že $0 < \varphi < \pi/4$. Z první nerovnosti v (II.3.5) vyplývá: $0 < r < 1/\cos \varphi$. M tudíž odpovídá množině $M' = \{[r, \varphi] \in \mathbb{E}_2; 0 < \varphi < \pi/4, 0 \leq r \leq 1/\cos \varphi\}$ v oboru polárních souřadnic. Užitím transformací (II.3.3), (II.3.4) a následným použitím Fubiniho věty dostaneme:

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \iint_{M'} \frac{1}{r} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{1/\cos \varphi} dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = {}^2) \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

²⁾ Použili jsme substituci $\sin \varphi = t$ a odtud plynoucí rovnost $\cos \varphi d\varphi = dt$.

II.3.9. Zobecněné polární souřadnice v \mathbb{E}_2 . Tyto souřadnice budeme opět označovat r, φ . Mají podobný geometrický význam, jako polární souřadnice, avšak jejich počátek nemusí být stejný jako počátek v kartézských souřadnicích a rovněž nejsou “izotropní”, tj. míra změny r ve směru osy x a ve směru osy y se může lišit. Vztahy mezi kartézskými souřadnicemi x, y a zobecněnými polárními souřadnicemi r, φ jsou:

$$(II.3.6) \quad x = x_0 + ar \cos \varphi, \quad y = y_0 + br \sin \varphi,$$

přičemž $[x_0, y_0]$ je zvolený bod v \mathbb{E}_2 a a, b jsou zvolené kladné konstanty.

Lze dokázat, že při transformaci dvojného integrálu do zobecněných polárních souřadnic je třeba výraz $dx dy$ transformovat takto:

$$(II.3.7) \quad dx dy = rab dr d\varphi.$$

Činitel rab na pravé straně se opět nazývá “jakobián” a odvození jeho tvaru lze nalézt v kapitole II.9.

Transformací dvojného integrálu do zobecněných polárních souřadnic obvykle docílíme zjednodušení integrované funkce, pokud tato obsahuje výrazy typu $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2$. Popis oboru integrace se zjednoduší, pokud je jím například celý vnitřek nebo pouze výseč elipsy $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$.

II.3.10. Příklad. Vypočítejme integrál $\iint_M x \, dx \, dy$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

Řešení: Je patrné, že pokud použijeme transformaci

$$(II.3.8) \quad x = 2 + r \cos \varphi, \quad y = 1 + 2r \sin \varphi,$$

pak body $[x, y]$ vyplňují obor M právě když body $[r, \varphi]$ vyplňují obor $M' = \{[r, \varphi] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Užitím transformace (II.3.8), rovnosti $dx \, dy = 2r \, dr \, d\varphi$ (plynoucí z (II.3.7)) a rovněž následným použitím Fubiniho věty obdržíme:

$$\begin{aligned} \iint_M x \, dx \, dy &= \iint_{M'} (2 + r \cos \varphi) 2r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (4r + 2r^2 \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 + \frac{2}{3}r^3 \cos \varphi \right]_{r=0}^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

II.3.11. Poznámka. Jistě jste si všimli, že transformace (II.3.8) v příkladu II.3.10 není vzájemně jednoznačným zobrazením množiny M' na množinu M . Vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body $[x, y]$ a $[r, \varphi]$ je porušeno v podmnožině $M'_0 = \{[r, \varphi] \in \mathbb{E}_2; r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ množiny M' . To je zřejmé, neboť transformace (II.3.8) přiřazuje všem bodům, ležícím v M'_0 , jeden bod $[2, 1]$ v M . Bod $[2, 1]$ v M má tudíž nekonečně mnoho vzorů v M' – jsou jimi všechny body $[r, \varphi] \in M'_0$. Jelikož však $\mu_2(M'_0) = 0$, toto nemá vliv ani na existenci, ani na hodnotu integrálu.

II.4. Některé fyzikální aplikace dvojného integrálu.

Předpokládejme, že tenká hmotná deska je umístěna v rovině xy tak, že přesně pokrývá měřitelnou množinu M . Deska nemusí být homogenní. To znamená, že plošná hustota desky (tj. hmotnost vztahovaná k jednotce plošného obsahu) nemusí být konstantní (například vlivem toho, že se mění tloušťka desky nebo materiál, ze kterého je vyrobena). Označme tuto plošnou hustotu $\rho(x, y)$ a předpokládejme, že $\rho(x, y)$ je udána v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$. Dvojný integrál umožňuje definovat a vypočítat některé základní mechanické charakteristiky desky:

hmotnost desky $m = \iint_M \rho(x, y) \, dx \, dy$ [kg],

statický moment

vzhledem k ose x $m_x = \iint_M y \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy$ [kg · m],

vzhledem k ose y $m_y = \iint_M x \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy$ [kg · m],

$$\text{souřadnice těžiště} \dots\dots x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m} \quad [\text{m}],$$

moment setrvačnosti

$$\text{vzhledem k ose } x \dots\dots J_x = \iint_M y^2 \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k ose } y \dots\dots J_y = \iint_M x^2 \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k počátku} \dots J_0 = \iint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2].$$

Navrhněte sami vzorec, kterým můžeme definovat a rovněž podle něj vypočítat moment setrvačnosti vzhledem k obecné přímce v \mathbb{E}_2 , dané rovnicí $ax + by + c = 0$.

II.5. Trojný integrál – motivace a definice. Třírozměrná Jordanova míra a měřitelné množiny v \mathbb{E}_3 .

Teorie trojného integrálu je skoro stejná, jako teorie dvojného integrálu. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že integrujeme funkce tří proměnných a obory integrace jsou částí \mathbb{E}_3 . Teorii trojného integrálu proto uvádíme pouze stručně a nevysvětlujeme mnoho podrobností.

Na druhé straně, jedna dimenze navíc znamená, že integrované funkce a především obory integrace mohou být podstatně rozmanitější. Ačkoliv metody integrace jsou opět založeny zejména na Fubiniho větě a transformaci integrálu do jiných souřadnic, tyto metody jsou obvykle technicky komplikovanější, než v případě dvojného integrálu.

II.5.1. Dělení kvádrů a jeho norma. Nechtě $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ a $\langle r, s \rangle$ jsou postupně uzavřené intervaly na souřadných osách x , y a z . Pak kartézský součin $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$ je kvádrem v \mathbb{E}_3 , jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami x , y nebo z .

Kvadr K lze rozdělit sítí rovin rovnoběžných s rovinami xy , xz nebo yz na n dílčích kvádrů K_1, \dots, K_n . Systém těchto kvádrů nazýváme *dělení* kvádrů K . Pojmenujeme-li popsané dělení D , pak *normou* dělení D nazýváme délku nejdelší ze všech hran kvádrů K_1, \dots, K_n . Normu dělení D značíme $\|D\|$. Jsou-li délky hran dílčích kvádrů K_1, \dots, K_n rovny $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n$, můžeme normu $\|D\|$ vyjádřit:

$$\|D\| = \max \{ \Delta x_1; \Delta y_1; \Delta z_1; \dots; \Delta x_n; \Delta y_n; \Delta z_n \}.$$

II.5.2. Fyzikální motivace. Představme si, že chceme vypočítat hmotnost m tělesa, které má tvar kvádrů $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$ a ve kterém je hmota rozložena s hustotou $\rho(x, y, z)$. Hustota může být proměnná, kvadr tudíž nemusí být homogenní.

Ve speciálním případě, kdy hustota ρ je konstantní, je $m = \rho \cdot (b-a) \cdot (d-c) \cdot (s-r)$. (Proč?)

V obecném případě, kdy hustota nemusí být konstantní, můžeme K rozdělit dělením D na n dílčích kvádrů K_1, \dots, K_n . Jsou-li dílčí kvádry “velmi malé”, pak neuděláme velkou chybu, když hustotu ρ na každém z nich považujeme za konstantní a postupně

rovnou $\rho(Z_1), \dots, \rho(Z_n)$, kde Z_1, \dots, Z_n jsou zvolené body v K_1, \dots, K_n . Hmotnost kvádrů K_i (pro $i = 1, \dots, n$) je pak přibližně rovna $m_i \doteq \rho(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, kde $\Delta x_i, \Delta y_i$ a Δz_i jsou délky hran kvádrů K_i . Hmotnost celého tělesa K lze přibližně vyjádřit:

$$(II.5.1) \quad m = \sum_{i=1}^n m_i \doteq \sum_{i=1}^n \rho(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Pokud funkce ρ má “rozumné vlastnosti”, pak je přirozené očekávat, že přesnou hodnotu m obdržíme jako limitu součtů na pravé straně, jestliže $n \rightarrow +\infty$ a čísla $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ se blíží k nule (tj. jestliže $\|D\| \rightarrow 0$).

II.5.3. Riemannovy součty a jejich limita. Předpokládejme, že $f(x, y, z)$ je omezená funkce na kvádru $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$. Nechť D je dělení kvádrů K na dílčí kvádry K_1, \dots, K_n , popsané v odstavci II.5.1. Označme délky hran kvádrů K_1, \dots, K_n postupně $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n$. Nechť \mathcal{V} je systém zvolených bodů $Z_i \in K_i$ ($i = 1, \dots, n$). Riemannovým součtem funkce f na kvádru K , odpovídajícím dělení D a systému \mathcal{V} vybraných bodů Z_1, \dots, Z_n , nazýváme součet

$$(II.5.2) \quad s(f, D, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f, D, \mathcal{V})$ pro $\|D\| \rightarrow 0+$, jestliže ke každému zvolenému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D kvádrů K a pro každý zvolený systém \mathcal{V} platí:

$$\|D\| < \delta \implies |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$(II.5.3) \quad \lim_{\|D\| \rightarrow 0+} s(f, D, \mathcal{V}) = S.$$

II.5.4. Trojný integrál na kvádru. Jestliže limita (II.5.3) existuje, pak její hodnotu S nazýváme trojným integrálem funkce f na kvádru K . Tento integrál obvykle značíme

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{nebo} \quad \iiint_K f \, dx \, dy \, dz.$$

Jestliže limita (II.5.3) existuje, říkáme, že “trojný integrál $\iiint_K f \, dx \, dy \, dz$ existuje” nebo že “funkce f je integrovatelná na kvádru K ”.

II.5.5. Trojný integrál na obecné omezené množině v \mathbb{E}_3 . Předpokládejme, že M je omezená množina v \mathbb{E}_3 a $f(x, y, z)$ je omezená funkce na M . Nechť $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$ je kvádr, ve kterém je množina M obsažena. Definujme

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \in K - M. \end{cases}$$

Pak trojným integrálem funkce f na množině M rozumíme trojný integrál funkce f^* na kvádru K (pokud tento integrál existuje). Trojný integrál f na M značíme

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{nebo} \quad \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

Lze ukázat, že existence ani hodnota trojného integrálu $\iiint_K f^* dx dy dz$ nezávisí na konkrétní volbě kvádrů K , ve kterém je množina M obsažena. (Je to dáno tím, že rozšířená funkce f^* je nulová vně množiny M .)

V literatuře se místo “trojný integrál” někdy používá název *objemový integrál*.

Pokud integrál $\iiint_K f^* dx dy dz$ existuje, pak také říkáme, že “trojný integrál $\iiint_M f dx dy dz$ existuje” nebo že “funkce f je *integrovatelná* na množině M ”. Množinu M nazýváme *integrační obor* nebo *obor integrace* a integrovanou funkci f nazýváme *integrand*. Jednoduchou postačující podmínku pro existenci integrálu najdete v odstavci II.6.1.

II.5.6. Fyzikální význam trojného integrálu. Z odstavce II.5.2 a z definice trojného integrálu je patrný fyzikální význam trojného integrálu: Je-li M omezená množina (těleso) v \mathbb{E}_3 a $\rho(x, y, z)$ je hustota tělesa M , pak $\iiint_M \rho dx dy dz$ vyjadřuje *celkovou hmotnost* tělesa M . S dalšími aplikacemi trojného integrálu ve fyzice se seznámíme v kapitole II.8.

II.5.7. Historický přístup. Trojný integrál býval v minulosti zaváděn, podobně jako dvojný integrál, pomocí představy o nekonečně malém kvádrů o hranách délek dx , dy , dz atd. Tento přístup byl vysvětlen v odstavci II.1.8.

II.5.8. Měřitelná množina v \mathbb{E}_3 a její Jordanova míra. V \mathbb{E}_3 existují množiny tak komplikovaných tvarů, že na nich neexistuje ani integrál konstantní funkce $f(x, y, z) = 1$. (Příkladem je množina všech bodů krychle $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, jejichž některá souřadnice je racionální číslo.) Abychom odlišili tyto “umělé” množiny, které v technických aplikacích nemají velký význam, od “rozumných” množin, zavádíme pojem “měřitelné množiny”.

Předpokládejme, že M je omezená množina v \mathbb{E}_3 . Říkáme, že množina M je *měřitelná* (v Jordanově smyslu), jestliže konstantní funkce $f(x, y, z) = 1$ je integrovatelná na M . V tomto případě nazýváme hodnotu

$$\mu_3(M) = \iiint_M dx dy dz$$

třírozměrnou Jordanovou mírou množiny M .

$\mu_3(M)$ má názorný geometrický význam: Definuje a poskytuje návod jak vypočítat *objem* množiny M .

II.5.9. Příklady množin, jejichž třírozměrná Jordanova míra je rovna nule.

- Množiny, sestávající z konečného počtu bodů nebo křivek. (Co přesně míníme křivkou je vysvětleno v odstavcích III.1.1, III.1.2 a III.1.8.)
- Plochy, které jsou grafy spojitých funkcí dvou proměnných $z = \varphi(x, y)$ nebo $y = \psi(x, z)$ nebo $x = \eta(y, z)$, definovaných na omezených uzavřených množinách v \mathbb{E}_2 .
- Tak zvané jednoduché hladké plochy a jednoduché po částech hladké plochy (viz kapitola IV.1).

V této kapitole a v kapitolách II.6–II.8, pojednávajících o trojném integrálu, budeme rčením “množina míry nula” mínit množinu v \mathbb{E}_3 , jejíž třírozměrná Jordanova míra je rovna nule.

- II.5.10. Věta.** a) Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.
 b) Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.

II.5.11. Věta. (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v \mathbb{E}_3 byla měřitelná.) Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_3(\partial M) = 0$.

Z věty II.5.11 plyne, že například tzv. elementární obory integrace v \mathbb{E}_3 , které poznáte v odstavci II.7.1 (viz též obr. 12), jsou měřitelné množiny. V technických aplikacích se s jinými omezenými množinami, než měřitelnými, prakticky nesetkáte.

II.6. Existence a vybrané vlastnosti trojného integrálu.

Připomínáme, že dva výroky “funkce f je integrovatelná na množině M ” a “trojný integrál $\iiint_M f \, dx \, dy \, dz$ existuje” říkají přesně totéž.

II.6.1. Věta. (Postačující podmínka pro existenci trojného integrálu.)

Nechť M je měřitelná množina v \mathbb{E}_3 a f je omezená a spojitá funkce na M . Pak trojný integrál $\iiint_M f \, dx \, dy \, dz$ existuje.

Stejně jako analogickou větu II.2.1, i větu II.6.1 je možné pozměnit. (Lze navíc požadovat uzavřenost množiny M a za to lze vynechat předpoklad o omezenosti funkce f .) Zformulujte a napište si sami příslušnou pozměněnou větu.

Věta II.6.1 bude platit i tehdy, nahradíme-li předpoklad o spojitosti funkce f na množině M slabším předpokladem o spojitosti f na M “až na množinu míry nula” (který připouští nespojitosti funkce f , ale pouze na množině míry nula v M).

II.6.2. Některé důležité vlastnosti trojného integrálu.

- a) **Linearita trojného integrálu.** Jsou-li funkce f a g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned} \iiint_M (f + g) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_M f \, dx \, dy \, dz + \iiint_M g \, dx \, dy \, dz, \\ \iiint_M \alpha \cdot f \, dx \, dy \, dz &= \alpha \cdot \iiint_M f \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

- b) **Aditivita trojného integrálu vzhledem k oboru integrace.** Jsou-li M_1 a M_2 měřitelné množiny v \mathbb{E}_3 , které se překrývají nejvýše na množině míry nula (tj. $\mu_3(M_1 \cap M_2) = 0$) a f je integrovatelnou funkcí na M_1 i na M_2 , pak

$$\iiint_{M_1} f \, dx \, dy \, dz + \iiint_{M_2} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{M_1 \cup M_2} f \, dx \, dy \, dz.$$

- c) Je-li funkce f integrovatelná na množině $M \in \mathbb{E}_3$ a omezená funkce g se liší od f nejvýše na množině míry nula v M , pak g je také integrovatelná funkce v M a

$$\iiint_M g \, dx \, dy \, dz = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz.$$

- d) Je-li f omezená funkce na množině $M \in \mathbb{E}_3$ míry nula, pak f je integrovatelná na M a

$$\iiint_M f \, dx \, dy \, dz = 0.$$

- e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na množině $M \subset \mathbb{E}_3$ takové, že $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ pro všechny body $[x, y, z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \, dx \, dy \, dz \geq \iiint_M g \, dx \, dy \, dz.$$

Speciálně, je-li $f(x, y, z) \geq 0$ pro všechny body $[x, y, z] \in M$, pak

$$\iiint_M f \, dx \, dy \, dz \geq 0.$$

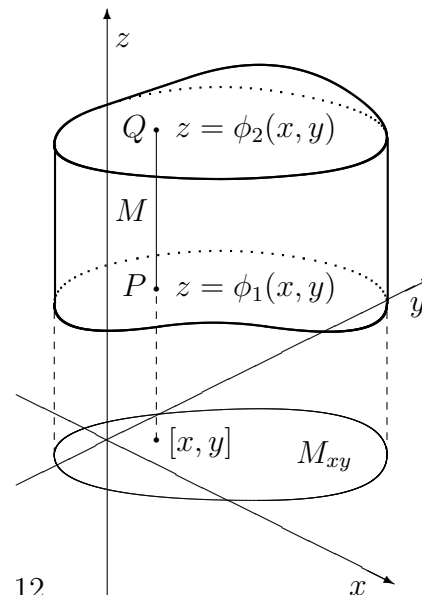
Z bodu c) je patrné, že pokud integrovaná funkce je omezená, pak její chování na množině míry nula neovlivňuje ani existenci, ani hodnotu trojného integrálu. Trojným integrálem funkce f na množině M se tudíž můžeme zabývat i v případě, kdy funkce f je definovaná pouze v $M - N$, kde N je množina míry nula.

II.7. Výpočet trojného integrálu – Fubiniho věta a transformace do cylindrických a do sférických souřadnic.

Fubiniho věta pro trojný integrál převádí výpočet trojného integrálu na výpočet jednoho dvojného integrálu a jednoho jednoduchého (tím míníme jednorozměrného) integrálu. Lze ji použít na tzv. elementárních oborech integrace v \mathbb{E}_3 .

II.7.1. Elementární obor integrace v \mathbb{E}_3 . Nechť M_{xy} je měřitelná uzavřená množina v \mathbb{E}_2 a $z = \phi_1(x, y)$ a $z = \phi_2(x, y)$ jsou spojité funkce na M_{xy} takové, že $\phi_1(x, y) \leq \phi_2(x, y)$ pro všechna $[x, y] \in M_{xy}$. Pak množinu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in M_{xy}, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$



Obr. 12

nazýváme *elementární obor integrace vzhledem k rovině xy* . (Viz obr. 12.)

Analogicky můžeme definovat i elementární obor integrace vzhledem k rovině xz a elementární obor vzhledem k rovině yz . Napište si sami jako cvičení definice těchto elementárních integračních oborů.

Elementární obory integrace jsou měřitelnými množinami v \mathbb{E}_3 . Integrace funkce $f(x, y, z)$ na elementárním oboru integrace vzhledem k rovině xy je založena na této představě: Obor integrace M rozdělíme na nekonečně mnoho svislých úseček. Jednou z nich je úsečka \overline{PQ} na obr. 12. Nejprve integrujeme funkci f na každé z těchto úseček jako funkci jedné proměnné z – obdržíme $F(x, y) = \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$. Výsledek závisí na x a na y , protože poloha úsečky \overline{PQ} závisí na x a na y . Poté integrujeme $F(x, y)$ jakožto funkci dvou proměnných x a y na množině M_{xy} . Tímto způsobem získáme formuli (II.7.1).

II.7.2. Fubiniho věta pro trojný integrál. *Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy , definovaný v odstavci II.7.1. Nechť $f(x, y, z)$ je spojitá funkce na M . Pak*

$$(II.7.1) \quad \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Zformulujte sami analogické věty pro integraci na elementárních oborech integrace vzhledem k rovinám xz a yz .

II.7.3. Příklad. Vypočítejme integrál $\iiint_M (z + 2) dx dy dz$, kde M je množina v \mathbb{E}_3 , omezená plochami $x^2 + y^2 = 2$, $z = -2 - x$ a $z = 2 + y$.

Ř e š e n í : Dané plochy dělí \mathbb{E}_3 na více množin, pouze jedna z nich je však omezená a to je M . M je částí válce $x^2 + y^2 \leq 2$, zdola omezenou rovinou $z = -2 - x$ a shora omezenou rovinou $z = 2 + y$. Množina M je elementárním oborem integrace vzhledem k rovině xy , $M_{xy} = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 2\}$ a $\phi_1(x, y) = -2 - x$, $\phi_2(x, y) = 2 + y$. Užitím věty II.7.2 dostáváme:

$$\begin{aligned} \iiint_M (z + 2) dx dy dz &= \iint_{M_{xy}} \left(\int_{-2-x}^{2+y} (z + 2) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} [z^2/2 + 2z]_{-2-x}^{2+y} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + 4y + 8 \right) dx dy \\ &= {}^1) \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi + 4r \sin \varphi + 8 \right) r d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} 16\pi r dr = 16\pi. \end{aligned}$$

¹⁾ Dvojný integrál na M_{xy} transformujeme do polárních souřadnic.

II.7.4. Poznámka. Fubiniho věta II.7.2 rozkládá trojný integrál na dva integrály – vnější dvojný integrál a vnitřní jednoduchý integrál. Někdy je užitečné provést rozklad opačně, tj. na vnější jednoduchý integrál a na vnitřní dvojný integrál. Přeskočíme příslušnou teorii, protože je obdobná obsahům odstavců II.7.1 a II.7.2, a postup ukážeme pouze na příkladu.

II.7.5. Příklad. Vypočítejme objem V šikmého kuželu $K = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 0 < z < 5, (x - 2z)^2 + y^2 < z^2\}$.

Ř e š e n í : Pro objem V kuželu K platí:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_K dx dy dz = \int_0^5 \left(\iint_{(x-2z)^2 + y^2 < z^2} dx dy \right) dz \\
&= {}^2) \int_0^5 \left(\int_0^z \left(\int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dr \right) dz = \int_0^5 \pi z^2 dz = \frac{125\pi}{3}.
\end{aligned}$$

- 2) Vnitřní dvojný integrál transformujeme z kartézských souřadnic x, y do zobecněných polárních souřadnic r, φ pomocí rovnic $x = 2z + r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r d\varphi dr$.

II.7.6. Cylindrické souřadnice v \mathbb{E}_3 . Cylindrické souřadnice bodu $X = [x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ jsou r, φ, w . Mají tento geometrický význam: r, φ jsou polárními souřadnicemi bodu $[x, y]$ v rovině xy a $w = z$. Mezi kartézskými souřadnicemi a cylindrickými souřadnicemi bodu X tudíž platí relace:

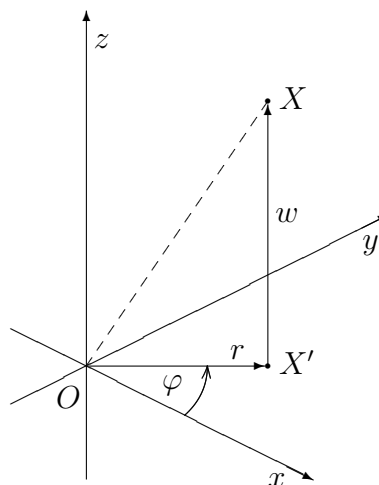
$$(II.7.2) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = w.$$

Při transformaci trojného integrálu do cylindrických souřadnic musíme též nahradit výraz $dx dy dz$. Lze dokázat, že správná náhrada je

$$(II.7.3) \quad dx dy dz = r dr d\varphi dw.$$

(Více podrobností najdete v kapitole II.9.)

Z geometrického významu r, φ a w je patrné, že $r \geq 0, \varphi$ lze vybírat z jakéhokoliv intervalu délky 2π a $w \in \mathbb{R}$. Transformace trojného integrálu do cylindrických souřadnic má smysl tehdy, zjednoduší-li se buď integrovaná funkce nebo popis integračního oboru. Integrovaná funkce se obvykle zjednoduší, pokud na x a y závisí prostřednictvím výrazu $x^2 + y^2$. (Při transformaci pak $x^2 + y^2$ přejde v r^2 .) Popis oboru integrace je obvykle v cylindrických souřadnicích jednodušší, pokud je tento obor válcem nebo nějakou jednoduchou částí válce.



Obr. 13

Transformací trojného integrálu $\iiint_M f dx dy dz$ získáme integrál na oboru M' proměnných r, φ, w . V optimálním případě je rovnicemi (II.7.2) definováno vzájemně jednoznačné zobrazení M' na M . Nicméně, jelikož chování integrované funkce na množině míry nula nemá vliv ani na existenci ani na hodnotu integrálu (pokud funkce je omezená), vzájemná jednoznačnost přiřazení bodů $[r, \varphi, w] \in M'$ a bodů $[x, y, z] \in M$ může být na množině míry nula porušena. Toto platí i v případě transformací trojného integrálu do dalších (sférických, zobecněných cylindrických atd.) souřadnic, proto to již nebudeme znovu explicitně připomínat.

II.7.7. Příklad. Vypočítejme objem tělesa M , omezeného válcovou plochou $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, rovinou $z = 0$ a paraboloidem $z = x^2 + y^2$.

Ř e š e n í : Objem M je identický s třírozměrnou Jordanovou mírou oblasti M (viz

odstavec II.5.8). Můžeme jej tudíž značit $\mu_3(M)$. Je definován integrálem $\iiint_M dx dy dz$. Tento integrál vypočítáme pomocí transformace do cylindrických souřadnic.

M je množinou bodů $[x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ takových, že $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ a $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Poslední nerovnost lze zapsat: $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$. Dosadíme-li do ní za x a y z rovnic (II.7.2), obdržíme:

$$\begin{aligned} r^2 - 2r \sin \varphi &\leq 0, \\ r &\leq 2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Nerovnosti $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ odpovídají nerovnostem

$$0 \leq w \leq r^2.$$

Tyto nerovnosti ukazují, v jakých mezích je třeba integrovat podle r a podle w . Meze pro integraci podle φ jsou patrné, představíme-li si, jak vypadá kolmý průmět M na rovinu xy . Průmětem je kruh M_{xy} se středem $[0, 1]$ a poloměrem 1. Úhel, vytvořený všemi možnými polopřímkami vycházejícími z počátku a mířícími do M_{xy} , je úhel mezi krajními hodnotami $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$. Hledaný objem tudíž je:

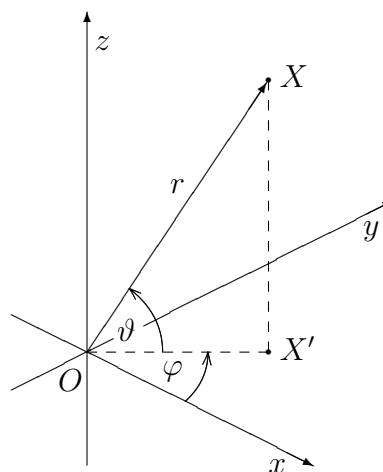
$$\mu_3(M) = \iiint_M dx dy dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin \varphi} \left(\int_0^{r^2} r dw \right) dr \right) d\varphi = \int_0^\pi 4 \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Integrál $\int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin \varphi} \left(\int_0^{r^2} r dw \right) dr \right) d\varphi$ se na rozdíl od trojnásobného integrálu nazývá "trojnásobný integrál". Aby bylo okamžitě zřejmé, v jakých mezích se podle které proměnné integruje, zapisujeme často trojnásobný integrál v tomto tvaru:

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin \varphi} \left(\int_0^{r^2} r dw \right) dr \right) d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} dr \int_0^{r^2} r dw.$$

II.7.8. Sférické souřadnice v \mathbb{E}_3 . Sférické souřadnice bodu $X = [x, y, z]$ v \mathbb{E}_3 jsou r , φ a ϑ . Mají tento geometrický význam: r je vzdálenost bodu X od počátku O . φ je úhel mezi úsečkou $\overline{OX'}$ (kde X' je ortogonální projekce bodu X na rovinu xy) a kladnou částí osy x (měřený od osy x). ϑ je úhel mezi úsečkou $\overline{OX'}$ a úsečkou \overline{OX} (měřený od úsečky $\overline{OX'}$). Tato geometrická interpretace sférických souřadnic snadno vede k následujícím rovnicím:

$$(II.7.4) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \cos \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta. \end{aligned}$$



Obr. 14

Při transformaci trojnásobného integrálu z kartézských souřadnic x, y, z do sférických souřadnic r, φ, ϑ je též nutné transformovat výraz $dx dy dz$. Je možné dokázat, že správná náhrada tohoto výrazu je:

$$(II.7.5) \quad dx dy dz = r^2 \cos \vartheta dr d\varphi d\vartheta.$$

(V kapitole II.9 se dozvíte více o tom, proč tomu tak je.)

Z geometrického významu r , φ a ϑ vyplývá, že $r \geq 0$, φ lze vybírat z jakéhokoliv intervalu délky 2π (například z $\langle 0, 2\pi \rangle$) a ϑ lze vybírat například z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Transformace trojného integrálu do sférických souřadnic obvykle vede ke zjednodušení integrované funkce, pokud tato funkce závisí na x , y , z prostřednictvím výrazu $x^2 + y^2 + z^2$, který při transformaci přejde v r^2 . Popis oboru integrace se obvykle zjednoduší tehdy, je-li tímto oborem koule se středem v počátku nebo nějaká její výseč.

II.7.9. Příklad. Vypočítejme objem tělesa M , které má tvar horní části koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, odříznuté kuželovou plochou $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$.

Ř e š e n í : Uvažovaná koule má ve sférických souřadnicích r , φ , ϑ velmi jednoduchý popis: $r \leq 1$. Dosazením z rovnic (II.7.4) do rovnice kuželové plochy obdržíme:

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 \vartheta &= \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi), \\ \sin^2 \vartheta &= \frac{1}{3} \cos^2 \vartheta, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \pm \sqrt{3}/3, \end{aligned}$$

což znamená, že $\vartheta = \pm\pi/6$. Jelikož M se rozkládá nad kuželovou plochou (a na ní), souřadnice ϑ bodů v M splňuje: $\vartheta \in \langle \pi/6, \pi/2 \rangle$. Konečně, úhel φ probíhá od 0 do 2π . Pro objem M tedy platí:

$$\mu_3(M) = \iiint_M dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta d\vartheta \right) d\varphi \right) dr = \frac{1}{3}\pi.$$

II.7.10. Zobecněné cylindrické souřadnice v \mathbb{E}_3 . Tyto souřadnice bodu $[x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ budeme opět značit, stejně jako v případě cylindrických souřadnic, r , φ a w . Na rozdíl od cylindrických souřadnic však zobecněné cylindrické souřadnice nemusí mít stejný počátek O jako kartézské souřadnice a rovněž vzdálenosti v různých směrech jsou měřeny s různou "váhou": r a φ reprezentují zobecněné polární souřadnice bodu $[x, y]$ v rovině xy a w je lineární funkce proměnné z . Relace mezi zobecněnými cylindrickými a kartézskými souřadnicemi tudíž jsou:

$$(II.7.6) \quad x = x_0 + ar \cos \varphi, \quad y = y_0 + br \sin \varphi, \quad z = z_0 + cw,$$

kde $[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v \mathbb{E}_3 (počátek zobecněného cylindrického souřadného systému) a a , b , c jsou kladné parametry.

Analogicky rovnicím (II.7.3) a (II.7.5), když transformujeme trojný integrál do zobecněných cylindrických souřadnic, musíme transformovat i výraz $dx dy dz$, a to následujícím způsobem:

$$(II.7.7) \quad dx dy dz = abc r dr d\varphi dw.$$

Při transformaci trojného integrálu do zobecněných cylindrických souřadnic se obvykle zjednoduší integrovaná funkce, pokud na x , y a z závisí prostřednictvím výrazu $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2$, který při transformaci přejde v r^2 . Popis oboru integrace se obvykle zjednoduší, pokud je jím vnitřek eliptické válcové plochy $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = R^2$ nebo nějaká jeho jednoduchá část.

II.7.11. Zobecněné sférické souřadnice v \mathbb{E}_3 . Tyto souřadnice bodu $[x, y, z] \in \mathbb{E}_3$ budeme značit stejně, jako sférické souřadnice, tj. r , φ , ϑ . Na rozdíl od sférických souřadnic nemusí mít zobecněné sférické souřadnice stejný počátek jako kartézské souřadnice a rovněž vzdálenosti v různých směrech jsou měřeny s různou vahou. Relace mezi kartézskými a zobecněnými sférickými souřadnicemi jsou:

$$(II.7.8) \quad x = x_0 + ar \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = y_0 + br \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = z_0 + cr \sin \vartheta,$$

kde $[x_0, y_0, z_0]$ je vybraný bod v \mathbb{E}_3 (počátek zobecněného sférického souřadného systému) a a, b, c jsou kladné parametry.

Při transformaci trojného integrálu z kartézských do zobecněných sférických souřadnic je třeba výraz $dx dy dz$ transformovat podle vzorce:

$$(II.7.9) \quad dx dy dz = abc r^2 \cos \vartheta dr d\varphi d\vartheta.$$

Transformace trojného integrálu do zobecněných sférických souřadnic obvykle vede ke zjednodušení integrované funkce, pokud tato funkce závisí na x, y a z prostřednictvím výrazu $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 + (z - z_0)^2/c^2$, který při transformaci přejde v r^2 . Popis oboru integrace se obvykle zjednoduší, pokud tímto oborem je vnitřek elipsoidu $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 + (z - z_0)^2/c^2 = R^2$ nebo nějaká jeho jednoduchá část.

II.8. Některé fyzikální aplikace trojného integrálu.

Předpokládejme, že třírozměrné těleso vyplňuje měřitelnou množinu M v \mathbb{E}_3 . Těleso nemusí být homogenní, což znamená, že jeho hustota nemusí být konstantní. Označme hustotu $\rho(x, y, z)$ a předpokládejme, že je udána v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Trojným integrálem je možné definovat a vypočítat tyto základní mechanické charakteristiky tělesa:

hmotnost tělesa $m = \iiint_M \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy . $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz . $m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz . $m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{m_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{m_{xy}}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy . $J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg · m²],

vzhledem k rovině xz . $J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ [kg · m²],

$$\text{vzhledem k rovině } yz \quad J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k ose } x \dots \quad J_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k ose } y \dots \quad J_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k ose } z \dots \quad J_z = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$\text{vzhledem k počátku} \quad J_0 = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2].$$

Zkuste sami navrhnout vzorec, kterým můžeme definovat a rovněž podle něj vypočítat moment setrvačnosti vzhledem k obecné příince nebo rovině v \mathbb{E}_3 .

II.9.* Více o substituční metodě výpočtu dvojného a trojného integrálu.

Myšlenka, na které je založena obecná substituční metoda výpočtu dvojného a trojného integrálu, je pro oba integrály stejná. Proto ji v této kapitole budeme vysvětlovat současně pro dvojný i trojný integrál. Budeme používat toto zjednodušené značení:

- \mathbb{E}_k bude značit buď \mathbb{E}_2 (pokud $k = 2$) nebo \mathbb{E}_3 (pokud $k = 3$),
- integrál \int bude znamenat buď \iint (pokud $k = 2$) nebo \iiint (pokud $k = 3$),
- bod $X \in \mathbb{E}_k$ bude mít tvar $[x_1, x_2]$ (pro $k = 2$) nebo $[x_1, x_2, x_3]$ (pro $k = 3$) a
- dX bude označovat buď $dx_1 dx_2$ (pro $k = 2$) nebo $dx_1 dx_2 dx_3$ (pro $k = 3$).

Některé běžně používané substituce již známe – jsou definovány rovnicemi (II.3.3), (II.3.6), (II.7.2), (II.7.4), (II.7.6) a (II.7.8) a jsou nazývány transformace do polárních, zobecněných polárních, cylindrických, sférických, zobecněných cylindrických nebo zobecněných sférických souřadnic. V této kapitole se budeme zabývat metodou substituce na obecné úrovni.

Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) a že počítáme integrál $\int_M f(X) \, dX$. Pokud každý bod $X \in M$ lze vyjádřit ve tvaru $X = \mathcal{F}(Y)$, kde body Y probíhají nějakou množinu $M' \subset \mathbb{E}_k$, pak lze počítaný integrál transformovat na jiný integrál v proměnné Y na oboru integrace M' . Je však třeba, aby oba integrály na M a na M' existovaly a aby zobrazení \mathcal{F} mělo jisté vlastnosti. Požadovaným vlastnostem zobrazení jsou věnovány následující odstavce.

II.9.1. Regulární zobrazení a jeho jakobián. Nechť M a M' jsou oblasti v \mathbb{E}_k . Předpokládejme, že \mathcal{F} je zobrazení M' do M , definované rovnicemi

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \phi_2(y_1, y_2) \quad (\text{pro } k = 2),$$

$$\text{nebo } x_1 = \phi_1(y_1, y_2, y_3), \quad x_2 = \phi_2(y_1, y_2, y_3), \quad x_3 = \phi_3(y_1, y_2, y_3) \quad (\text{pro } k = 3).$$

Označme J determinant, který je definován rovnostmi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad (\text{je-li } k = 2) \quad \text{nebo} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \quad (\text{je-li } k = 3).$$

J se nazývá Jacobiho determinant nebo jenom krátce jakobián zobrazení \mathcal{F} . Je zřejmé, že J závisí na Y .

Zobrazení \mathcal{F} se nazývá regulární, mají-li funkce ϕ_i ($i = 1, 2$ nebo $i = 1, 2, 3$) spojitě partiální derivace v oblasti M' a $J(Y) \neq 0$ ve všech bodech $Y \in M'$.

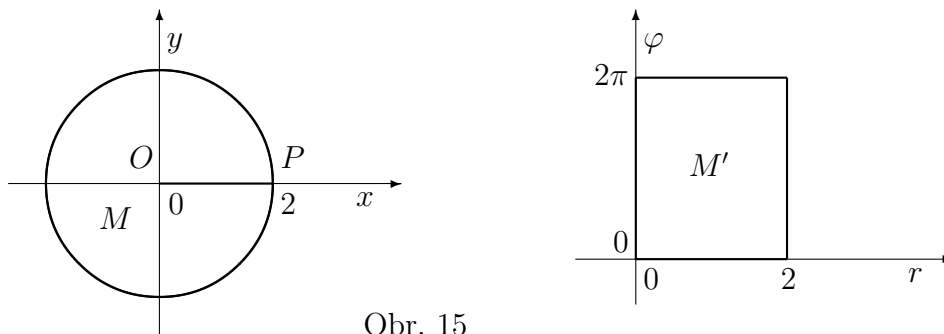
II.9.2. Vzájemně jednoznačné zobrazení. Zobrazení \mathcal{F} se nazývá vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M' na množinu M , pokud

- a) je prosté (tj. pro všechna $Y_1, Y_2 \in M'$ platí: $Y_1 \neq Y_2 \implies \mathcal{F}(Y_1) \neq \mathcal{F}(Y_2)$)
- b) a je zobrazením na množinu M (tj. obor hodnot pokrývá celou množinu M).

II.9.3. Příklad. Ověřte, že zobrazení, definované rovnicemi

$$(II.9.1) \quad x_1 = \phi_1(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad x_2 = \phi_2(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

(porovnejte s rovnicemi (II.3.3)), je vzájemně jednoznačným regulárním zobrazením otevřeného obdélníku $M' = \{[r, \varphi] \in \mathbb{E}_2; r \in (0, 2), \varphi \in (0, 2\pi)\}$ na oblast $M = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1^2 + x_2^2 < 4\} - \{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2; x_1 \in (0, 2), x_2 = 0\}$. (M je otevřený kruh v \mathbb{E}_2 se středem v počátku, ze kterého je vyjmuta úsečka \overline{OP} , kde O je počátek a $P = [2, 0]$.) Viz obr. 15. Vzájemně jednoznačná korespondence mezi body $[x_1, x_2] \in M$



Obr. 15

a $[r, \varphi] \in M'$ je zřejmá. Rovněž je zřejmé, že funkce ϕ_1 a ϕ_2 mají spojitě partiální derivace v M' . K ověření regularity zobrazení (II.9.1) tedy stačí vypočítat jakobián tohoto zobrazení:

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Je patrné, že $J(r, \varphi) \neq 0$ v M' . Zobrazení (II.9.1) je tudíž regulární v M' .

II.9.4. Věta (o substituci). Necht' $X = \mathcal{F}(Y)$ je vzájemně jednoznačné regulární zobrazení oblasti $M' \in \mathbb{E}_k$ na oblast $M \in \mathbb{E}_k$. Pak

$$(II.9.2) \quad \int_M f(X) dX = \int_{M'} f(\mathcal{F}(Y)) \cdot |J(Y)| dY,$$

pokud oba integrály existují.

II.9.5. Poznámka. Přidání nebo odebrání množiny míry nula k oboru integrace neovlivní hodnotu integrálu. Větu II.9.4 můžeme proto zobecnit:

Jsou-li splněny předpoklady věty II.9.4 a A , respektive A' , jsou množiny v \mathbb{E}_k , které se od M , respektive M' , liší jenom o množinu míry nula, pak

$$(II.9.3) \quad \int_A f(X) dX = \int_{A'} f(\mathcal{F}(Y)) \cdot |J(Y)| dY,$$

pokud oba integrály existují.

Z rovností (II.9.2) a (II.9.3) je patrné, že dX v integrálu na levé straně při substituci přechází v $|J(Y)| dY$ v integrálu na pravé straně. V příkladu II.9.3 jsme již ukázali, že je-li $k = 2$ a $Y = [r, \varphi]$ představuje polární souřadnice, pak jakobián je roven r . Z obecné rovnice

$$(II.9.4) \quad dX = |J(Y)| dY$$

tudíž vyplývá, jakožto speciální případ, rovnice (II.3.4) (tj. $dx dy = r dr d\varphi$). Podobně, o správnosti náhrad výrazů $dx dy$ a $dx dy dz$ při transformacích do zobecněných polárních, cylindrických a dalších souřadnic (viz rovnice (II.3.7), (II.7.3), (II.7.5), (II.7.7) a (II.7.9)) se můžeme přesvědčit výpočtem jakobiánů zobrazení, definovaných rovnicemi (II.3.6), (II.7.2), (II.7.4), (II.7.6) a (II.7.8).

II.10. Cvičení.

1. Existují následující integrály? (Viz odstavce II.1.6, II.2.1, II.5.5 a II.6.1.)

a) $\iint_M \frac{dx dy}{x + y + 1}$; $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

b) $\iint_M \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$; $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\}$

c) $\iint_M \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$; $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\}$

d) $\iint_M \frac{dx dy}{(1 - xy)^2}$; M je čtverec $PQRS$, kde $P = [1, 2]$, $Q = [3, 2]$, $R = [3, 4]$,
 $S = [1, 4]$

e) $\iiint_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16}} dx dy dz$; $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} < 1\}$

f) $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$; $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 0\}$

2. Vypočítejte obsah oblasti M v rovině xy , omezené křivkami

a kružnicemi $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$,

- k) $\iint_D y \, dx \, dy$; D je horní polovina kruhu $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$),
- l) $\iint_D x \, dx \, dy$; D je výseč kruhu $x^2 + y^2 \leq a^2$, obsahující body $[x, y]$, pro které platí $x \geq 0$ a $-x \leq \sqrt{3}y \leq 1$,
- m) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$; V je koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, ($a > 0$),
- n) $\iiint_D (x + y + z)^2 \, dx \, dy \, dz$; D je oblast v poloprostoru $z \geq 0$, omezená paraboloidem $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,
- o) $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$; V je oblast v \mathbb{E}_3 , omezená plochami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z = 1$,
- p) $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$; D je oblast v \mathbb{E}_3 , omezená plochami $x^2 + y^2 = 2z$ a $z = 2$,
- q) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \, dx \, dy \, dz$; V je vnitřek elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

5. Určete souřadnice těžiště homogenní desky v \mathbb{E}_2 , omezené křivkami

- a) $y = \sin x$, $y = 0$; $x \in \langle 0, \pi \rangle$, b) $x^2 + y^2 = a^2$, $y = 0$; ($y \geq 0$, $a > 0$),
c) $y^2 = ax$, $x = 0$, $y = a$; ($y > 0$, $a > 0$), d) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.
(Viz kapitolu II.4.)

6. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose x homogenní desky v \mathbb{E}_2 , omezené přímkami $y = x/2$, $y = a$, $x = a$ ($a > 0$). Hustota je $\rho = 1$.
(Viz kapitolu II.4.)

7. Vypočítejte hmotnost tělesa v \mathbb{E}_3 , omezeného plochami

- a) $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), pokud hustota je $\rho(x, y, z) = x + y + z$,
- b) $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ (pro $y > 0$), pokud $a > 0$ a hustota je $\rho(x, y, z) = y$,
- c) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ ($a > 0$), pokud hustota je $\rho(x, y, z) = 2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(Viz kapitolu II.8.)

III. Křivkové integrály

III.1. Jednoduché křivky.

Křivkové integrály jsou integrály, jejichž integrační obory jsou křivky. Uvidíte, že tyto integrály mají široké použití. Než se však začneme křivkovými integrály zabývat, musíme si ujasnit, co budeme přesně rozumět pojmem “křivka”. V literatuře je možné nalézt definice různých typů křivek. V tomto textu se omezíme na dva typy: tak zvanou “jednoduchou hladkou křivku” a “jednoduchou po částech hladkou křivku”.

III.1.1. Jednoduchá hladká křivka – motivace a označení. Definice jednoduché hladké křivky je založena na této představě: Bod A se pohybuje v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 v časovém intervalu $\langle a, b \rangle$ a jeho poloha v okamžiku t je $P(t)$. Předpokládejme, že

- bod A se v žádných dvou různých okamžicích $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$, $t_1 < t_2$ (s možnou výjimkou případu, kdy $t_1 = a$ a $t_2 = b$) nenachází na stejném místě a
- rychlost $\dot{P}(t)$ pohybu je omezená, mění se spojitě a je různá od nuly s možnou výjimkou případů, kdy $t = a$ nebo $t = b$.

Trajektorii, kterou bod A proběhne v časovém intervalu $\langle a, b \rangle$, budeme nazývat jednoduchou hladkou křivkou. Polohovou funkci P budeme nazývat “parametrizace” jednoduché hladké křivky.

V přesné definici můžeme na představu o pohybu bodu zapomenout a P prostě považovat za zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle$ do \mathbb{E}_2 (křivka v \mathbb{E}_2) nebo do \mathbb{E}_3 (křivka v \mathbb{E}_3). Jednoduchou hladkou křivkou pak bude obor hodnot zobrazení P . Jelikož pro každé pevně zvolené $t \in \langle a, b \rangle$ je $P(t)$ bodem v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$), $P(t)$ má dvě nebo tři souřadnice. Označíme-li je $\phi(t), \psi(t)$ ($k = 2$) nebo $\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)$ ($k = 3$), můžeme psát:

$$\begin{aligned} P(t) &= [\phi(t), \psi(t)] && \text{je-li } k = 2, \\ P(t) &= [\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)] && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

ϕ a ψ (respektive ϕ, ψ a ϑ) jsou funkcemi jedné proměnné t , definovanými v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nazýváme je souřadnicové funkce zobrazení P . Proměnnou t nazýváme parametr a derivaci podle t značíme, jak je to obvyklé ve fyzice, tečkou. Derivaci funkce P považujeme za vektorovou funkci. (Je to logické, neboť ve fyzice je derivací polohy podle času rychlost a rychlost je vektor.) Souřadnice $\dot{P}(t)$ tudíž zapisujeme v kulatých závorkách. Rovněž můžeme použít vektory \mathbf{i}, \mathbf{j} a \mathbf{k} (jednotkové vektory, orientované souhlasně s osami x, y a z – viz odstavec I.2.12) a psát:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t)) = \dot{\phi}(t)\mathbf{i} + \dot{\psi}(t)\mathbf{j} && \text{je-li } k = 2, \\ \dot{P}(t) &= (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t)) = \dot{\phi}(t)\mathbf{i} + \dot{\psi}(t)\mathbf{j} + \dot{\vartheta}(t)\mathbf{k} && \text{je-li } k = 3. \end{aligned}$$

Zobrazení P považujeme za spojitě, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojitě. Podobně, o zobrazení P říkáme, že má spojitou derivaci, mají-li všechny souřadnicové funkce spojitou derivaci.

Nehrozí-li nedorozumění a záměna se značením souřadných os, můžeme místo $\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)$ souřadnicové funkce zobrazení P značit i $x(t), y(t), z(t)$.

III.1.2. Jednoduchá hladká křivka – definice. Nechť P je spojitě zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ do \mathbb{E}_k (kde $k = 2$ nebo $k = 3$). Předpokládejme, že

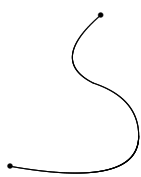
- a) zobrazení P je v intervalu $\langle a, b \rangle$ prosté, s možnou výjimkou případu, kdy $P(a) = P(b)$ a
- b) P má omezenou, spojitou a nenulovou derivaci \dot{P} v otevřeném intervalu (a, b) .

Množinu všech bodů $P(t)$ pro $t \in \langle a, b \rangle$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_k . Zobrazení P nazýváme parametrizace.

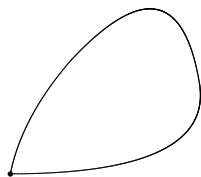
Uvedenou jednoduchou hladkou křivku nazýváme uzavřenou, je-li $P(a) = P(b)$.

Jednoduché hladké křivky budeme většinou značit velkými písmeny, například C , K , C_1 , C_2 , apod.

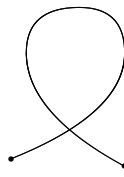
Na obr. 16a a 16b vidíte příklady jednoduchých hladkých křivek. Naopak, křivky na obr. 16c a 16d nejsou jednoduchými hladkými křivkami. (Křivka na obr. 16c není jednoduchá a křivka na obr. 16d není hladká.)



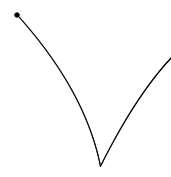
Obr. 16a



Obr. 16b



Obr. 16c



Obr. 16d

Každá jednoduchá hladká křivka má nekonečně mnoho parametrizací. To snadno pochopíme, když se vrátíme k představě vysvětlené na začátku odstavce III.1.1, podle které lze jednoduchou hladkou křivku chápat jako trajektorii, proběhnutou v souladu s jistými pravidly hmotným bodem v určitém časovém intervalu. Jednu konkrétní trajektorii je zřejmě možné proběhnout v souladu s danými pravidly jedním směrem, opačným směrem, v mnoha různých časových intervalech a různě se měnící rychlostí. Každý způsob proběhnutí křivky odpovídá jedné parametrizaci. Křivka může být proběhnuta nekonečně mnoha způsoby, proto má nekonečně mnoho různých parametrizací.

III.1.3. Tečný vektor. Orientovaná jednoduchá hladká křivka. Předpokládejme, že P je parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, jednoduché hladké křivky C v \mathbb{E}_k (kde $k = 2$ nebo $k = 3$). Pak vektor $\dot{P}(t)$ má pro každé $t \in (a, b)$ tečný směr ke křivce C . (To je opět snadno pochopitelné – je to ze stejného důvodu, ze kterého má rychlost odpovídajícího pohybu bodu v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 tečný směr ke dráze pohybu.) Vektory $\pm \dot{P}(t) / \|\dot{P}(t)\|$ mají oba rovněž tečný směr ke křivce C a navíc mají jednotkovou délku.

Jednoduchou hladkou křivku C nazveme orientovanou jednotkovým tečným vektorem τ , pokud zvolíme

a) $\tau = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ ve všech bodech $P(t)$, odpovídajících $t \in (a, b)$,

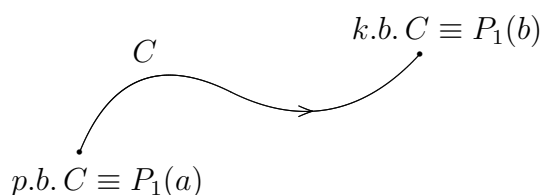
b) nebo $\tau = -\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ ve všech bodech $P(t)$, odpovídajících $t \in (a, b)$.

V případě a) říkáme, že jednoduchá hladká křivka C je orientovaná souhlasně s parametrizací P . $P(a)$ nazýváme počáteční bod křivky C (značíme *p.b.* C) a $P(b)$ nazýváme koncový bod křivky C (značíme *k.b.* C).

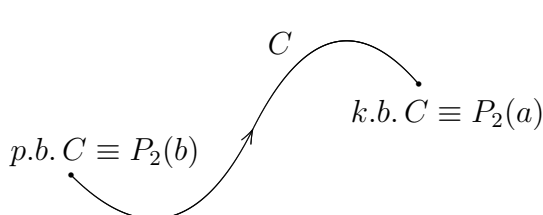
V případě b) říkáme, že jednoduchá hladká křivka C je orientovaná nesouhlasně s parametrizací P . Názvy a označení bodů $P(a)$, $P(b)$ jsou opačné, než v případě a).

Pokud křivka C není uzavřená, pak lze její orientaci též jednoznačně definovat volbou jednoho z bodů $P(a)$ za počáteční bod a druhého za koncový bod. (U uzavřené křivky tuto možnost nemáme, protože oba body $P(a)$ a $P(b)$ splývají.)

Orientaci křivky obvykle na obrázcích vyznačujeme šipkami – viz obr. 17a a 17b. Křivka C_1 na obr. 17a je orientována souhlasně s parametrizací P_1 , křivka na obr. 17b je orientována nesouhlasně s parametrizací P_2 . (O obou parametrizacích pro jednoduchost předpokládáme, že jsou definované na stejném intervalu $\langle a, b \rangle$.)



Obr. 17a



Obr. 17b

Vztah mezi orientací jednoduché hladké křivky C a její parametrizací P (definovanou v intervalu $\langle a, b \rangle$) lze též přiblížit pomocí již zmíněné představy o tom, že C je trajektorie, proběhnutá bodem A v časovém intervalu $\langle a, b \rangle$, přičemž $P(t)$ označuje polohu bodu A v okamžiku t . Je-li křivka C orientovaná souhlasně s parametrizací P , bod A se pohybuje po křivce C ve směru její orientace. Je-li křivka C orientovaná nesouhlasně s parametrizací P , bod A se pohybuje po křivce C proti směru její orientace.

III.1.4. Příklad. Každá úsečka v \mathbb{E}_k je jednoduchou hladkou křivkou. Například úsečku \overline{AB} v \mathbb{E}_3 , kde $A = [1, 2, 4]$ a $B = [3, -1, 7]$ je možné parametrizovat zobrazením

$$P(t) = A + t \cdot (B - A); \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Rozepsáním do souřadnic získáme tvar souřadnicových funkcí ϕ , ψ a ϑ této parametrizace:

$$x = \phi(t) = 1 + 2t, \quad y = \psi(t) = 2 - 3t, \quad z = \vartheta(t) = 4 + 3t; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ověřte sami, že zobrazení P má všechny vlastnosti, požadované v definici III.1.2.

Pokud je úsečka orientována tak, že A je její počáteční bod a B je její koncový bod, je orientace souhlasná s výše uvedenou parametrizací P .

III.1.5. Příklad. Úsek paraboly $y = x^2 + 1$ mezi body $[1, 2]$ a $[3, 10]$ (orientovaný od $[3, 10]$ k $[1, 2]$) je jednoduchou hladkou křivkou v \mathbb{E}_2 . Ověřte sami, že její parametrizací je například zobrazení

$$P : \quad x = \phi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t^2 + 1; \quad t \in \langle 1, 3 \rangle.$$

Parametrizace odpovídá pohybu po křivce od jejího koncového bodu k jejímu počátečnímu bodu v časovém intervalu $\langle 1, 3 \rangle$. Křivka je tudíž orientovaná nesouhlasně vůči zvolené parametrizaci.

III.1.6. Příklad. Oblouk kružnice $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, orientovaný od bodu $[3, 0]$ k bodu $[0, 3]$, je jednoduchou hladkou křivkou v \mathbb{E}_2 . Ověřte sami, že možnou parametrizací je například zobrazení, definované rovnicemi

$$x = \phi(t) = 3 \cos t, \quad y = \psi(t) = 3 \sin t; \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

Zadaná orientace křivky je souhlasná s touto parametrizací. (Ověřte sami, že zobrazení $x = t, y = \sqrt{9 - t^2}; t \in \langle 0, 3 \rangle$ požadavky, kladené na parametrizaci, nesplňuje.)

III.1.7. Příklad. Kružnice $C : (x - 3)^2 + y^2 = 4$ v \mathbb{E}_2 (orientovaná proti směru hodinových ručiček) je uzavřená jednoduchá hladká křivka. Ověřte sami, že její parametrizací je například zobrazení, definované rovnicemi

$$x = \phi(t) = 3 + 2 \cos t, \quad y = \psi(t) = 2 \sin t; \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Daná orientace křivky C je souhlasná s touto parametrizací.

III.1.8. Jednoduchá po částech hladká křivka. Předpokládejme, že C_1, \dots, C_n jsou jednoduché hladké křivky v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$) takové, že

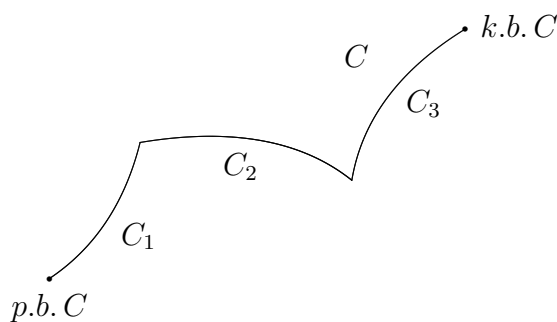
- $k.b. C_1 = p.b. C_2, k.b. C_2 = p.b. C_3, \dots, k.b. C_{n-1} = p.b. C_n,$
- kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy $p.b. C_1 = k.b. C_n,$ nemají žádné dvě z křivek C_1, \dots, C_n žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \cup_{i=1}^n C_i$ nazýváme jednoduchou po částech hladkou křivkou v \mathbb{E}_k . (Zápis často zkracujeme na “jednoduchá p.č. hladká křivka”.)

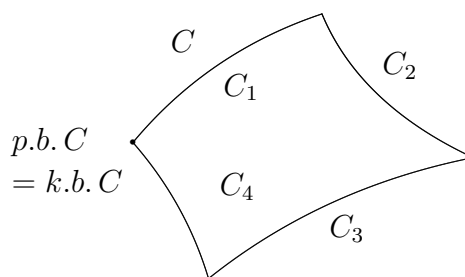
Orientace jednoduché p.č. hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí C_1, \dots, C_n . Pokládáme $p.b. C = p.b. C_1$ (počáteční bod C) a $k.b. C = k.b. C_n$ (koncový bod C).

Křivku, která se od C liší pouze orientací, označujeme $-C$.

Jednoduchá p.č. hladká křivka C se nazývá uzavřená, jestliže $p.b. C = k.b. C$.



Obr. 18a



Obr. 18b

Na obr. 18a a 18b vidíte příklady jednoduchých p.č. hladkých křivek. Křivka na obr. 18b je uzavřená.

Pojem jednoduché p.č. hladké křivky je zobecněním pojmu jednoduché hladké křivky. Jednoduchá p.č. hladká křivka v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$) je omezenou měřitelnou množinou v \mathbb{E}_k , jejíž k -rozměrná míra je rovna nule.

**III.2. Křivkový integrál skalární funkce.
(Křivkový integrál 1. druhu.)**

III.2.1. Fyzikální motivace. Představme si, že struna nebo drát má tvar jednoduché hladké křivky C v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$). Struna nemusí být homogenní, její délková hustota ρ (tj. hmotnost vztažená k jednotce délky) je funkcí dvou proměnných x, y (je-li $k = 2$) nebo tří proměnných x, y, z (je-li $k = 3$). Chceme vypočítat celkovou hmotnost struny.

K vyjádření a výpočtu hmotnosti křivky C bychom mohli dospět cestou dělení křivky na mnoho menších částí, přes Riemannovy součty a úvahy o limitě Riemannových součtů při zjemňování dělení. (Analogickým způsobem jsme v odstavcích II.1.1 a II.1.7 dospěli k vyjádření hmotnosti desky dvojným integrálem a v odstavcích II.5.1 a II.5.6 k vyjádření hmotnosti tělesa trojným integrálem.) Zvolme však jiný přístup. Tento odstavec má pouze motivační charakter a tak si zde můžeme dovolit použití “archaizmů”, které nejsou přesně a jasně vymezenými pojmy. Máme na mysli “nekonečně malé” kladné číslo dt a představu o rozdělení křivky C na nekonečně mnoho “nekonečně krátkých” úseků. (Na tomto místě doporučujeme vrátit se ke skriptu [5] a přečíst si odstavce V.1.3 a V.1.4.) Je-li P parametrizace křivky C definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak typickým “nekonečně krátkým” úsekem křivky C je úsečka s koncovými body $P(t)$ a $P(t+dt)$, kde $t \in \langle a, b \rangle$ a dt je “nekonečně malé” kladné číslo. Hustotu lze na této úsečce považovat za konstantní a rovnou $\rho(P(t))$. Hmotnost úsečky je tudíž $dm = \rho(P(t)) \cdot ds$, kde ds je délka úsečky. Jelikož úsečka je “nekonečně krátká”, lze její délku vyjádřit: $ds = \|P(t+dt) - P(t)\| = \|\dot{P}(t)\| dt$. Celkovou hmotnost křivky C získáme sečtením hmotností všech nekonečně krátkých úseků, na které jsme křivku C rozdělili:

$$m = \int_C dm = \int_a^b \rho(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt.$$

Toto vyjádření nyní použijeme jako základ definice tzv. křivkového integrálu skalární funkce. V definici budeme místo ρ integrovanou funkci značit f . V souladu s úmluvou z odstavce I.2.12 budeme místo “skalární funkce” většinou používat pouze název “funkce”.

III.2.2. Křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce. Nechť C je jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C . *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f ds$ a definujeme jej rovnicí

$$(III.2.1) \quad \int_C f ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| dt.$$

K výpočtu integrálu vpravo se vrátíme v odstavci III.2.7 a výpočet budeme rovněž ilustrovat na příkladech v odstavcích III.2.8 a III.2.9.

Výroky “funkce f je integrovatelná na křivce C ” a “křivkový integrál f na C existuje” budeme mínit přesně totéž.

III.2.3. Poznámka – nezávislost na volbě parametrizace. Integrovatelnost funkce f na jednoduché hladké křivce C i křivkový integrál f na C jsou definovány pomocí

parametrizace P křivky C . Křivka C však má nekonečně mnoho různých parametrizací (viz odstavec III.1.2). Vzniká otázka: Může integrovatelnost funkce f na křivce C nebo hodnota křivkového integrálu f na C záviset na konkrétní volbě parametrizace nebo jsou tyto pojmy na volbě parametrizace nezávislé? Odpověď je: Lze dokázat, že jak existence, tak hodnota křivkového integrálu f na C nezávisí na volbě parametrizace křivky C .

III.2.4. Křivkový integrál skalární funkce na jednoduché p.č. hladké křivce.

Nechť C je jednoduchá p.č. hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 , která je složena z jednoduchých hladkých křivek C_1, \dots, C_n (viz odstavec III.1.8). Nechť f je skalární funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Je-li funkce f integrovatelná na každé z křivek C_1, \dots, C_n , pak říkáme, že je integrovatelná na křivce C . Křivkový integrál skalární funkce f na křivce C pak definujeme rovnicí

$$(III.2.2) \quad \int_C f \, ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f \, ds.$$

(Křivkové integrály na pravé straně jsou křivkovými integrály funkce f na jednoduchých hladkých křivkách, které jsou již známé z definice III.2.2.)

Místo “křivkový integrál skalární funkce” se často používá název křivkový integrál 1. druhu.

Místo $\int_C f \, ds$ můžeme například psát $\int_C f(x, y) \, ds$ (je-li $C \subset \mathbb{E}_2$ a f je funkce dvou proměnných) nebo $\int_C f(x, y, z) \, ds$ (je-li $C \subset \mathbb{E}_3$ a f je funkcí tří proměnných). Místo symbolu ds na konci integrálu se často používá i dl , dr , apod.

III.2.5. Délka křivky. Je-li C jednoduchá p.č. hladká křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 , pak integrálem $\int_C ds$ definujeme *délku* křivky C . Značíme ji $l(C)$.

Z (III.2.1) plyne, že ve speciálním případě, kdy C je jednoduchá hladká křivka a P je její parametrizace definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, můžeme délku křivky C vyjádřit:

$$(III.2.3) \quad l(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\dot{P}(t)\| \, dt.$$

III.2.6. Některé důležité vlastnosti křivkového integrálu skalární funkce. Jelikož křivkový integrál skalární funkce je definován pomocí jednorozměrného Riemannova integrálu, většina vlastností obou integrálů je stejná. Zmíňme se proto pouze o některých z nich:

- a) **Postačující podmínka pro existenci křivkového integrálu skalární funkce.** Je-li funkce f spojitá na jednoduché p.č. hladké křivce C , pak je na křivce C integrovatelná (tj. integrál $\int_C f \, ds$ existuje).
- b) **Linearita křivkového integrálu.** Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f + g$ a αf jsou také integrovatelné funkce na C a

$$\int_C (f + g) \, ds = \int_C f \, ds + \int_C g \, ds,$$

$$\int_C \alpha \cdot f \, ds = \alpha \cdot \int_C f \, ds.$$

- c) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C a funkce g se liší od f nejvýše v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelná funkce na křivce C a

$$\int_C g \, ds = \int_C f \, ds.$$

- d) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C , pak je také integrovatelnou funkcí na křivce $-C$ a

$$\int_{-C} f \, ds = \int_C f \, ds.$$

- e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C takové, že $f(X) \geq g(X)$ ve všech bodech $X \in C$, pak

$$\int_C f \, ds \geq \int_C g \, ds.$$

Speciálně, je-li $f(X) \geq 0$ ve všech bodech $X \in M$, pak $\int_C f \, ds \geq 0$.

Tvrzení a) je možné zobecnit: Je-li C jednoduchá p.č. hladká křivka a f je spojitá funkce na každé z jejích hladkých částí, pak f je integrovatelná funkce na C .

Tvrzení d) říká, že ani existence, ani hodnota křivkového integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci křivky.

III.2.7. Výpočet křivkového integrálu skalární funkce. Předpokládejme, že $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ je parametrizace jednoduché hladké křivky C , definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Křivkový integrál funkce f na jednoduché hladké křivce C pak můžeme vypočítat pomocí vzorce (III.2.1). $f(P(t))$ získáme tak, že do funkce f za proměnné x, y, z dosadíme

$$(III.2.4) \quad x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \vartheta(t),$$

za ds dosadíme

$$(III.2.5) \quad ds = \|\dot{P}(t)\| \, dt = \|(\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t))\| \, dt = \sqrt{\dot{\phi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2 + \dot{\vartheta}(t)^2} \, dt$$

a integrujeme podle parametru t na intervalu $\langle a, b \rangle$, na kterém je definovaná parametrizace křivky C .

Křivkový integrál funkce f na jednoduché p.č. hladké křivce, složené z jednoduchých hladkých křivek C_1, \dots, C_n , vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme integrály na křivkách C_1, \dots, C_n (například pomocí jejich parametrizací) a výsledky pak sečteme. (Viz formule (III.2.2).)

III.2.8. Příklad. C je sjednocení úseček $C_1 = \overline{OP}$ a $C_2 = \overline{PQ}$, kde $O = [0, 0, 0]$, $P = [1, 1, 0]$ a $Q = [1, 1, 1]$. Vypočítejme křivkový integrál funkce $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ na křivce C .

Ř e š e n í : Nejjednodušší parametrizace úseček C_1 a C_2 jsou:

$$C_1 : \quad P_1(t) = O + (P - O)t = [t, t, 0]; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$C_2 : \quad P_2(t) = P + (Q - P)t = [1, 1, t]; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Odtud plyne, že $\dot{P}_1(t) = (1, 1, 0)$, $\dot{P}_2(t) = (0, 0, 1)$ a $\|\dot{P}_1(t)\| = \sqrt{2}$, $\|\dot{P}_2(t)\| = 1$. Užitím formulí (III.2.1) a (III.2.2) obdržíme:

$$\int_C (x - 3y^2 + z) \, ds = \int_{C_1} (x - 3y^2 + z) \, ds + \int_{C_2} (x - 3y^2 + z) \, ds$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2) \sqrt{2} dt + \int_0^1 (t - 2) dt = -\frac{\sqrt{2} + 3}{2}.$$

III.2.9. Příklad. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (x^2 + y) ds$, kde C je kružnice $x^2 + (y - 5)^2 = 4$. Orientace kružnice není zadána, protože na existenci ani hodnotu křivkového integrálu skalární funkce nemá vliv.

Řešení: C je uzavřenou jednoduchou hladkou křivkou, která může být parametrizována například zobrazením

$$x = \phi(t) = 2 \cos t, \quad y = \psi(t) = 5 + 2 \sin t; \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Výpočet $\|\dot{P}(t)\|$: $\|\dot{P}(t)\| = \|(-2 \sin t, 2 \cos t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2$.

Pomocí formule (III.2.1) dostáváme:

$$\int_C (x^2 + y) ds = \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + 5 + 2 \sin t) \cdot 2 dt = 28\pi.$$

III.3. Některé fyzikální aplikace křivkového integrálu skalární funkce.

Křivkový integrál skalární funkce má mnoho aplikací. V tomto textu se omezíme na aplikace v mechanice.

Předpokládejme, že drát nebo struna má tvar křivky C v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$). Na křivce je rozložena hmota s délkovou hustotou $\rho(x, y)$ (je-li $k = 2$) nebo $\rho(x, y, z)$ (je-li $k = 3$). (ρ je hmotnost, vztahená k jednotce délky. Je udána v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$.) Křivkovým integrálem skalární funkce můžeme definovat a vypočítat některé základní mechanické charakteristiky křivky C .

I. $k = 2$

celková hmotnost $m = \int_C \rho(x, y) ds$ [kg],

statický moment

vzhledem k ose x $m_x = \int_C y \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m],

vzhledem k ose y .. $m_y = \int_C x \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k ose x $J_x = \int_C y^2 \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose y $J_y = \int_C x^2 \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²],

vzhledem k počátku .. $J_0 = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) ds$ [kg · m²].

II. $k = 3$

celková hmotnost .. $m = \int_C \rho(x, y, z) ds$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy . $m_{xy} = \int_C z \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz . $m_{xz} = \int_C y \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz . $m_{yz} = \int_C x \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$ $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy . $J_{xy} = \int_C z^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k rovině xz . $J_{xz} = \int_C y^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k rovině yz . $J_{yz} = \int_C x^2 \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose x $J_x = \int_C (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose y $J_y = \int_C (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose z $J_z = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²],

vzhledem k počátku .. $J_0 = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) ds$ [kg · m²].

Navrhněte sami formuli, jíž by bylo možné definovat a vypočítat moment setrvačnosti vzhledem k obecné přímce nebo rovině v \mathbb{E}_3 .

**III.4. Křivkový integrál vektorové funkce.
(Křivkový integrál 2. druhu.)**

Pojem vektorové funkce je vysvětlen v odstavci I.2.12. V této kapitole se omezíme na vektorové funkce v \mathbb{E}_2 a vektorové funkce v \mathbb{E}_3 . Vektorové funkce v \mathbb{E}_3 budeme většinou zapisovat:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)) = U(x, y, z)\mathbf{i} + V(x, y, z)\mathbf{j} + W(x, y, z)\mathbf{k}$$

nebo jenom
$$\mathbf{f} = (U, V, W) = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}.$$

(U , V a W jsou souřadnicové funkce vektorové funkce f .) Připomínáme, že místo “vektorová funkce” často používáme název “vektorové pole”.

Vektorové funkce v \mathbb{E}_2 budeme zapisovat podobně, pouze budeme vždy mít o jednu proměnnou a o jednu komponentu méně.

O vektorové funkci \mathbf{f} v \mathbb{E}_k ($k = 2$ nebo $k = 3$) říkáme, že je spojitá v množině $M \subset \mathbb{E}_k$, jestliže všechny její souřadnicové funkce jsou spojité v množině M .

III.4.1. Fyzikální motivace. Představme si, že těleso se pohybuje po křivce C vlivem síly \mathbf{f} . Chceme vypočítat práci A , kterou síla \mathbf{f} vykoná působením po celé trajektorii C pohybu tělesa. Použijme opět představu o možnosti rozdělení křivky C na nekonečně mnoho “nekonečně malých” úseků, podobně jako v odstavci III.2.1. Typický úsek má polohu $[x, y, z]$, jeho délka je ds a jednotkovým tečným vektorem ke křivce C v bodě $[x, y, z]$ je $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$. Uvažovaný úsek lze považovat za “nekonečně krátkou” úsečku a práce dA , kterou síla \mathbf{f} na něm vykoná, je $dA = \mathbf{f}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}(x, y, z) ds$. Celková práce síly \mathbf{f} podél celé křivky C pak je:

$$A = \int_C \mathbf{f}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}(x, y, z) ds.$$

Součin $\mathbf{f}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ je skalár. Integrál na pravé straně je tudíž křivkovým integrálem skalární funkce, který je již známý z kapitoly III.2.

III.4.2. Křivkový integrál vektorové funkce. Nechť C je jednoduchá p.č. hladká křivka v \mathbb{E}_k (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) a \mathbf{f} je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Říkáme, že vektorová funkce \mathbf{f} je *integrovatelná* na křivce C , je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C (ve smyslu vysvětleném v odstavcích III.2.2 a III.2.4). Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ nazýváme *křivkovým integrálem* vektorové funkce \mathbf{f} na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot ds$.

Místo “křivkový integrál vektorové funkce” se často používá název *křivkový integrál 2. druhu*.

Vidíte, že křivkový integrál vektorové funkce \mathbf{f} na křivce C vlastně není ničím novým. Je jenom křivkovým integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$, tj. průmětu vektorové funkce \mathbf{f} do směru tečného ke křivce C . Pamatujte si formuli, kterou je křivkový integrál vektorové funkce definován:

$$(III.4.1) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_C (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) ds.$$

III.4.3. Fyzikální význam křivkového integrálu vektorové funkce. Z odstavce III.4.1 je patrné, že je-li \mathbf{f} síla, pak křivkový integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ definuje práci, kterou vykoná síla \mathbf{f} působením po dráze C .

III.4.4. Poznámka. Jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}$ nemusí existovat v těch bodech jednoduché p.č. hladké křivky C , ve kterých se stýkají jednotlivé hladké křivky, ze kterých je p.č. hladká křivka C složena. Takových bodů je však konečně mnoho a křivkový integrál na chování integrované funkce v konečně mnoha bodech nezávisí.

III.4.5. Poznámka – různé zápisy křivkového integrálu vektorové funkce. Křivkový integrál vektorové funkce můžeme značit a zapisovat různými způsoby. Je velmi důležité těmito způsoby rozumět a vždy dobře rozpoznat, co se kterým zápisem přesně míní. Jeden způsob zápisu již známe – je jím integrál na levé straně formule (III.4.1). V tomto odstavci se seznámíme s jinou možností zápisu křivkového integrálu vektorové funkce.

Porovnáním obou integrálů ve formuli (III.4.1) získáme formální rovnost $\boldsymbol{\tau} ds = d\mathbf{s}$. Člen na pravé straně můžeme chápat jako “nekonečně krátký” tečný vektor ke křivce C , jehož složky jsou dx , dy a dz . Můžeme tudíž psát:

$$\boldsymbol{\tau} ds = d\mathbf{s} = (dx, dy, dz) = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz.$$

Je-li $\mathbf{f} = (U, V, W)$, můžeme skalární součin $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ vyjádřit:

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = (U, V, W) \cdot (dx, dy, dz) = U dx + V dy + W dz$$

a křivkový integrál vektorové funkce \mathbf{f} lze zapsat:

$$(III.4.2) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C (U dx + V dy + W dz).$$

Křivkový integrál “rovinné” vektorové funkce na křivce C v \mathbb{E}_2 lze zapsat podobně. (Na pravé straně je pouze třeba vynechat $W dz$.)

III.4.6. Příklad. V souladu s označením a zápisem integrálu (viz odstavec III.4.5) je integrál $\int_C (2x^2 + 3y) dz$ křivkovým integrálem vektorové funkce $(0, 0, 2x^2 + 3y)$:

$$\int_C (2x^2 + 3y) dz = \int_C 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + (2x^2 + 3y) dz = \int_C (0, 0, 2x^2 + 3y) \cdot d\mathbf{s}.$$

III.4.7. Poznámka. Křivkový integrál vektorové funkce \mathbf{f} je definován pomocí křivkového integrálu skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ a proto základní vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce a křivkového integrálu skalární funkce jsou stejné. Body a), b) a c) odstavce III.2.6 můžeme prostě přepsat se skalární funkcí $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ a získáme platná tvrzení o křivkovém integrálu vektorové funkce.

Nicméně, mezi křivkovým integrálem skalární funkce a křivkovým integrálem vektorové funkce je jeden velký rozdíl: Křivkový integrál vektorové funkce závisí na orientaci křivky. Přesněji řečeno:

III.4.8. Věta. Je-li vektorová funkce \mathbf{f} integrovatelná na křivce C , pak je integrovatelná i na křivce $-C$ a

$$\int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Tato věta vyplývá bezprostředně z definice křivkového integrálu vektorové funkce.

Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ je roven integrálu $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový tečný vektor. Tento vektor ukazuje směr orientace křivky C . Změníme-li orientaci křivky, jednotkový tečný vektor změní své znaménko a toto vede ke změně znaménka celého integrálu.

III.4.9. Výpočet křivkového integrálu vektorové funkce. Křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{f} = (u, v, w)$ na jednoduché hladké křivce C můžeme vypočítat pomocí parametrizace. Předpokládejme, že P je parametrizace křivky C definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme dále, že křivka C je orientována souhlasně s parametrizací P . Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ křivky C , odpovídajícím $t \in (a, b)$ (tedy až na krajní body křivky C) lze vyjádřit: $\boldsymbol{\tau} = \dot{P}(t)/\|\dot{P}(t)\|$. Použijeme-li nyní formule (III.4.1) a (III.2.1) (případně (III.2.5)), obdržíme:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|} \|\dot{P}(t)\| dt,$$

$$(III.4.3) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt.$$

$\mathbf{f}(P(t))$ získáme opět tak, že do funkce \mathbf{f} (respektive do všech jejích souřadnicových funkcí U, V a W) dosadíme za x, y a z vyjádření (III.2.4): $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \vartheta(t)$. Výpočtem skalárního součinu vektorových funkcí $\mathbf{f} = (U, V, W)$ a $\dot{P}(t) = (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t))$ v integrálu na pravé straně (III.4.3) získáváme další vzorec:

$$(III.4.4) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [U \dot{\phi}(t) + V \dot{\psi}(t) + W \dot{\vartheta}(t)] dt,$$

kde $U = U(\phi(t), \psi(t), \vartheta(t)), V = V(\phi(t), \psi(t), \vartheta(t))$ a $W = W(\phi(t), \psi(t), \vartheta(t))$. Formuli (III.4.4) můžeme formálně odvodit i z tvaru integrálu (III.4.2) použitím substitucí $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \vartheta(t)$ a odtud plynoucích náhrad výrazů dx, dy a dz : $dx = \dot{\phi}(t) dt, dy = \dot{\psi}(t) dt, dz = \dot{\vartheta}(t) dt$.

Užití vzorců (III.4.3) a (III.4.4) na konkrétních příkladech uvidíte v odstavcích III.4.10 a III.4.12.

Je-li křivka C orientována opačně vůči parametrizaci P , pak formule (III.4.3) i (III.4.4) platí se znaménkem “–” před integrálem na pravé straně.

Vzorec (III.4.3) je platný i pro křivkový integrál vektorové funkce v \mathbb{E}_2 . Vzorec (III.4.4) lze snadno modifikovat (vynecháním členu $W \dot{\vartheta}(t)$) tak, že je také platný i pro křivkový integrál vektorové funkce v \mathbb{E}_2 .

Je-li C jednoduchá p.č. hladká křivka, která je sjednocením jednoduchých hladkých křivek C_1, \dots, C_n , pak křivkový integrál vektorové funkce na C můžeme vypočítat tak, že nejprve vypočítáme integrály na jednoduchých hladkých křivkách C_1, \dots, C_n (například pomocí parametrizací těchto hladkých křivek), a poté výsledky sečteme.

Nakonec poznamenejme, že křivkový integrál vektorové funkce můžeme někdy vypočítat i pomocí Greenovy věty, Stokesovy věty (pokud křivka je uzavřená) nebo v případě, že \mathbf{f} je tzv. potenciálním polem, i pomocí formule (V.1.3). Podrobnosti najdete v odstavcích III.5.4, IV.5.10 a V.1.5.

III.4.10. Příklad. Určeme práci, vykonanou silou $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ působením po křivce $C : P(t) = [t, t^2, t^3]; t \in \langle 0, 1 \rangle$ od bodu $[0, 0, 0]$ do bodu $[1, 1, 1]$.

Ř e š e n í : Křivka C je definovaná pomocí své parametrizace P . Jelikož p.b. $C =$

$[0, 0, 0] = P(0)$ a *k.b.* $C = [1, 1, 1] = P(1)$, C je orientována souhlasně s parametrizací P . Snadno zjistíme, že $\dot{P}(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Užitím formule (III.4.3) dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_C (y - x^2, z - y^2, x - z^2) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t^3 - t^4, t - t^6) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 [2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8] dt = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{29}{60}. \end{aligned}$$

III.4.11. Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce. Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 nebo v \mathbb{E}_3 a nechť \mathbf{f} je vektorové pole (= vektorová funkce), definované na C . Křivkový integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ nazýváme *cirkulací* vektorového pole \mathbf{f} po křivce C . Abychom zdůraznili skutečnost, že C je uzavřená křivka, používáme místo $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ často označení

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

III.4.12. Příklad. Vypočítejme cirkulaci vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

po kružnici $C : x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), orientované po směru hodinových ručiček.

Ř e š e n í : Kružnici C můžeme parametrizovat rovnicemi

$$(III.4.5) \quad x = \phi(t) = r \cos t, \quad y = \psi(t) = r \sin t; \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Probíhá-li t interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ od 0 do 2π , obíhá bod $[x, y] = [\phi(t), \psi(t)]$ po kružnici proti směru hodinových ručiček, tj. proti dané orientaci C . Parametrizace (III.4.5) a zadaná orientace křivky C jsou tudíž nesouhlasné. Užitím vzorce (III.4.4) (se znaménkem “-” na pravé straně) dostáváme:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\left(-\frac{r \sin t}{r^2} \right) (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} r \cos t \right) dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

III.5. Greenova věta.

V této kapitole ukážeme, že za jistých podmínek můžeme cirkulaci rovinného vektorového pole po uzavřené křivce C v \mathbb{E}_2 počítat i jiným způsobem, než pomocí parametrizace křivky C . Nejprve se však věnujme trochu podrobněji uzavřeným křivkám v \mathbb{E}_2 . Připomínáme úmluvu, podle které “křivkou” míníme jednoduchou p.č. hladkou křivku a “uzavřenou křivkou” uzavřenou jednoduchou p.č. hladkou křivku.

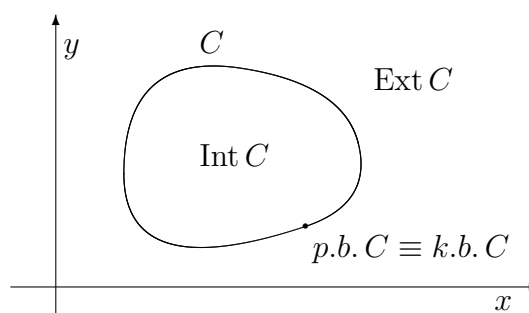
Následující věta říká něco, co je na první pohled zcela názorné. Důkaz věty neuvádíme. Kdybyste se však o důkaz zajímali, byli byste překvapeni, jak je složitý.

III.5.1. Jordanova věta. Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 . Pak v \mathbb{E}_2 existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2 takové, že C je jejich společnou hranicí a

$$a) \quad \mathbb{E}_2 = G_1 \cup C \cup G_2$$

b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá je neomezená.

III.5.2. Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v \mathbb{E}_2 . Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 a G_1, G_2 jsou oblasti, jejichž existence je dána Jordanovou větou. Tu z oblastí G_1, G_2 , která je omezená, nazýváme *vnitřek* křivky C a značíme $\text{Int } C$. Druhou z oblastí G_1, G_2 , která je neomezená, nazýváme *vnějšek* křivky C a značíme ji $\text{Ext } C$.



Obr. 19

III.5.3. Kladná a záporná orientace uzavřené křivky v \mathbb{E}_2 . Nechť C je uzavřená křivka v \mathbb{E}_2 . Říkáme, že křivka C je orientována *kladně*, jestliže při oběhu po C ve směru její orientace máme vnitřek křivky C po levé ruce. (Viz obr. 19.) V opačném případě říkáme, že křivka C je orientována *záporně*.

Uvedená definice je jednoduchá a názorná. Z logického hlediska však není korektní. Je to zřejmé. Matematické pojmy musí být definovány precizně a jejich význam nesmí záviset na znalosti toho, kde máme levou a kde pravou ruku. Jinými slovy: Jak byste definici vysvětlili inteligentní bytosti (třeba z vesmíru), která nemá ruce a pojmy levá a pravá ruka jsou jí cizí? Vzhledem k tomu, že logicky korektní definice je poněkud komplikovaná, v tomto textu ji neukazujeme a pro naše účely se spokojíme s uvedenou definicí III.5.3.

Orientaci uzavřené křivky v \mathbb{E}_2 je možné definovat ještě jedním jednoduchým způsobem, opět však nikoliv logicky zcela korektním: Uzavřenou křivku C v \mathbb{E}_2 nazveme kladně orientovanou, je-li orientována proti směru hodinových ručiček, a záporně orientovanou, je-li orientována po směru hodinových ručiček.

Následující věta převádí křivkový integrál vektorové funkce po uzavřené rovinné křivce na dvojný integrál přes vnitřek křivky. Větu publikoval jako první G. Green (1793–1841) v krátké knize, nazvané *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism*.

III.5.4. Greenova věta. Předpokládejme, že

- $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$ a souřadnicové funkce U, V mají v O spojitě parciální derivace,
- C je kladně orientovaná uzavřená křivka v O taková, že $\text{Int } C \subset O$.

Pak platí:

$$(III.5.1) \quad \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

III.5.5. Poznámka. Pomocí formální rovnosti $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U dx + V dy$ můžeme formuli (III.5.1) též zapsat ve tvaru

$$(III.5.2) \quad \oint_C (U dx + V dy) = \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy.$$

Jsou-li předpoklady Greenovy věty splněny až na to, že křivka C je záporně orientovaná, platí vzorce (III.5.1) a (III.5.2) se znaménkem “-” před integrály na pravých stranách.

III.5.6. Příklad. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\mathbf{f} = (-x^2y, xy^2)$ po kladně orientované kružnici $x^2 + y^2 = a^2$, kde $a > 0$.

Řešení: Označme U a V souřadnicové funkce vektorové funkce \mathbf{f} . Pak $U(x, y) = -x^2y$ a $V(x, y) = xy^2$. Sami se můžete přesvědčit o tom, že předpoklady Greenovy věty jsou splněny. Podle vzorce (III.5.1) tudíž platí:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C (-x^2y dx + xy^2 dy) = \iint_{x^2+y^2 < a^2} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= {}^1) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^3 dr \right) d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

¹⁾ Dvojný integrál transformujeme do polárních souřadnic.

III.5.7. Výpočet obsahu Int C pomocí křivkového integrálu. Splňují-li křivka C a souřadnicové funkce U a V předpoklady Greenovy věty a platí-li navíc v Int C

$$(III.5.3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 1,$$

pak ze vzorce (III.5.2) vyplývá, že $\oint_C (U dx + V dy) = \mu_2(\text{Int } C)$.

Zvolíme-li například $U = -\frac{1}{2}y$ a $V = \frac{1}{2}x$, je podmínka (III.5.3) splněna a tak získáváme vzorec

$$(III.5.4) \quad \mu_2(\text{Int } C) = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy).$$

III.6. Cvičení.

- Rozhodněte o existenci integrálu $\int_C ds/(x^2 + y^2)$, kde C je kružnice se středem S a poloměrem 1. (*Viz odstavce III.2.2 a III.2.6.*)
 - $S = [0, 0]$,
 - $S = [1, 0]$,
 - $S = [0, -2]$.
- Vypočítejte délku křivky C , která je definovaná pomocí své parametrizace.
 - $P(t) = [3t, 3t^2, 2t^3]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$,
 - $P(t) = [a \cos t, a \sin t, bt]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0$, $b > 0$).
- Vypočítejte dané křivkové integrály. Které z nich jsou křivkovými integrály skalárních funkcí a které jsou křivkovými integrály vektorových funkcí?
 - $\int_C \frac{ds}{x-y}$; C je část přímky $y = \frac{1}{2}x - 2$ mezi body $[0, -2]$ a $[4, 0]$,
 - $\int_C y ds$; C je úsek paraboly $y^2 = 2px$ mezi body $[0, 0]$ a $[2p, 2p]$ ($p > 0$),

- c) $\int_C xy \, ds$; C je část elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ve druhém kvadrantu,
- d) $\int_C \sqrt{2y} \, ds$; C je část cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,
odpovídající $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,
- e) $\int_C (x - y) \, ds$; C je kružnice $x^2 + y^2 = 2x$,
- f) $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$; C : $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0$),
- g) $\int_C xyz \, ds$; C je průnik ploch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a $x^2 + y^2 = R^2/4$
v prvním oktantu a $R > 0$,
- h) $\int_C (x + y) \, ds$; C je čtvrtina kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$
v prvním oktantu,
- i) $\int_C (x + y) \, dx$; C je úsečka od bodu $[a, 0]$ k bodu $[0, b]$,
- j) $\int_C (x^2 - y^2) \, dx$; C je úsek paraboly $y = x^2$ od bodu $[0, 0]$ k bodu $[2, 4]$,
- k) $\int_C [-x \cos y \, dx + y \sin x \, dy]$; C je úsečka, *p.b.* $C = [0, 0]$, *k.b.* $C = [\pi, 2\pi]$,
- l) $\int_C (y, -x) \cdot d\mathbf{s}$; C je kladně orientovaná elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
- m) $\int_C \frac{y^2 \, dx - x^2 \, dy}{x^2 + y^2}$; C je úsek kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) v prvním a ve
druhém kvadrantu, od bodu $[a, 0]$ k bodu $[-a, 0]$,
- n) $\int_C (2a - y, -a + y) \cdot d\mathbf{s}$; C : $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 C je orientovaná od bodu $[2\pi a, 0]$ k bodu $[0, 0]$,
- o) $\int_C [y^2 \, dx + z^2 \, dy + x^2 \, dz]$; C je průnik kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
s válcovou plochou $x^2 + y^2 = Rx$, ($R > 0$), $z \geq 0$,
 C je orientovaná kladně při pohledu z počátku,
- p) $\int_C [2xy \mathbf{i} - x^2 \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{s}$; C je sjednocení úseček od bodu $[0, 0]$ k bodu $[2, 0]$
a od bodu $[2, 0]$ k bodu $[2, 1]$,
- q) $\int_C [yz \mathbf{i} + z\sqrt{R^2 - y^2} \mathbf{j} + xy \mathbf{k}] \cdot d\mathbf{s}$; C : $x = R \cos t$, $y = R \sin t$,
 $z = at/(2\pi)$, ($a > 0$), C je orientovaná od průniku
s rovinou $z = 0$ k průniku s rovinou $z = a$,
- r) $\int_C (1 - x^2)y \, dx + x(1 + y^2) \, dy$; C je hranice čtverce $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$,
orientovaná kladně,
- s) $\int_C (xy + x + y) \, dx + (xy + x - y) \, dy$; C je elipsa $9x^2 + 36x + 4y^2 = 0$,
orientovaná záporně,
- t) $\int_C (x + y) \, dx - 2x \, dy$; C je hranice trojúhelníku se stranami na přímkách
 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 5$, orientovaná záporně,

- u) $\int_C (dx/y - dy/x)$; C je hranice trojúhelníku s vrcholy $[1, 1]$, $[2, 1]$ a $[2, 2]$, orientovaná kladně,
- v) $\int_C [2(x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j}] d\mathbf{s}$; C je hranice trojúhelníku s vrcholy $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[1, 3]$, orientovaná kladně.

4. Vypočítejte práci síly \mathbf{f} , působící po křivce C . (*Viz odstavec III.4.3.*)
- a) $\mathbf{f} = (x - y, x)$, C je hranice čtverce s vrcholy $[-2, -2]$, $[1, -2]$, $[1, 1]$, $[-2, 1]$, orientovaná ve směru hodinových ručiček,
- b) $\mathbf{f} = (x + y, 2x)$, C je kružnice $x^2 + y^2 = 4$, orientovaná kladně,
- c) $\mathbf{f} = (y, 2)$, C je uzavřená křivka, skládající se z poloos a čtvrtiny elipsy $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ v prvním kvadrantu, orientovaná kladně.
5. C_1 je úsečka od bodu $[0, 0]$ k bodu $[1, 1]$, C_2 je úsek paraboly $y = x^2$ od bodu $[0, 0]$ k bodu $[1, 1]$, $I_1 = \int_{C_1} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, $I_2 = \int_{C_2} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$. Užitím Greenovy věty vypočítejte rozdíl $I_1 - I_2$.
6. Užitím křivkového integrálu vypočítejte obsah vnitřku uzavřené křivky, která se skládá z oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a z úsečky spojující body $[0, 0]$ a $[2\pi a, 0]$. (*Viz odstavec III.5.7.*)
7. Užitím křivkového integrálu odvoďte vzorec pro obsah vnitřku elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. (*Viz odstavec III.5.7.*)
8. Užitím křivkového integrálu vypočítejte obsah vnitřku uzavřené křivky, jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $r = a(1 - \cos \varphi)$ kde $a > 0$ (tzv. "kardioida"). (*Viz odstavec III.5.7.*)
9. Užitím křivkového integrálu vypočítejte obsah vnitřku tzv. asteroidy, jejíž rovnice je $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$). (Můžete použít parametrické rovnice $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.) (*Viz odstavec III.5.7.*)
10. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole \mathbf{f} po uzavřené křivce C . Pokud je to možné, použijte Greenovu větu. (*Viz odstavce III.4.11 a III.5.4.*)
- a) $\mathbf{f}(x, y) = (e^x \sin y - y^2, e^x \cos y - 1)$, $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 + 2x = 0, y \leq 0\}$, $C_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, C je orientována kladně,
- b) $\mathbf{f}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$, $C = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$, C je orientovaná záporně,
- c) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, y^2)$, C je hranice trojúhelníku s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [2, 1]$, $D = [2, 3]$, orientovaná kladně.

IV. Plošné integrály

IV.1. Jednoduché plochy.

V \mathbb{E}_3 existuje velké množství útvarů, které lze nazývat plochami. Není snadné z nich vybrat plochy, které lze přiměřeně srozumitelně popsat, které vyhovují potřebám technických aplikací a na kterých je možné vybudovat přiměřeně srozumitelnou teorii plošných integrálů. V tomto textu se omezíme na dva typy ploch: tzv. “jednoduchou hladkou plochu” a “jednoduchou po částech hladkou plochu”.

IV.1.1. Jednoduchá hladká plocha – motivace a označení. V pozadí definice jednoduché plochy je tato představa: B je podmnožina \mathbb{E}_2 , omezená uzavřenou křivkou Γ . B vystříhnete z roviny \mathbb{E}_2 a přemístíte někam do \mathbb{E}_3 . Jsou povolené elastické deformace, nesmějí však narušovat hladkost. To znamená, že vystřižený útvar můžete napínat, stlačovat a ohýbat v různých směrech, nesmíte jej však roztrhnout ani spojit dva různé body dohromady. Výsledkem je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 .

Tuto představu je možné matematicky modelovat. Popsaný postup přemístí každý bod $[u, v] \in B$ na místo o poloze $P(u, v) = [\phi(u, v), \psi(u, v), \vartheta(u, v)]$ v \mathbb{E}_3 . P je tudíž zobrazením B do \mathbb{E}_3 . Požadavek, aby deformace B byla elastická a neporušovala hladkost, vede k podmínce, že P je spojitě zobrazení a má spojitě parciální derivace v dostatečně velké podmnožině B . Požadavek, že dva různé body, nacházející se původně v B , nemohou být slepeny dohromady, vede k podmínce, že zobrazení P je prosté v B . Výsledná jednoduchá hladká plocha je obor hodnot zobrazení P , kterému budeme říkat “parametrizace” jednoduché hladké plochy. Funkce

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v)$$

nazýváme *souřadnicové funkce* zobrazení P . Parciální derivace P podle proměnných u, v budeme označovat P_u, P_v a budeme je považovat za vektory. Můžeme tudíž psát:

$$P_u(u, v) = \left(\frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \vartheta(u, v)}{\partial u} \right) \quad \text{nebo krátce} \quad P_u = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right),$$

$$P_v(u, v) = \left(\frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial \vartheta(u, v)}{\partial v} \right) \quad \text{nebo krátce} \quad P_v = \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right).$$

Zobrazení P považujeme za spojitě, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojitě. Podobně, o zobrazení P říkáme, že má spojitě parciální derivace, mají-li všechny souřadnicové funkce spojitě parciální derivace.

Nehrozí-li záměna se značením souřadných os, můžeme místo $\phi(u, v), \psi(u, v), \vartheta(u, v)$ souřadnicové funkce zobrazení P značit i $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$.

Vektorový součin vektorů P_u a P_v označujeme $P_u \times P_v$. Připomínáme, že

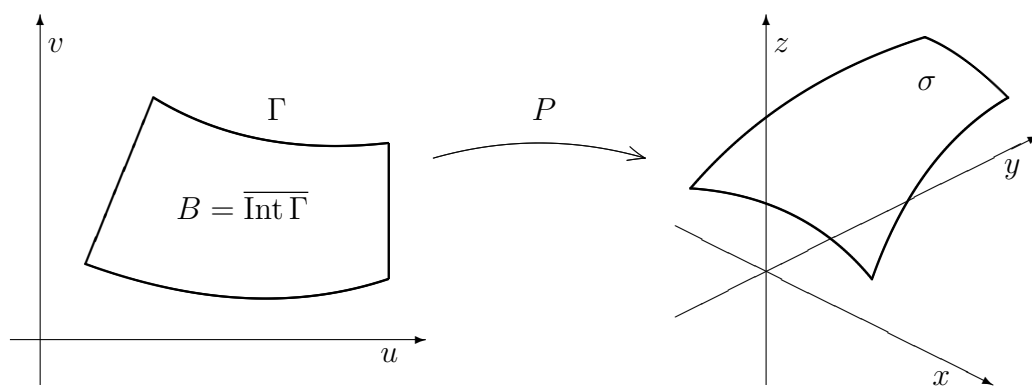
$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial v}, & \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right).$$

IV.1.2. Jednoduchá hladká plocha – definice. Nechť Γ je uzavřená jednoduchá p.č. hladká křivka v \mathbb{E}_2 a $B = \Gamma \cup \text{Int } \Gamma$. Nechť P je spojité zobrazení B do \mathbb{E}_3 . Předpokládejme, že

- P je prosté zobrazení na B ,
- P má spojité a omezené parciální derivace P_u a P_v v $B - K$, kde K je nejvýše konečná množina bodů, nacházejících se na hranici Γ množiny B ,
- $P_u \times P_v \neq \mathbf{0}$ v $B - K$.

Množinu všech bodů $P(u, v)$ pro $[u, v] \in B$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_k . Zobrazení P nazýváme parametrizace.

Jednoduché hladké plochy budeme většinou značit řeckými písmeny, například σ , σ_1 , σ_2 , κ , apod.



Obr. 20

Podobně jako jednoduchá hladká křivka, i každá jednoduchá hladká plocha má nekonečně mnoho parametrizací. (Jednu konkrétní plochu v \mathbb{E}_3 je zřejmě možné získat při respektování daných pravidel nekonečně mnoha způsoby, tj. vystřížením části \mathbb{E}_2 , přemístěním, elastickou deformací atd.)

Jednoduchou p.č. hladkou křivku v \mathbb{E}_3 , která je obrazem hranice Γ množiny B při zobrazení P , nazýváme okraj jednoduché hladké plochy.

Definice jednoduché hladké plochy není příliš složitá. Za to však platíme tím, že některé “pěkné” hladké plochy tato definice “nepokryje”, tj. tyto plochy nejsou jednoduchými hladkými plochami. Například kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nebo válcová plocha $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq h$ nejsou jednoduché hladké plochy. Pokusy modifikovat uvedenou definici tak, aby například zahrnovala i kulovou plochu, vedou na jiných místech k takovému nárůstu komplikací, že se nevyplatí. To je důsledek toho, že třírozměrný Euklidův prostor \mathbb{E}_3 umožňuje velkou rozmanitost množin a útvarů a jakmile někde definici “uvolníme” tak, aby zahrnula i kulovou plochu, mezi jednoduché hladké plochy okamžitě proniknou i různé podivné a komplikované objekty, které na jiných místech do teorie vnesou zmatek nebo ji nesmírně ztíží. Nicméně, brzy uvidíte, že kulovou i omezenou válcovou plochu bude možné považovat za jednoduché p.č. hladké plochy a tyto plochy budou tudíž patřit do okruhu ploch, jimiž se budeme zabývat a na kterých budeme integrovat.

IV.1.3. Orientace jednoduché hladké plochy. Normálový vektor. Předpokládejme, že P je parametrizace jednoduché hladké plochy σ , definovaná v množině $B \subset \mathbb{E}_2$.

Označme $X = P(u, v)$ pro $[u, v] \in B - K$ (viz definici IV.1.2). Vektory $P_u(u, v)$ a $P_v(u, v)$ jsou v bodě X tečné k ploše σ a díky podmínce c) z definice IV.1.2 jsou lineárně nezávislé. Jejich vektorový součin je kolmý k oběma z nich, tudíž je také kolmý k ploše σ . Dělíme-li vektorový součin jeho velikostí, získáme jednotkový vektor, který je v bodě X kolmý k ploše σ .

Plochu σ můžeme *orientovat* tak, že na ploše definujeme *normálový vektor* \mathbf{n} (tj. jednotkový vektor, kolmý k ploše σ , který udává orientaci plochy σ) buď rovnicí

$$(IV.1.1) \quad \mathbf{n} = \frac{P_u(u, v) \times P_v(u, v)}{\|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\|} \quad \text{pro všechna } [u, v] \in B - K,$$

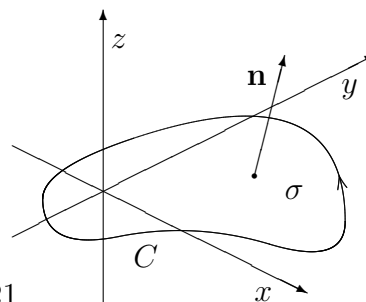
nebo rovnicí

$$(IV.1.2) \quad \mathbf{n} = -\frac{P_u(u, v) \times P_v(u, v)}{\|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\|} \quad \text{pro všechna } [u, v] \in B - K.$$

Je-li normálový vektor \mathbf{n} dán rovnicí (IV.1.1), říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientována *souhlasně s parametrizací* P . V opačném případě, kdy vektor \mathbf{n} je definován rovnicí (IV.1.2), říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientována *nesouhlasně s parametrizací* P .

Uvedený způsob orientace plochy σ zaručuje, že normálový vektor \mathbf{n} se při pohybu po σ mění spojitě. Nemůže se tedy stát, že \mathbf{n} míří v různých bodech na různé strany plochy σ .

IV.1.4. Vztah mezi orientací jednoduché hladké plochy a jejího okraje. Říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je *orientována souhlasně se svým okrajem* C , pokud při oběhu po křivce C ve směru její orientace máme tu stranu plochy σ , na kterou míří normálový vektor \mathbf{n} , po levé ruce.



Obr. 21

Je patrné, že tato definice není logicky korektní. Důvody jsou stejné, jako u definice III.5.3. Nicméně, definice je názorná a na naší úrovni nemůže vést k nedorozumění.

IV.1.5. Příklad. σ je část kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, odpovídající $x \geq 0$ a $x^2 + y^2 \leq 4$. Je orientovaná směrem “vzhůru”, tj. třetí souřadnice normálového vektoru je kladná. Ukažme, že σ je jednoduchá hladká plocha, najděme její parametrizaci, rozhodněme zda σ je orientovaná souhlasně se zvolenou parametrizací a definujme orientaci okraje σ tak, aby orientace okraje i plochy σ byla souhlasná.

Ř e š e n í : K parametrizaci σ použijeme rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: Položíme

$$P : \quad x = \phi(u, v) = u, \quad y = \psi(u, v) = v, \quad z = \vartheta(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

pro $[u, v] \in B$, přičemž množinu B definujeme podmínkami $u \geq 0$ a $u^2 + v^2 \leq 4$:

$$B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u \geq 0, u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Lze ověřit, že zobrazení P má všechny vlastnosti, požadované v definici IV.1.2. (Přitom $K = \{[0, 0]\}$.) σ proto je jednoduchou hladkou plochou a P je její parametrizací. Parciální derivace P_u a P_v mají tvar:

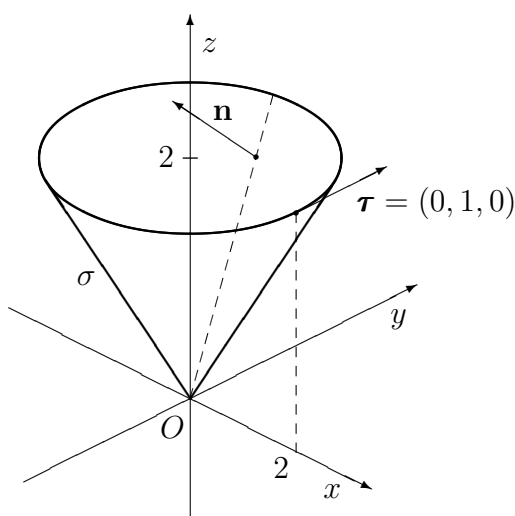
$$P_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \quad P_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

a jejich vektorový součin je

$$P_u \times P_v = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right).$$

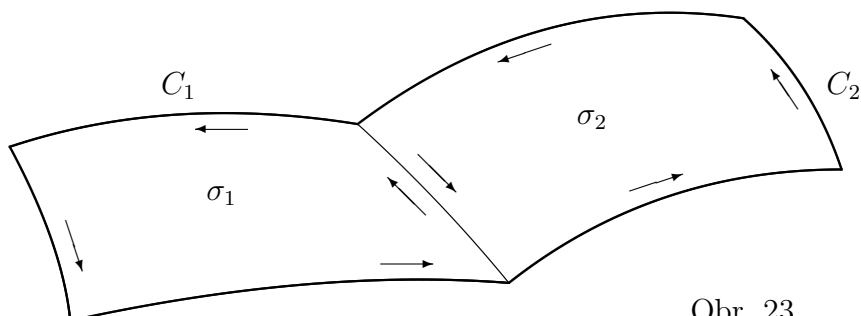
Snadno se můžete přesvědčit o tom, že vektor $P_u \times P_v$ má délku $\sqrt{2}$. Vektor $(P_u \times P_v)/\sqrt{2}$ je tudíž jednotkový a kolmý k σ . Jeho třetí souřadnice je kladná, proto je tento vektor totožný s normálovým vektorem \mathbf{n} . Jednoduchá hladká plocha σ je tudíž orientovaná souhlasně s parametrizací P .

Orientace okraje plochy σ , kterým je uzavřená křivka C , souhlasná s orientací plochy σ , je naznačena na obr. 22. Například, jednotkovým tečným vektorem k C v bodě $X = [2, 0, 2]$ je $\boldsymbol{\tau} = (0, 1, 0)$.



Obr. 22

IV.1.6. Jednoduchá po částech hladká plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch. Předpokládejme, že σ_1 a σ_2 jsou dvě jednoduché hladké plochy, které jsou buď obě orientované souhlasně se svými okraji C_1 a C_2 nebo jsou obě orientovány nesouhlasně se svými okraji. Předpokládejme, že



Obr. 23

- a) $\sigma_1 \cap \sigma_2 = C_1 \cap C_2$ a tento průnik vytváří jednu nebo více jednoduchých hladkých křivek,

- b) orientace křivek C_1 a C_2 je ve všech jejich společných bodech (tj. na $C_1 \cap C_2$) opačná.

Sjednocení $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ pak nazýváme jednoduchou po částech hladkou plochou v \mathbb{E}_3 , složenou se ze dvou jednoduchých hladkých ploch σ_1 a σ_2 .

Orientace plochy σ je definována orientací jejích částí σ_1 a σ_2 .

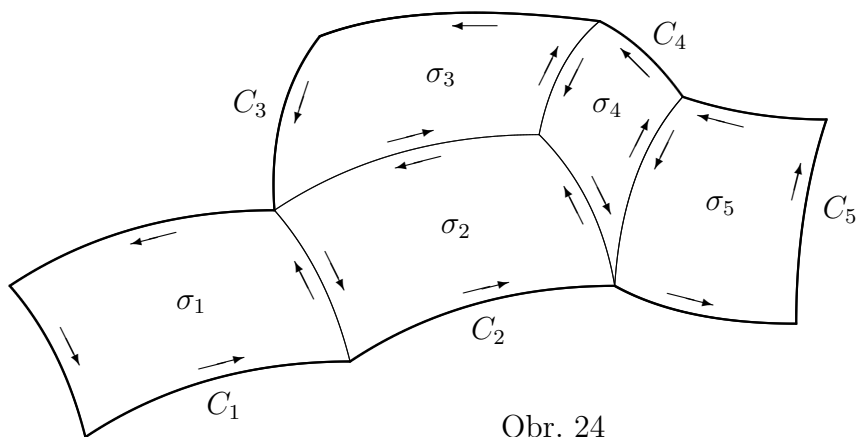
Okrajem plochy σ je uzávěr množiny $(C_1 \cup C_2) - (C_1 \cap C_2)$. (Viz obr. 23.) Může být buď prázdný, nebo může být uzavřenou jednoduchou p.č. hladkou křivkou nebo může být tvořen více (konečným počtem) uzavřenými jednoduchými p.č. hladkými křivkami.

Pojem “souhlasné (nebo nesouhlasné) orientace plochy a jejího okraje”, definovaný v odstavci IV.1.4 pro jednoduchou hladkou plochu, lze přirozeným způsobem rozšířit i na jednoduché p.č. hladké plochy.

IV.1.7. Jednoduchá po částech hladká plocha, složená z více jednoduchých hladkých ploch. Předpokládejme, že σ_1 a σ_2 jsou jednoduché hladké plochy z předcházejícího odstavce IV.1.6. Pokud postupně k jejich sjednocení připojíme, při respektování stejných pravidel, další jednoduché hladké plochy $\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_n$, získáme jednoduchou hladkou plochu, složenou z n jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. (Viz obr. 24.)

Název jednoduché hladké plochy budeme většinou zkracovat na “jednoduchá p.č. hladká plocha”. Pokud použijeme v dalším textu termín “plocha” bez jakéhokoliv adjektiva, budeme mít vždy na mysli jednoduchou p.č. hladkou plochu.

Plochu, která se liší od σ pouze svojí orientací, budeme označovat $-\sigma$.

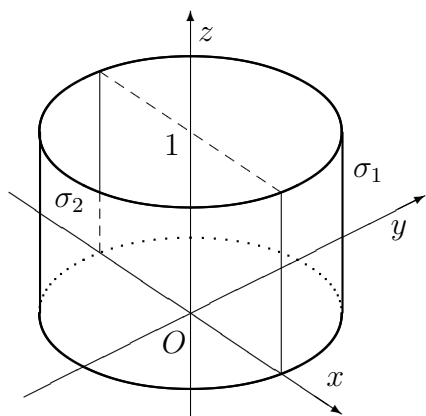


Obr. 24

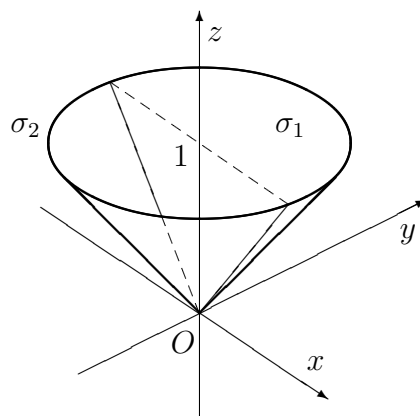
IV.1.8. Uzavřená jednoduchá p.č. hladká plocha. Jednoduchou p.č. hladkou plochu, jejímž okrajem je prázdná množina, nazýváme uzavřenou.

IV.1.9. Příklad. Válcová plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ a $\sigma_2 : x^2 + y^2 = 1; y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$ je jednoduchá p.č. hladká plocha. (Viz obr. 25.)

IV.1.10. Příklad. Kuželová plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1 : x^2 + y^2 = z^2, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ a $\sigma_2 : x^2 + y^2 = z^2; y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$ je jednoduchá p.č. hladká plocha. (Viz obr. 26.)



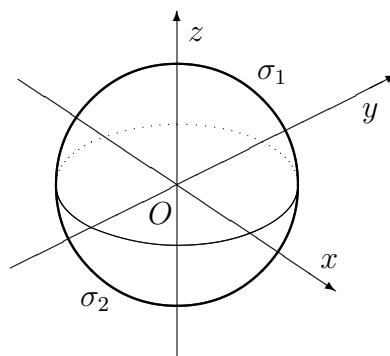
Obr. 25



Obr. 26

IV.1.11. Příklad. Kulová plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ a $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$, je uzavřená jednoduchá p.č. hladká plocha.

Dalšími příklady uzavřených jednoduchých p.č. hladkých ploch jsou povrch krychle, povrch čtyřštěny atd.



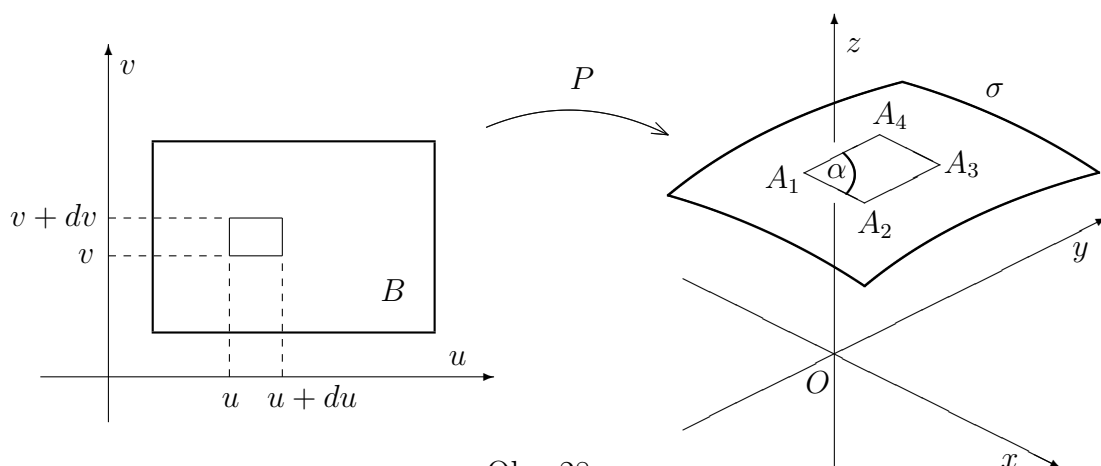
Obr. 27

**IV.2. Plošný integrál skalární funkce.
(Plošný integrál 1. druhu.)**

IV.2.1. Fyzikální motivace. Představme si, že ohnutý kovový plát má tvar jednoduché hladké plochy σ v \mathbb{E}_3 a jeho plošná hustota (tj. hmotnost vztahovaná k jednotce obsahu plochy) je ρ , což je obecně funkce tří proměnných x, y a z . Chceme vypočítat celkovou hmotnost kovového plátu.

Předpokládejme, že P je parametrizace plochy σ , definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Představme si, že B rozdělíme na nekonečně mnoho “nekonečně malých” obdélníků tvaru $\langle u, u + du \rangle \times \langle v, v + dv \rangle$. P zobrazuje každý z těchto obdélníků na “nekonečně malý” rovnoběžník na ploše σ s vrcholy $A_1 = P(u, v)$, $A_2 = P(u + du, v) \doteq P(u, v) + P_u(u, v) \cdot du$, $A_3 = P(u + du, v + dv) \doteq P(u, v) + P_u(u, v) \cdot du + P_v(u, v) \cdot dv$ a $A_4 = P(u, v + dv) \doteq P(u, v) + P_v(u, v) \cdot dv$. (Viz obr. 28.) Jeho obsah je $dp = \|A_2 - A_1\| \cdot \|A_4 - A_1\| \cdot \sin \alpha = \|(A_2 - A_1) \times (A_4 - A_1)\|$. Dosazením za body A_1, A_2, A_4 obdržíme: $dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$. Hmotnost rovnoběžníku $A_1A_2A_3A_4$ tudíž je $dm = \rho(A_1) \cdot dp = \rho(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$. Celkovou hmotnost kovového plátu získáme jako součet příspěvků dm přes celou plochu σ :

$$m = \iint_{\sigma} dm = \iint_B \rho(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv.$$



Obr. 28

IV.2.2. Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše. Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$, pak o funkci f říkáme, že je integrovatelná na ploše σ . Plošný integrál funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_\sigma f dp$ a definujeme jej rovnicí

$$(IV.2.1) \quad \iint_\sigma f dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv.$$

K výpočtu integrálu vpravo se vrátíme v odstavci IV.2.7 a výpočet budeme rovněž ilustrovat na příkladech v odstavcích IV.2.8–IV.2.10.

Výroky “funkce f je integrovatelná na ploše σ ” a “plošný integrál f na σ existuje” mají stejný význam.

V literatuře se v označení plošného integrálu též často objevuje dS nebo $d\sigma$ místo dp . V tomto textu budeme používat dp .

IV.2.3. Poznámka – nezávislost na volbě parametrizace. Integrovatelnost funkce f na jednoduché hladké ploše σ a plošný integrál f na σ jsou definovány pomocí parametrizace P plochy σ . Jednoduchá hladká plocha σ však má nekonečně mnoho různých parametrizací (viz odstavec IV.1.2). Lze však dokázat, že jak existence, tak hodnota plošného integrálu f na σ nezávisí na volbě parametrizace plochy σ .

IV.2.4. Plošný integrál skalární funkce na jednoduché p.č. hladké ploše. Nechť σ je jednoduchá p.č. hladká plocha v \mathbb{E}_3 , která je složena z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ dle pravidel, popsanych v odstavcích IV.1.5 a IV.1.6. Nechť f je funkce, která je omezená na ploše σ . Je-li f integrovatelná funkce na každé z ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, pak říkáme, že je integrovatelná na ploše σ . Plošný integrál funkce f na ploše σ pak definujeme rovnicí

$$(IV.2.2) \quad \iint_\sigma f dp = \sum_{i=1}^n \iint_{\sigma_i} f dp.$$

(Plošné integrály na pravé straně jsou plošnými integrály na jednoduchých hladkých plochách, které jsou již známé z definice IV.2.2.)

Místo “plošný integrál skalární funkce” často používáme název *plošný integrál 1. druhu*.

Chceme-li zdůraznit, na kterých proměnných závisí funkce f , můžeme místo $\iint_{\sigma} f \, dp$ psát $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, dp$.

IV.2.5. Obsah plochy. Je-li σ jednoduchá p.č. hladká plocha, pak číslo, které je hodnotou integrálu $\iint_{\sigma} dp$, nazýváme *obsahem* plochy σ .

V případě, kdy σ je jednoduchá hladká plocha a P je její parametrizace definovaná v množině $B \subset \mathbb{E}_2$, je obsah plochy σ roven

$$(IV.2.3) \quad p(\sigma) = \iint_{\sigma} dp = \iint_B \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

IV.2.6. Některé důležité vlastnosti plošného integrálu skalární funkce. Plošný integrál skalární funkce je definován pomocí dvojného integrálu. Jeho základní vlastnosti lze tudíž odvodit z vlastností dvojného integrálu. Zmiňme se o některých z nich:

- Postačující podmínka pro existenci plošného integrálu skalární funkce.** Je-li f spojitá funkce na ploše σ , pak je na σ integrovatelná (tj. plošný integrál $\iint_{\sigma} f \, dp$ existuje).
- Linearita plošného integrálu.** Jsou-li funkce f a g integrovatelné na ploše σ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak funkce $f + g$ a αf jsou také integrovatelné na σ a

$$\iint_{\sigma} (f + g) \, dp = \iint_{\sigma} f \, dp + \iint_{\sigma} g \, dp,$$

$$\iint_{\sigma} \alpha \cdot f \, dp = \alpha \cdot \iint_{\sigma} f \, dp.$$

- Je-li f integrovatelná funkce na ploše σ a omezená funkce g se liší od f na σ nejvýše v konečně mnoha bodech nebo křivkách, pak g je také integrovatelná funkce na σ a

$$\iint_{\sigma} g \, dp = \iint_{\sigma} f \, dp.$$

- Je-li funkce f integrovatelná na ploše σ , pak je také integrovatelná na $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f \, dp = \iint_{\sigma} f \, dp.$$

Tvrzení a) lze zobecnit: Je-li σ jednoduchá p.č. hladká plocha a funkce f je spojitá na každé z hladkých částí plochy σ , pak f je integrovatelná na σ .

Tvrzení d) ukazuje, že existence ani hodnota plošného integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci plochy.

IV.2.7. Výpočet plošného integrálu skalární funkce. Plošný integrál funkce f na jednoduché hladké ploše σ můžeme vypočítat užitím parametrizace $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ plochy σ a formule (IV.2.1). Do funkce f za proměnné x, y, z dosadíme

$$(IV.2.4) \quad x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v),$$

za dp dosadíme

$$(IV.2.5) \quad dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| \, du \, dv$$

a integrujeme podle u a v na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, na které je parametrizace P definovaná.

Plošný integrál funkce f na jednoduché p.č. hladké ploše, složené z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme integrály na plochách $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ a výsledky pak sečteme. (Viz vzorec (IV.2.2).)

IV.2.8. Příklad. Vypočítejme plošný integrál funkce $f(x, y, z) = x + 2y$ na jednoduché hladké ploše $\sigma : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Ř e š e n í : Plochu σ můžeme parametrizovat zobrazením

$$P(u, v) : \quad x = u, \quad y = v, \quad z = 1 - u - v; \quad [u, v] \in B,$$

kde $B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}$. (Ověřte sami, že zobrazení P je opravdu parametrizací, tj. že má vlastnosti, požadované v odstavci IV.1.2.) Snadno vypočítáme, že $P_u = (1, 0, -1)$, $P_v = (0, 1, -1)$, $P_u \times P_v = (1, 1, 1)$ a $\|P_u \times P_v\| = \sqrt{3}$. Užitím vzorce (IV.2.1) dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x + 2y) \, dp &= \iint_B (u + 2v) \sqrt{3} \, du \, dv = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 2v) \, dv \, du \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (1 - u) \, du = \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

IV.2.9. Příklad. Vypočítejme plošný integrál funkce $g(x, y, z) = xyz$ na ploše σ , která je povrchem krychle $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Ř e š e n í : Povrch uvedené krychle se skládá ze šesti čtverců. Tři z nich leží v rovinách xy , xz a yz , tudíž je na nich $xyz = 0$ a plošný integrál funkce g na nich je nulový. Označme zbývající čtverce σ_1, σ_2 a σ_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ \sigma_2 &: \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ \sigma_3 &: \quad z = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Přirozená parametrizace jednoduché hladké plochy σ_1 je:

$$P(u, v) : \quad x = 1, \quad y = u, \quad z = v; \quad [u, v] \in B = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle.$$

Odtud je patrné, že $P_u = (0, 1, 0)$, $P_v = (0, 0, 1)$, $P_u \times P_v = (1, 0, 0)$ a $\|P_u \times P_v\| = 1$. Užitím formule (IV.2.1) dostáváme:

$$\iint_{\sigma_1} xyz \, dp = \int_0^1 \int_0^1 uv \, du \, dv = \frac{1}{4}.$$

Stejným způsobem můžeme vypočítat, že integrály na plochách σ_2 a σ_3 jsou také rovny $\frac{1}{4}$. (Plyne to i ze symetrií integrované funkce a ploch σ_1, σ_2 a σ_3 .) Proto platí:

$$\iint_{\sigma} xyz \, dp = \iint_{\sigma_1} xyz \, dp + \iint_{\sigma_2} xyz \, dp + \iint_{\sigma_3} xyz \, dp = \frac{3}{4}.$$

IV.2.10. Příklad: výpočet plošného integrálu na kulové ploše. Ačkoliv kulová plocha $\sigma_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ není jednoduchou hladkou plochou, existuje zobrazení P uzavřené množiny $B \subset \mathbb{E}_2$ na plochu σ_R , které má všechny vlastnosti parametrizace (vyjmenované v odstavci IV.1.2) s jednou výjimkou: není prosté na celé množině B .

Toto zobrazení vychází z popisu plochy ve sférických souřadnicích, parametry jsou úhly φ a ϑ (které však nyní označujeme u a v) a je definované rovnicemi:

$$\begin{aligned}x &= \phi(u, v) = R \cos u \cos v, \\y &= \psi(u, v) = R \sin u \cos v, \\z &= \vartheta(u, v) = R \sin v\end{aligned}$$

pro $[u, v] \in B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Zobrazení P není prosté vzhledem k chování na hranici množiny B : například různým bodům $[u, v] = [u_1, \pi/2]$ a $[u, v] = [u_2, \pi/2]$ (pro $u_1 \neq u_2$) na hranici B přiřazuje stejný bod $[x, y, z] = [0, 0, R]$ na ploše σ_R . Lze ověřit, že uvnitř B zobrazení P prosté je. Hranice množiny B má dvourozměrnou míru nulovou a chování integrované funkce (pokud tato zůstává omezená) na podmnožině B míry nula hodnotu dvojnásobného integrálu na B neovlivní. Zobrazení P lze proto využít k výpočtu plošného integrálu na kulové ploše σ_R stejně, jako kdyby P bylo opravdovou parametrizací. (Často o zobrazení P skutečně hovoříme, ne zcela přesně, jako o parametrizaci plochy σ_R .)

Je-li například $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, pak užitím vzorce (IV.2.1), dostáváme

$$\iint_{\sigma_R} f(x, y, z) dp = \iint_B R^2 \cos^2 v \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv.$$

Vektory P_u , P_v , $P_u \times P_v$ a číslo $\|P_u \times P_v\|$ jsou:

$$\begin{aligned}P_u(u, v) &= (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0), \\P_v(u, v) &= (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v), \\P_u(u, v) \times P_v(u, v) &= (R^2 \cos u \cos^2 v, R^2 \sin u \cos^2 v, R^2 \sin v \cos v), \\\|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| &= R^2 \cos v.\end{aligned}$$

Dosazením do výše uvedeného integrálu a rozkladem dvojnásobného integrálu na dvojnásobný integrál pomocí Fubiniho věty II.3.2 obdržíme:

$$\iint_B R^2 \cos^2 v \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \cos^3 v dv \right) du = \frac{8}{3} \pi R^4.$$

IV.2.11. Poznámka k výpočtu plošného integrálu pomocí parametrizace. Postup, vysvětlený v příkladu IV.2.10, může být použit i při výpočtu plošných integrálů na jiných jednoduchých p.č. hladkých plochách, jako jsou například elipsoid, omezená kuželová plocha, omezená válcová plocha, apod. To znamená, že při výpočtu můžeme coby parametrizaci použít zobrazení, jehož prostota je porušena pouze na množině míry nula ve svém definičním oboru (obvykle na hranici).

Je-li například σ omezená kuželová plocha $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in \langle 0, 2 \rangle$, pak zobrazení

$$P : \quad x = \phi(u, v) = u \cos v, \quad y = \psi(u, v) = u \sin v, \quad z = \vartheta(u, v) = u$$

(definované pro $u \in \langle 0, 2 \rangle$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$) má všechny požadované vlastnosti parametrizace plochy σ (viz odstavec IV.1.2) s tou výjimkou, že je prosté pouze uvnitř svého definičního oboru, tj. v otevřeném obdélníku $(0, 2\pi) \times (0, 2)$ a nikoliv v $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. (Například dvěma různými bodům $[u, v] = [u, 0]$ a $[u, v] = [u, 2\pi]$ (pro $u \in \langle 0, 2 \rangle$) přiřadí

P tentýž bod $[x, y, z] = [u, 0, u] \in \sigma$.) Nicméně, zobrazení P lze při výpočtu plošného integrálu na σ použít stejně, jako kdyby P bylo skutečnou parametrizací σ .

IV.3. Některé fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce.

Předpokládejme, že na ploše σ v \mathbb{E}_3 je rozložena hmota s plošnou hustotou $\rho(x, y, z)$ (udanou v kg m^{-2}). Plošným integrálem můžeme definovat a vypočítat některé základní mechanické charakteristiky plochy σ :

celková hmotnost .. $m = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) dp$ [kg],

statický moment

vzhledem k rovině xy . $m_{xy} = \iint_{\sigma} z \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m],

vzhledem k rovině xz . $m_{xz} = \iint_{\sigma} y \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m],

vzhledem k rovině yz . $m_{yz} = \iint_{\sigma} x \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m],

souřadnice těžiště .. $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$, $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy . $J_{xy} = \iint_{\sigma} z^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k rovině xz . $J_{xz} = \iint_{\sigma} y^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k rovině yz . $J_{yz} = \iint_{\sigma} x^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k ose x $J_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k ose y $J_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k ose z $J_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²],

vzhledem k počátku .. $J_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$ [kg · m²].

Navrhněte sami vzorec, jímž by bylo možné definovat a vypočítat moment setrvačnosti vzhledem k libovolné přímce nebo rovině v \mathbb{E}_3 .

**IV.4. Plošný integrál vektorové funkce.
(Plošný integrál 2. druhu.)**

IV.4.1. Fyzikální motivace. Představte si, že σ je plocha v proudovém poli nestlačitelné tekutiny a přejeme si vyjádřit a vypočítat tok tekutiny plochou σ . Tokem rozumíme objem tekutiny, která proteče plochou zvoleným směrem za jednotku času. Předpokládejme, že proudění je stacionární, rychlost tekutiny je $\mathbf{v}(x, y, z)$ a $\mathbf{n}(x, y, z)$ je normálový vektor na ploše σ v bodě $[x, y, z]$. (Připomínáme, že normálovým vektorem rozumíme jednotkový vektor, kolmý k ploše σ , ukazující směr orientace plochy.) Tok tekutiny “nekonečně malou” částí plochy σ , která se nachází v bodě $[x, y, z]$ a jejíž obsah je dp je $\|\mathbf{v}(x, y, z)\| \cos \alpha dp = \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dp$, kde α je úhel mezi vektorem rychlosti \mathbf{v} a normálovým vektorem \mathbf{n} v bodě $[x, y, z]$. Tok tekutiny celou plochou σ pak je $\iint_{\sigma} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dp$.

Stejnou úvahu můžeme použít, chceme-li vyjádřit například tok magnetického pole zvolenou plochou.

IV.4.2. Plošný integrál vektorové funkce. Nechť σ je jednoduchá p.č. hladká plocha v \mathbb{E}_3 a \mathbf{f} je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Říkáme, že vektorová funkce \mathbf{f} je *integrovatelná* na ploše σ , je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ integrovatelná na σ (ve smyslu, vysvětleném v odstavcích IV.2.2 a IV.2.4). Integrál $\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dp$ nazýváme *plošný integrál vektorové funkce* \mathbf{f} na ploše σ a označujeme jej kratším způsobem $\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$.

Plošný integrál vektorové funkce (= vektorového pole) \mathbf{f} vyjadřuje *tok vektorového pole* \mathbf{f} uvažovanou plochou. Tento integrál se často nazývá *plošný integrál 2. druhu*.

Z definice plošného integrálu vektorové funkce \mathbf{f} je patrné, že tento integrál je vlastně plošným integrálem skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, což je průmět vektorové funkce \mathbf{f} do směru kolmého k ploše σ . Plošný integrál vektorové funkce lze tudíž vyjádřit formulí

$$(IV.4.1) \quad \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dp.$$

IV.4.3. Poznámka. Normálový vektor \mathbf{n} nemusí existovat v těch bodech jednoduché p.č. hladké plochy σ , ve kterých se stýkají jednotlivé hladké plochy, ze kterých je p.č. hladká plocha σ složena. Takové body tvoří nejvýše konečně mnoho jednoduchých p.č. hladkých křivek a existence ani hodnota plošného integrálu na chování integrované funkce (pokud tato je omezená) na konečně mnoha křivkách nezávisí. (Srovnejte s poznámkami v odstavcích II.2.2 a III.4.3.)

IV.4.4. Poznámka – různé zápisy plošného integrálu vektorové funkce. Plošný integrál vektorové funkce lze značit a zapisovat různými způsoby. Je nutné těmto způsobům rozumět a vždy umět rozpoznat, co který zápis přesně znamená. Jedním způsobem zápisu je integrál na levé straně formule (IV.4.1). V tomto odstavci se seznámíme s dalšími možnostmi zápisu plošného integrálu vektorové funkce.

Předpokládejme, že vektorová funkce \mathbf{f} má souřadnicové funkce U , V a W . Pak integrály

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dp, \quad \iint_{\sigma} (U, V, W) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_{\sigma} (U, V, W) \cdot \mathbf{n} dp,$$

$$\iint_{\sigma} (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{p}, \quad \iint_{\sigma} (U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dp$$

mají všechny stejný význam.

Další označení, které se někdy objevuje v odborné literatuře, je založeno na vyjádření vektoru $d\mathbf{p}$ (formálně rovného $\mathbf{n} dp$) ve tvaru

$$d\mathbf{p} = (dy dz, dx dz, dx dy) = \mathbf{i} dy dz + \mathbf{j} dx dz + \mathbf{k} dx dy.$$

Dosazením do integrálu $\iint_{\sigma} (U, V, W) \cdot d\mathbf{p}$ a výpočtem skalárního součinu $(U, V, W) \cdot d\mathbf{p}$ obdržíme:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} (U, V, W) \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} U dy dz + V dx dz + W dx dy.$$

Nicméně, toto značení plošného integrálu vektorové funkce může poměrně snadno vést k nedorozumění a proto je v tomto textu používat nebudeme.

IV.4.5. Poznámka. Plošný integrál vektorové funkce \mathbf{f} je definován pomocí plošného integrálu skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ a proto základní vlastnosti plošného integrálu vektorové funkce a plošného integrálu skalární funkce jsou stejné. Body a), b) a c) odstavce IV.2.6 můžeme proto znovu zapsat se skalární funkcí $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ a získáme platná tvrzení o plošném integrálu vektorové funkce.

Mezi plošným integrálem skalární funkce a plošným integrálem vektorové funkce je však jeden velký rozdíl: Plošný integrál vektorové funkce závisí na orientaci plochy. Přesněji řečeno:

IV.4.6. Věta. *Je-li vektorová funkce \mathbf{f} integrovatelná na ploše σ , pak je integrovatelná i na ploše $-\sigma$ a*

$$\iint_{-\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = - \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}.$$

Tato věta vyplývá z definice plošného integrálu vektorové funkce. Integrál $\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$ je roven integrálu $\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dp$, kde \mathbf{n} je normálový vektor. Tento vektor ukazuje směr, kterým je plocha σ orientována. Změníme-li orientaci plochy, normálový vektor změní své znaménko a to vede ke změně znaménka celého integrálu.

IV.4.7. Výpočet plošného integrálu vektorové funkce. Plošný integrál vektorové funkce $\mathbf{f} = (U, V, W)$ na jednoduché hladké ploše σ můžeme vypočítat pomocí parametrizace plochy σ . Předpokládejme, že P je taková parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Předpokládejme dále, že plocha σ je orientována souhlasně s parametrizací P . Normálový vektor v každém bodě $P(u, v)$ plochy σ , který odpovídá $[u, v] \in B - K$ (tedy až na některé body na okraji plochy σ), lze vyjádřit: $\mathbf{n} = (P_u \times P_v) / \|P_u \times P_v\|$. (Viz odstavce IV.1.3, formule (IV.1.1).) Užitím formulí (IV.4.1) a (IV.2.1) obdržíme:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} &= \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dp \\ &= \iint_B \mathbf{f}(P(u, v)) \cdot \frac{P_u(u, v) \times P_v(u, v)}{\|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\|} \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv, \\ \text{(IV.4.2)} \quad \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} &= \iint_B \mathbf{f}(P(u, v)) \cdot (P_u(u, v) \times P_v(u, v)) du dv. \end{aligned}$$

Není-li plocha σ orientovaná v souladu s parametrizací P , platí vzorec (IV.4.2) se znaménkem “–” před integrálem na pravé straně.

Použití vzorce (IV.4.2) uvidíte na konkrétním příkladu v odstavci IV.5.8.

Je-li σ jednoduchá p.č. hladká plocha, která je složena z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, pak plošný integrál vektorové funkce na σ můžeme vypočítat tak, že nejprve vypočítáme integrály na jednoduchých hladkých plochách $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (například pomocí parametrizací těchto hladkých ploch), a poté výsledky sečteme.

Při výpočtu plošného integrálu vektorové funkce na některých jednoduchých p.č. hladkých plochách, jako jsou například kulová plocha, elipsoid, omezená kuželová plocha, omezená válcová plocha atd., můžeme též použít zobrazení, které má všechny vlastnosti parametrizace až na to, že není prosté na celém svém definičním oboru B , ale pouze uvnitř množiny B . (Viz odstavce IV.2.10 a IV.2.11, kde je tento postup vysvětlen a použit při výpočtu plošného integrálu skalární funkce.) S takovým zobrazením lze při výpočtu zacházet stejně jako se skutečnou parametrizací a integrál pak je možné vypočítat pomocí formule (IV.4.2).

Další možnosti výpočtu plošného integrálu vektorové funkce nabízí za určitých okolností Gaussova–Ostrogradského věta (je-li plocha σ uzavřená) a Stokesova věta. S těmito větami se setkáte v kapitole IV.5.

IV.4.8. Příklad. Vypočítejme tok vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = yz \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ plochou σ , která je částí poloviny válcové plochy $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, odříznutou rovinami $x = -1$ a $x = 1$. Plocha σ je orientovaná normálovým vektorem \mathbf{n} , který má v bodě $[0, 0, 2]$ tvar $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

Ř e š e n í : Jednoduchou hladkou plochu σ můžeme parametrizovat zobrazením

$$P(u, v) : \quad x = u, \quad y = 2 \cos v, \quad z = 2 \sin v; \quad [u, v] \in B = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, \pi \rangle.$$

(Ověřte sami, že P skutečně má všechny vlastnosti parametrizace, vyjmenované v odstavci IV.1.2.) Snadno zjistíme, že $P_u = (1, 0, 0)$, $P_v = (0, -2 \sin v, 2 \cos v)$ a $P_u \times P_v = (0, -2 \cos v, -2 \sin v)$. Jednotkový vektor, kolmý k ploše σ v bodě $[0, 0, 2]$ (který odpovídá $u = 0$ a $v = \pi/2$), vyjádřený pomocí parametrizace P , je

$$\left. \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} \right|_{[u,v]=[0,\pi/2]} = (0, 0, -1) = -\mathbf{k}.$$

Je patrné, že tento vektor je opačný k zadanému normálovému vektoru \mathbf{n} v bodě $[0, 0, 2]$. Zadaná orientace plochy je tudíž opačná vůči zvolené parametrizaci P . To znamená, že formuli (IV.4.2) musíme použít se znaménkem “–” před integrálem na pravé straně:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (yz \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{p} &= - \iint_B [4 \sin v \cos v \mathbf{j} + 4 \sin^2 v \mathbf{k}] \cdot (P_u \times P_v) \, du \, dv \\ &= - \int_{-1}^1 \int_0^{\pi} (0, 4 \sin v \cos v, 4 \sin^2 v) \cdot (0, -2 \cos v, -2 \sin v) \, dv \, du \\ &= - \int_{-1}^1 \int_0^{\pi} [-8 \sin v \cos^2 v - 8 \sin^3 v] \, dv \, du = 32. \end{aligned}$$

IV.5. Operátory divergence a rotace. Gaussova–Ostrogradského věta a Stokesova věta.

IV.5.1. Operátor nabla. Symbolem ∇ označujeme vektorový operátor, nazývaný *operátor nabla*, jehož souřadnicemi jsou postupně parciální derivace podle x , y a z :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Operátor nabla se používá k označení různých vektorových i skalárních polí. Z odstavce I.5.3 víme, že gradient skalárního pole φ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ je vektorové pole, jehož souřadnicovými funkcemi jsou parciální derivace φ podle x , y a z . Pomocí operátoru nabla je možné gradient φ zapsat takto:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

IV.5.2. Divergence vektorového pole. Nechť $\mathbf{f} = (U, V, W)$ je vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. *Divergencí* \mathbf{f} nazýváme skalární pole, které označujeme $\text{div } \mathbf{f}$ a které definujeme rovnicí

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, ve kterých má pravá strana smysl). Pomocí operátoru nabla můžeme divergenci zapsat: $\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

IV.5.3. Rotace vektorového pole. Nechť $\mathbf{f} = (U, V, W)$ je vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. *Rotací* \mathbf{f} nazýváme vektorové pole, které označujeme $\text{rot } \mathbf{f}$ a které definujeme rovnicí

$$\text{rot } \mathbf{f} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, ve kterých má pravá strana smysl). Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ U, & V, & W \end{vmatrix}.$$

(Determinant na pravé není determinantem přesně v tom smyslu, v jakém jej známe z Matematiky I. Můžeme jej však chápat jako užitečné schéma, poskytující návod k výpočtu rotace.)

IV.5.4. Poznámka. Vidíme, že gradient převádí skalární pole ve vektorové pole, divergence naopak převádí vektorové pole ve skalární pole a rotace převádí vektorové pole ve vektorové pole.

Gradient, divergence a rotace mají význam v teoriích různých typů polí (rychlostní pole proudící tekutiny, teplotní pole, gravitační pole, elektromagnetické pole atd.). Jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi jsou proto zajímavé nejen z hlediska aplikované matematiky samotné, ale i z hlediska mnoha dalších oborů. Jejich podrobné studium by

přesáhlo rámeček tohoto textu, přesto však zde ukážeme dva vzorce, o jejichž platnosti se lze výpočtem snadno přesvědčit:

Je-li φ skalární pole a \mathbf{f} vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ a mají-li obě pole v D druhé parciální derivace, pak

$$(IV.5.1) \quad \text{rot grad } \varphi = \mathbf{0},$$

$$(IV.5.2) \quad \text{div rot } \mathbf{f} = 0.$$

V odstavci I.5.7 byl vysvětlen geometrický význam gradientu skalární funkce φ v bodě $[x, y, z]$: $\text{grad } \phi(x, y, z)$ je vektor, který ukazuje směr největšího růstu hodnot funkce ϕ v bodě $[x, y, z]$. S fyzikálním významem operátorů divergence a rotace se seznámíme v odstavcích IV.5.9 a IV.5.13.

Z odstavce III.5.1 znáte dvourozměrnou verzi Jordanovy věty. Následující odstavec je věnován třírozměrné verzi této věty. Věta opět tvrdí něco, co je na první pohled jasné a srozumitelné. Důkaz by však opět byl překvapivě dlouhý a složitý.

IV.5.5. Jordanova věta. *Nechť σ je uzavřená jednoduchá p.č. hladká plocha v \mathbb{E}_3 . Pak v \mathbb{E}_3 existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2 , jejichž společnou hranicí je plocha σ a dále platí:*

a) $\mathbb{E}_3 = G_1 \cup \sigma \cup G_2$,

b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá je neomezená.

IV.5.6. Vnitřek a vnějšek uzavřené plochy. Nechť σ je uzavřená jednoduchá p.č. hladká plocha v \mathbb{E}_3 a G_1, G_2 jsou oblasti, jejichž existence vyplývá z Jordanovy věty. Tu z oblastí G_1, G_2 která je omezená, nazýváme *vnitřek* plochy σ a označujeme ji $\text{Int } \sigma$. Druhou oblast, která je neomezená, nazýváme *vnějšek* plochy σ a označujeme ji $\text{Ext } \sigma$.

Říkáme, že uzavřená plocha σ je orientována směrem vně (do svého vnějšku), jestliže její normálový vektor míří ve všech bodech plochy σ , ve kterých existuje, do vnějšku σ . V opačném případě říkáme, že uzavřená plocha je orientována směrem do svého vnitřku.

Následující věta ukazuje, že tok vektorového pole uzavřenou plochou je za jistých podmínek roven integrálu divergence vektorového pole přes vnitřek plochy. Větu nezávisle na sobě dokázali C. F. Gauss (1777–1855) a M. V. Ostrogradský (1801–1862).

IV.5.7. Gaussova–Ostrogradského věta. *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce \mathbf{f} má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$,*

b) *σ je uzavřená p.č. hladká plocha v D , orientovaná směrem vně a taková, že $\text{Int } \sigma \subset D$.*

Pak platí:

$$(IV.5.3) \quad \iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\text{Int } \sigma} \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz.$$

IV.5.8. Příklad. Vypočítejme tok vektorového pole $\mathbf{f}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$ povrchem σ krychle $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, orientovaným směrem vně.

Ř e š e n í : Souřadnicové funkce \mathbf{f} jsou spojitě diferencovatelné v \mathbb{E}_3 a σ je uzavřená jednoduchá p.č. hladká plocha v \mathbb{E}_3 , orientovaná směrem vně. Podle Gaussovy–Ostrogradského věty platí:

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} &= \iiint_{\text{Int } \sigma} \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y + z + x) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

IV.5.9. Fyzikální význam divergence. Předpokládejme, že vektorové pole \mathbf{f} má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ a A je bod v D . Označme σ_r kulovou plochu o středu A a poloměru r , orientovanou směrem vně. Pak

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{f}(A) &= \frac{\text{div } \mathbf{f}(A)}{\mu_3(\text{Int } \sigma_r)} \iiint_{\text{Int } \sigma_r} dx \, dy \, dz = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iiint_{\text{Int } \sigma_r} \text{div } \mathbf{f}(A) \, dx \, dy \, dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iiint_{\text{Int } \sigma_r} \text{div } \mathbf{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iint_{\sigma_r} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{p}.\end{aligned}$$

Má-li pole \mathbf{f} zdroj v bodě A , pak tok pole \mathbf{f} plochou σ_r , tj. integrál $\iint_{\sigma_r} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p}$, je pro r kladná a dostatečně malá rovněž kladný. Limita pro $r \rightarrow 0^+$ tohoto integrálu, děleného objemem $\text{Int } \sigma_r$, vyjadřuje intenzitu zdroje v bodě A .

V bodech, ve kterých je $\text{div } \mathbf{f} > 0$, má tudíž pole \mathbf{f} zdroje kladné intenzity (tzv. zřídla). Naopak, v bodech, ve kterých je $\text{div } \mathbf{f} < 0$, má pole \mathbf{f} zdroje záporné intenzity (tzv. propady nebo nory).

Toto má řadu fyzikálních důsledků. Například, v proudovém poli nestlačitelné tekutiny, se vzhledem k zákonu zachování hmoty tekutina nemůže nikde ztrácet ani vznikat a díky své nestlačitelnosti se nemůže nikde hromadit ani rozpínat. Rychlostní pole proto nemá zdroje kladné ani záporné intenzity. Vektorová funkce \mathbf{v} , udávající rychlost proudění, proto vyhovuje ve všech bodech proudového pole tzv. *rovnici kontinuity*

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

která je jednou ze základních rovnic mechaniky nestlačitelných tekutin.

Následující věta ukazuje souvislost plošného integrálu rotace vektorové funkce \mathbf{f} na ploše jejímž okrajem je uzavřená křivka C a křivkového integrálu funkce \mathbf{f} po křivce C . Větu objevil a dokázal anglický matematik G. G. Stokes (1819–1903). Všimněte si, že Stokesova věta zobecňuje Greenovu větu pro případ prostorové křivky C a prostorové vektorové funkce \mathbf{f} .

IV.5.10. Stokesova věta. Předpokládejme, že

- vektorová funkce \mathbf{f} má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$,
- σ je jednoduchá p.č. hladká plocha v D jejímž okrajem je jednoduchá uzavřená p.č. hladká křivka C ,
- plocha σ je se svým okrajem C souhlasně orientovaná.

Pak platí:

$$(IV.5.4) \quad \iint_{\sigma} \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \oint_C \mathbf{f} \cdot ds.$$

IV.5.11.* Poznámka. Stokesovu větu je možné rozšířit i na případy, kdy plocha σ je uzavřená (tj. její okraj je prázdná množina) nebo kdy okraj plochy σ je sjednocením n uzavřených jednoduchých p.č. hladkých křivek C_1, \dots, C_n , přičemž σ je orientována souhlasně se svým okrajem. V prvním případě obdržíme

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = 0$$

a ve druhém případě platí, že

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

IV.5.12. Příklad. Vypočítejme křivkový integrál $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, kde $\mathbf{f}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + 3xz \mathbf{k}$ a křivka C je okrajem plochy σ , jež je částí roviny $2x + y + z = 2$ v prvním oktantu. C je orientována proti směru hodinových ručiček při pohledu shora.

Ř e š e n í : Koeficienty v rovnici roviny, jejíž částí je plocha σ , tvoří souřadnice kolmého vektoru k σ : $(2, 1, 1)$. Nakreslíte-li si obrázek, uvidíte, že plocha σ (trojúhelník) je orientovaná souhlasně se svým okrajem C , jestliže normálový vektor \mathbf{n} má stejný směr jako vektor $(2, 1, 1)$. Jelikož normálový vektor je jednotkový, je $\mathbf{n} = (2, 1, 1)/\|(2, 1, 1)\| = (2, 1, 1)/\sqrt{6}$.

Souřadnicové funkce vektorového pole \mathbf{f} jsou spojitě diferencovatelné v celém prostoru \mathbb{E}_3 a $\operatorname{rot} \mathbf{f} = (0, x - 3z, y)$. Podle Stokesovy věty tudíž platí:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} (0, x - 3z, y) \cdot d\mathbf{p}.$$

Plochu σ lze parametrizovat zobrazením

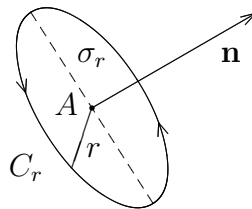
$$P(u, v) : \quad x = u, \quad y = v, \quad z = 2 - 2u - v; \quad [u, v] \in B,$$

kde $B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2 - 2u\}$. Snadno zjistíme, že $P_u = (1, 0, -2)$, $P_v = (0, 1, -1)$ a $P_u \times P_v = (2, 1, 1)$. Jelikož vektor $P_u \times P_v$ je orientován na stejnou stranu plochy σ , jako normálový vektor \mathbf{n} , plocha σ je orientována souhlasně s parametrizací P . Užitím vzorce (IV.4.2) dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (0, x - 3z, y) \cdot d\mathbf{p} &= \iint_B (0, u - 6 + 6u + 3v, v) \cdot (2, 1, 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2u} [7u + 4v - 6] \, dv \, du = -1. \end{aligned}$$

IV.5.13. Fyzikální význam rotace.

Předpokládejme, že vektorová funkce \mathbf{f} má spojitě parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$, $A \in D$ a \mathbf{n} je vektor jednotkové délky. Označme σ_r kruh se středem v bodě A , poloměrem r a normálovým vektorem \mathbf{n} . Označme dále C_r kružnici, která je okrajem plochy σ_r a která je orientovaná souhlasně se σ_r . Pak platí:



Obr. 29

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n} &= \frac{\operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n}}{p(\sigma_r)} \iint_{\sigma_r} dp = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\sigma_r} \operatorname{rot} \mathbf{f}(A) \cdot \mathbf{n} \, dp \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\sigma_r} \operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{p} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{C_r} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

rot $\mathbf{f}(A)$ je tudíž vektor, jehož skalární součin s jakýmkoliv jednotkovým vektorem \mathbf{n} vyjadřuje míru vířivosti pole \mathbf{f} v rovině, kolmé k \mathbf{n} . (Viz obr. 29.) Jelikož skalární součin je největší tehdy, má-li \mathbf{n} stejný směr jako $\text{rot } \mathbf{f}(A)$, pole \mathbf{f} má v bodě A největší vířivost v rovině, která je na vektor $\text{rot } \mathbf{f}(A)$ kolmá.

IV.6. Cvičení.

1. $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, σ je orientovaná tak, že normálový vektor \mathbf{n} v každém bodě σ vyhovuje nerovnosti $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \geq 0$.

- a) Ověřte, že zobrazení $P(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v]$ pro $[u, v] \in B = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$ je parametrizací σ (tj. že má všechny vlastnosti, vyjmenované v odstavci IV.1.2.) Rozhodněte, zda σ je orientovaná souhlasně s parametrizací P . (Viz odstavce IV.1.2 a IV.1.3.)
- b) Ukažte, že zobrazení $Q(u, v) = [\sqrt{4 - u^2}, u, v]$ pro $[u, v] \in B = \langle -2, 2 \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$ není parametrizace plochy σ . (Viz odstavec IV.1.2.)

2. σ je polovina kulové plochy $\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ ($a > 0$), orientovaná normálovým vektorem $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ takovým, že $n_3 \geq 0$. Množina B je: $B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2 + v^2 \leq a^2\}$.

- a) Ukažte, že zobrazení

$$P(u, v) = \left[\frac{2a^2 u}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{2a^2 v}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{2a^3}{a^2 + u^2 + v^2} - a \right]; \quad [u, v] \in B$$

je parametrizace plochy σ (tj. má všechny vlastnosti, vyjmenované v odstavci IV.1.2). Rozhodněte, jestli je σ orientovaná souhlasně s parametrizací P . (Viz odstavce IV.1.2 a IV.1.3.)

- b) Ukažte, že zobrazení $Q(u, v) = [u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}]$, $[u, v] \in B$, není parametrizace plochy σ . (Viz odstavec IV.1.2.)

3. σ je jednoduchá hladká plocha, orientovaná normálovým vektorem \mathbf{n} . Najděte její parametrizaci, ověřte vlastnosti vyjmenované v odstavci IV.1.2 a rozhodněte, zda σ je orientovaná souhlasně se zvolenou parametrizací. (Viz odstavce IV.1.2 a IV.1.3.)

- a) σ je trojúhelník s vrcholy $A = [1, -1, 2]$, $B = [2, 1, 3]$, $C = [-1, 2, 4]$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} < 0$,
- b) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}$, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ v bodě $P = [2, 0, 2]$,
- c) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = z, y \geq 0, z \leq 1\}$, $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ v bodě $P = [0, 0, 0]$,
- d) σ je rovnoběžník s vrcholy $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 4, 4]$, $C = [0, 5, 6]$, $D = [0, 2, 3]$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$,
- e) σ je kruh v rovině $x = 2$ se středem v bodě $[2, -1, 3]$ a poloměrem $r = 4$, $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ v každém bodě σ ,

- f) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = 4; z \geq \sqrt{2}\}$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ v bodě $P = [0, 0, 2]$,
- g) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; xy - z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ($a > 0$), $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$.
4. Ověřte, že množina $\sigma = \{X \in \mathbb{E}_3; X = P(u, v), [u, v] \in B\}$ je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace. (Viz odstavec IV.1.2.)
- a) $P(u, v) = [u, 4u^2 + 9v^2, v]$, $B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u^2/9 + v^2/4 \leq 1\}$,
- b) $P(u, v) = [u, v, 4 - u - v]$, $B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 4\}$,
- c) $P(u, v) = [3 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 3 \sin v]$, $B = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi/4 \rangle$.
5. Ověřte, že σ je jednoduchá p.č. hladká plocha. Najděte parametrizace jednoduchých hladkých ploch, ze kterých je σ složena. (Viz odstavce IV.1.6, IV.1.7 a IV.1.2.)
- a) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$,
- b) $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2\}$,
- c) $\sigma_1 \cup \sigma_2$ kde $\sigma_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq 16, z = 0\}$, $\sigma_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$,
- d) σ je povrchem tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 4 - x^2 - y^2 \leq 4z\}$.
6. Rozhodněte o existenci integrálu $\iint_{\sigma} f dp$. (Viz odstavce IV.2.2 a IV.2.6.)
- a) $f(x, y, z) = (xy \ln |x|)/z$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$,
- b) $f(x, y, z) = (xy \ln |x|)/z$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 1 + x^2 + y^2, z \leq 2\}$,
- c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{-1}$, σ je kulová plocha se středem v bodě $S = [0, 0, 3]$ a poloměrem $r = a$.
7. Vypočítejte obsahy ploch z příkladů 3g, 4c, 5b, 5c. (Viz odstavec IV.2.5.)
8. Vypočítejte následující plošné integrály. (Viz odstavec IV.2.7.)
- a) $\iint_{\sigma} xyz dp$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2 + 9z^2 = 9, 1 \leq x \leq 3, y \geq 0, z \geq 0\}$,
- b) $\iint_{\sigma} xz dp$, σ je trojúhelník s vrcholy $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$ a $C = [0, 0, 1]$,
- c) $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dp$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ ($a > 0$),
- d) $\iint_{\sigma} (xy + yz + xz) dp$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 \leq 2x\}$,
- e) $\iint_{\sigma} (x + y + z) dp$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \leq 0\}$ ($a > 0$),
- f) $\iint_{\sigma} \frac{dp}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 3\}$,
- g) $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dp$, σ je plocha z příkladu 5d.

9. Určete souřadnice těžiště plochy σ , na které je hmota rozložena s plošnou hustotou ρ . (Viz kapitolu IV.3.)
- $\rho(x, y, z) = x$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x = \sqrt{y^2 + z^2}, y \geq 0, 0 \leq x \leq 2\}$,
 - $\rho(x, y, z) = xyz$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 3\}$.
10. κ je plášť rotačního kuželu o poloměru podstavy $r = a > 0$ a výšce $h > 0$. Plošná hustota rozložení hmoty na κ je $\rho = \text{konst}$. Vypočítejte moment setrvačnosti κ vzhledem k ose kuželu. (Viz kapitolu IV.3.)
11. Vypočítejte tok vektorového pole \mathbf{f} plochou σ . (Viz odstavce IV.4.2 a IV.4.7.)
- $\mathbf{f}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - x^2 - y^2/9, y \geq 0, z \geq 0\}$, σ je orientovaná tak, že její normál svírá s vektorem $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, y)$, σ je trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0, 0]$, $B = [5, 0, 1]$, $C = [1, 4, 1]$, orientovaný tak, že normála \mathbf{n} svírá s vektorem \mathbf{k} ostrý úhel,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, σ je válcová plocha $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 4$, orientovaná normálovým vektorem \mathbf{n} , který v bodě $[3, 2, 2]$ je roven $-\mathbf{i}$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, σ je část (odpovídající $z \geq 0$) kulové plochy se středem $S = [0, 0, 0]$ a poloměrem $r = 2$, orientovaná tak, že její normálou v bodě $[0, 0, 2]$ je vektor $\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, σ je rovnoběžník $A = [0, 0, 0]$, $B = [0, 3, 3]$, $C = [-1, 4, 5]$, $D = [-1, 1, 2]$, orientovaný normálovým vektorem $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_1 = \{[x, y, 0] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\sigma_2 = \{[x, 0, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, z \geq 0\}$, normálový vektor na σ_2 je $\mathbf{n} = -\mathbf{j} = (0, -1, 0)$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y = 9 - \sqrt{x^2 + z^2}, y \geq 3\}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \leq 0$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2/16 + z^2/4 = 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 3\}$, normálový vektor v bodě $P = [1, 0, 2]$ je $\mathbf{n} = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\}$, normálový vektor v bodě $P = [2, 0, 0]$ je $\mathbf{n} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$, normálový vektor je $\mathbf{n} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$.
12. Vypočítejte tok vektorového pole \mathbf{f} uzavřenou plochou σ . Je-li to možné, použijte Gaussovu-Ostrogradského větu. (Viz odstavce IV.4.2, IV.4.7 a IV.5.7.)
- $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, σ je kulová plocha se středem $S_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a poloměrem $a > 0$, orientovaná směrem vně,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, σ je kulová plocha se středem $S_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a poloměrem $a > 0$, orientovaná směrem vně,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, σ je kulová plocha se středem $S_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a poloměrem $a > 0$, orientovaná směrem vně,
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 2x, -z)$, σ je povrch tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq a^2, -a \leq z \leq a\}$ ($a > 0$), σ je orientovaná směrem dovnitř,

- e) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, σ je povrch tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; -2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$, σ je orientovaná směrem dovnitř,
- f) $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, σ je povrch tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y^2 + z^2 \leq x^2, 0 \leq x \leq 3\}$, σ je orientovaná směrem vně,
- g) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, z, y)$, σ je povrch tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$, σ je orientovaná směrem vně,
- h) $\mathbf{f}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2/4 + y^2/4 + z^2/9 = 1\}$, σ je orientovaná směrem dovnitř,
- i) $\mathbf{f}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, σ je povrch tělesa $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ ($a > 0$), σ je orientovaná směrem vně,
- j) $\mathbf{f} = (x - 1, y + 2, 2)$, σ je uzavřená plocha v \mathbb{E}_3 , orientovaná směrem vně a taková, že $\mu_3(\text{Int } \sigma) = 5$.

13. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole \mathbf{f} po uzavřené křivce C . Je-li to možné, použijte Stokesovu větu. (*Viz odstavce III.4.11 a IV.5.10.*)

- a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$, C je průnik válcové plochy $x^2 + y^2 = 4$ s rovinou $x + z = 0$. C je orientovaná tak, že její tečný vektor v bodě $[2, 0, -2]$ je $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$,
- b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$, $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + z = 1, y^2 + z^2 = 1\}$. C je orientovaná souhlasně s plochou $\lambda = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + z = 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$ a orientace λ je určena normálovým vektorem $\mathbf{n} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$,
- c) $\mathbf{f}(x, y, z) = (z + 1)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C je kružnice, která je průnikem kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ a roviny $x + y + z = 0$. C je při pohledu z bodu $[0, 0, 10]$ orientovaná po směru hodinových ručiček,
- d) $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 2z)$, C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), $z = h$ ($h > 0$), orientovaná při pohledu z bodu $[0, 0, 2h]$ proti směru hodinových ručiček.

V. Potenciální a solenoidální vektorové pole

V.1. Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě. Potenciální pole – definice a základní vlastnosti.

Práce, které je třeba k přemístění hmotného tělesa v gravitačním poli z bodu A do bodu B , nezávisí na zvolené cestě (křivce) mezi body A a B , ale pouze na poloze bodů A a B . To jistě znáte z fyziky. Stejně tvrzení platí i při přemísťování elektrického náboje v elektrostatickém poli. Uvědomíte-li si, že práci lze vyjádřit křivkovým integrálem vektorové funkce (rovné záporně vzaté intenzitě gravitačního pole, násobené hmotností přemísťovaného tělesa), můžete hovořit o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Nezávislost na integrační cestě je důležitá vlastnost, kterou mají křivkové integrály některých vektorových polí (= vektorových funkcí). V této kapitole se budeme touto vlastností zabývat podrobněji a na obecnější úrovni.

Abychom text nekomplikovali, přijmeme úmluvu: kdykoliv použijeme termín křivka (bez bližší specifikace), budeme mít na mysli jednoduchou p.č. hladkou křivku.

V.1.1. Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na integrační cestě.

Nechť \mathbf{f} je k -rozměrné vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$). Jestliže pro libovolné dvě křivky K_1 a K_2 v D , které mají shodný počáteční i koncový bod (tj. $p.b. K_1 = p.b. K_2$ a $k.b. K_1 = k.b. K_2$), platí rovnost

$$(V.1.1) \quad \int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

pak říkáme, že křivkový integrál vektorové funkce \mathbf{f} nezávisí v D na cestě.

V.1.2. Věta. *Křivkový integrál vektorové funkce \mathbf{f} nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ (kde $k = 2$ nebo $k = 3$) na cestě právě tehdy, když cirkulace \mathbf{f} po libovolné uzavřené křivce C v D je nulová.*

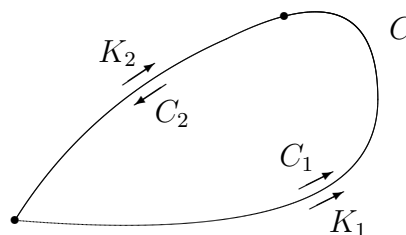
D ů k a z : a) Nejprve předpokládejme, že křivkový integrál \mathbf{f} nezávisí v D na cestě a že C je libovolná uzavřená křivka v D . Budeme dokazovat, že cirkulace \mathbf{f} po křivce C je nulová. C lze rozložit na sjednocení dvou křivek C_1 a C_2 takových, že $k.b. C_1 = p.b. C_2$ a $k.b. C_2 = p.b. C_1$. Položíme-li $K_1 = C_1$ a $K_2 = -C_2$, získáme dvě křivky v D se shodným počátečním i koncovým bodem. Z nezávislosti křivkového integrálu \mathbf{f} na cestě v D plyne, že $\int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. To znamená, že

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{K_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} - \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b) Nyní naopak předpokládejme, že cirkulace \mathbf{f} po libovolné uzavřené křivce v D je

$$k.b. C_1 = p.b. C_2$$

$$= k.b. K_1 = k.b. K_2$$



$$p.b. C_1 = k.b. C_2$$

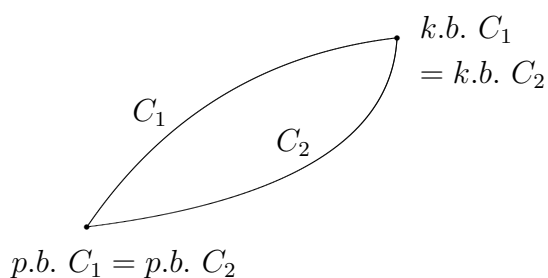
$$= p.b. K_1 = p.b. K_2$$

Obr. 30

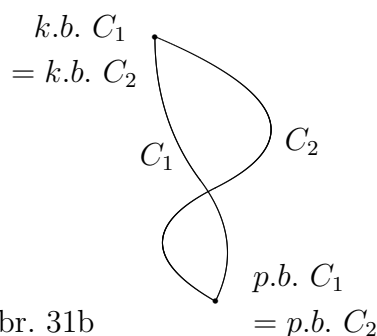
nulová a dokažme, že křivkový integrál \mathbf{f} nezávisí v D na cestě. Nechtě C_1 a C_2 jsou dvě libovolné křivky v D takové, že $p.b. C_1 = p.b. C_2$ a $k.b. C_1 = k.b. C_2$. Předpokládejme pro jednoduchost, že křivky C_1 a C_2 již nemají žádné další společné body, tj. že se v žádných dalších bodech neprotínají. (Viz obr. 31a.) Sjednocení $C = C_1 \cup (-C_2)$ je pak uzavřenou křivkou v D a podle předpokladu je cirkulace \mathbf{f} po C nulová. Odtud plyne:

$$\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1 \cup (-C_2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Podobný přístup lze použít i v případě, kdy křivky C_1 a C_2 mají více společných bodů, než počáteční a koncové body. (Viz obr. 31b.) Zkuste si sami rozmyslet a napsat, jak by bylo možné v tomto případě důkaz dokončit.



Obr. 31a



Obr. 31b

V.1.3. Potenciální vektorové pole. Vektorové pole \mathbf{f} v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme potenciální pole v D , jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$(V.1.2) \quad \mathbf{f} = \text{grad } \varphi$$

v D . Skalární funkci φ nazýváme potenciál vektorového pole \mathbf{f} v D .

V.1.4. Některé vlastnosti potenciálu. Připomínáme, že

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (\text{pro } k = 2), \quad \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (\text{pro } k = 3).$$

Je zřejmé, že je-li \mathbf{f} potenciální pole v oblasti D a D' je oblast, obsažená v D , pak \mathbf{f} je potenciální pole i v oblasti D' .

Potenciál φ potenciálního pole \mathbf{f} má některé podobné vlastnosti, jako primitivní funkce k funkci jedné proměnné. Například:

Je-li \mathbf{f} potenciální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$, pak jeho potenciál φ je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

To znamená, že:

- $\varphi + c$ (kde c je libovolná reálná konstanta) je také potenciál \mathbf{f} v D .
- Jakýkoliv jiný potenciál ζ pole \mathbf{f} v D se liší od φ nejvýše o aditivní konstantu. Jinými slovy: je-li ζ také potenciál \mathbf{f} v D , pak existuje konstanta c taková, že $\zeta = \varphi + c$ v D .

Tvrzení a) je velmi jednoduché: Z rovnice $\text{grad } \varphi = \mathbf{f}$ v D bezprostředně plyne, že $\text{grad } (\varphi + c) = \mathbf{f}$ a tak $\varphi + c$ je také potenciálem \mathbf{f} v D .

Tvrzení b) je také celkem zřejmé: Jsou-li φ a ζ dva potenciály \mathbf{f} v D , pak $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$ a $\mathbf{f} = \text{grad } \zeta$ v D . Tudíž $\text{grad } \zeta - \text{grad } \varphi = \text{grad } (\zeta - \varphi) = \mathbf{0}$. Jediná funkce, která má nulový gradient v oblasti D , je konstantní funkce. To znamená, že existuje konstanta c taková, že $\zeta - \varphi = c$. Pak ovšem je $\zeta = \varphi + c$ v D .

Další analogií mezi potenciálem φ potenciálního pole \mathbf{f} a primitivní funkcí k funkci jedné proměnné je podobnost vzorce (V.1.3) (viz následující větu) a Newtonovy–Leibnizovy formule (V.4.1) (viz skriptum [5]).

V.1.5. Věta. *Je-li \mathbf{f} potenciální a spojitě vektorové pole v oblasti D , φ je potenciál \mathbf{f} v D a C je křivka v D , pak*

$$(V.1.3) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(k.b.C) - \varphi(p.b.C).$$

D ů k a z : Jelikož φ je potenciálem \mathbf{f} v D , \mathbf{f} je rovno $\text{grad } \varphi$ v D . Předpokládejme nejprve, že C je jednoduchá hladká křivka v D a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, přičemž křivka C je orientovaná souhlasně s parametrizací P . Označme $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ souřadnicové funkce zobrazení P . Pak

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_C \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \text{grad } \varphi(P(t)) \cdot \dot{P}(t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \right) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) \right] dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t), z(t)) dt \\ &= \varphi(x(b), y(b), z(b)) - \varphi(x(a), y(a), z(a)) = \varphi(k.b.C) - \varphi(p.b.C). \end{aligned}$$

Totéž vyjádření integrálu $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ lze odvodit i v případě, kdy C je jednoduchá p.č. hladká křivka. (Zkuste si toto rozmyslet a napsat sami.)

Jelikož hodnota integrálu $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ potenciálního pole \mathbf{f} závisí pouze na poloze počátečního a koncového bodu křivky C , tento integrál často zapisujeme jako

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

kde $A = p.b.C$ a $B = k.b.C$.

Následující věta je velmi důležitá. Uvádí do souvislosti nezávislost křivkového integrálu na cestě a skutečnost, že vektorové pole je potenciální.

V.1.6. Věta. *Předpokládejme, že \mathbf{f} je spojitě vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$). Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

a) \mathbf{f} je potenciální pole v D .

b) *Křivkový integrál \mathbf{f} nezávisí na integrační cestě v D .*

Důkaz : Implikace a) \implies b) je okamžitým důsledkem vzorce (V.1.3).

Dokazujme nyní opačnou implikaci, tj. b) \implies a). Předpokládejme tudíž, že podmínka b) je splněna. Označme U , V a W souřadnicové funkce \mathbf{f} . Vyberme bod $A \in D$. Bod A je vybrán libovolně, od tohoto okamžiku však na něj budeme hledět jako na pevný bod. Nechť $X = [x, y, z]$ je nějaký další bod v D . Definujme

$$(V.1.4) \quad \varphi(x, y, z) = \int_A^X \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s},$$

kde C je křivka v D , jejímž počátečním bodem je A a koncovým bodem je X . Z nezávislosti křivkového integrálu pole \mathbf{f} na integrační cestě v D plyne, že hodnota $\varphi(x, y, z)$ není závislá na konkrétní volbě křivky C , spojující body A a $X = [x, y, z]$. Ukážeme, že $\text{grad } \varphi = \mathbf{f}$ v D . To znamená, že

$$(V.1.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X) = U(X), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(X) = V(X) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(X) = W(X).$$

Dokazujme například první z těchto rovností. Užitím definice parciální derivace φ podle x v bodě $X = [x, y, z]$ dostáváme:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y, z) - \varphi(x, y, z)}{h}.$$

$\varphi(x+h, y, z)$ lze vyjádřit jako křivkový integrál \mathbf{f} na jednoduché p.č. hladké křivce, která je sjednocením C a úsečky $\overline{XX'}$, vedoucí od bodu X k bodu $X' = [x+h, y, z]$. Jednotkovým tečným vektorem na $\overline{XX'}$ je $\boldsymbol{\tau} = (1, 0, 0)$. Odtud plyne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{C \cup \overline{XX'}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\overline{XX'}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\overline{XX'}} (U, V, W) \cdot (1, 0, 0) ds = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\overline{XX'}} U ds = U(X). \end{aligned}$$

Rovnosti (V.1.5) ukazují, že $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$ v D a tudíž vektorové pole \mathbf{f} je potenciální pole v D .

V.1.7. Důsledek. Okamžitým důsledkem věty V.1.2 a věty V.1.6 je tato věta:

Věta. *Vektorové pole \mathbf{f} , spojitě v oblasti D , je potenciální v D právě tehdy, je-li jeho cirkulace po každé uzavřené křivce v D nulová.*

O potenciálním poli často říkáme, že je to **nevířivé pole**. Z uvedené věty je patrné, proč tomu tak je.

V.1.8. Poznámka. Je-li \mathbf{f} potenciální pole v oblasti D a má-li \mathbf{f} fyzikální význam síly, pak z věty V.1.7 plyne, že práce, vykonaná působením síly \mathbf{f} po každé uzavřené křivce v D , je nulová. Jinými slovy: působením síly \mathbf{f} po jakékoliv uzavřené křivce v oblasti D se energie neztrácí, ani nezískává. Z této skutečnosti vychází i jiný, často používaný název pro potenciální pole: **konzervativní pole**.

Důkazy vět V.1.5 a V.1.6 jsme ukázali proto, že jsou velmi instruktivní a jejich myšlenky je možné použít i v mnoha dalších situacích. Formule (V.1.3) poskytuje jednoduchý návod, jak vypočítat křivkový integrál potenciálního vektorového pole, je-li známý

potenciál. Důkaz věty V.1.6 pak ukazuje jeden možný způsob, jak lze potenciál vektorového pole zkonstruovat. Tento způsob použijeme na konkrétním příkladu v odstavci V.2.10. V odstavcích V.2.10 a V.3.10 však zároveň vysvětlíme i jinou metodu nalezení potenciálu vektorového pole \mathbf{f} , pokud víme, že je potenciálním polem.

Poznali jsme, že potenciální vektorové pole \mathbf{f} v oblasti D má zajímavé a užitečné vlastnosti – zejména, že jeho křivkový integrál nezávisí v D na integrační cestě (věta V.1.6) a křivkový integrál lze navíc vypočítat pomocí vzorce (V.1.3) (věta V.1.5). Proto je velmi důležité umět poznat, zda dané vektorové pole \mathbf{f} v oblasti D je nebo není potenciální. V dalších odstavcích se budeme touto otázkou zabývat. Budeme rozlišovat mezi dvourozměrným polem (kapitola V.2) a třírozměrným polem (kapitola V.3).

V.2. Potenciální pole v \mathbb{E}_2 .

V.2.1. Věta. (Potenciální pole v \mathbb{E}_2 – nutná podmínka.) Předpokládejme, že $\mathbf{f} = (U, V)$ je potenciální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ a jeho souřadnicové funkce U, V mají spojitě parciální derivace v D . Pak

$$(V.2.1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

D ů k a z : Je-li φ potenciál \mathbf{f} v D , pak $\mathbf{f} = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$. Tudíž

$$U = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{a} \quad V = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

v D . Z tohoto tvaru funkcí U a V a z informace o spojitosti parciálních derivací U a V v D (která znamená spojitost druhých parciálních derivací φ v D) již snadno vyplývá podmínka (V.2.1).

V.2.2. Poznámka. Platnost podmínky (V.2.1) je nutná pro to, aby pole \mathbf{f} mohlo být v oblasti D potenciální. Není však postačující. To znamená, že nevíme-li dopředu, zda $\mathbf{f} = (U, V)$ je potenciální pole v D , pak pouze z platnosti podmínky (V.2.1) se to odvodit nedá. Toto je možné ilustrovat na příkladu vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y) = (U, V) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

z odstavce III.4.12 v oblasti $D = \mathbb{E}_2 - \{[0, 0]\}$. (D je celá rovina \mathbb{E}_2 s výjimkou počátku.) Snadným výpočtem můžete ověřit, že funkce U a V vyhovují podmínce (V.2.1) v D . Přesto však pole \mathbf{f} není v D potenciálním polem. V příkladu III.4.12 jsme totiž zjistili, že cirkulace \mathbf{f} po kružnici $C : x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), orientované po směru hodinových ručiček, je rovna -2π . Kdyby pole \mathbf{f} bylo v D potenciální, musela by jeho cirkulace po každé uzavřené křivce v D být nulová (věta V.1.7).

Na druhé straně, pokud nějaké vektorové pole podmínce (V.2.1) nevyhovuje, můžeme o něm okamžitě prohlásit, že není potenciální.

V.2.3. Příklad. Rozhodněme, zda vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ je potenciálním polem v \mathbb{E}_2 .

Ř e š e n í : Zde je $U(x, y) = x + y$ a $V(x, y) = x^2 + y^2$. Jelikož

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 2x - 1$$

a $2x - 1$ není rovno nule všude v \mathbb{E}_2 , vektorové pole \mathbf{f} není potenciální pole v \mathbb{E}_2 .

Naším dalším cílem je formulovat postačující podmínku, jejíž platnost již zajišťuje, že dané dvourozměrné vektorové pole \mathbf{f} je potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$. K tomu potřebujeme pojem tzv. “jednoduše souvislé oblasti” v \mathbb{E}_2 .

V.2.4. Jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_2 . Oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D , aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Jednoduše souvislou oblast v \mathbb{E}_2 je také možné definovat jako oblast D , ve které platí, že vnitřek každé uzavřené křivky v D je podmnožinou D .

Zhruba řečeno, oblasti, které mají omezené “díry” (a vypadají jako švýcarský sýr) nejsou jednoduše souvislé. Na druhé straně oblasti, které takové díry nemají, jsou jednoduše souvislé. Příklady jednoduše souvislých oblastí v \mathbb{E}_2 jsou celé \mathbb{E}_2 , polorovina, \mathbb{E}_2 minus polopřímka, vnitřek obdélníku, čtverce nebo jakékoliv jiné uzavřené křivky atd. Příklady oblastí v \mathbb{E}_2 , které nejsou jednoduše souvislé, jsou \mathbb{E}_2 minus jeden bod, \mathbb{E}_2 minus omezená uzavřená množina, mezikruží atd.

V.2.5.* Poznámka. V definici V.2.4 si pomáháme rčením “spojitě stáhnout v bod A v D , aniž přitom opustíme D ”, jehož význam jsme přesně nevysvětlili. Přesto věříme, že čtenáři správně pochopí, co tím míníme. Nicméně, v zájmu úplnosti výkladu doplňme, že toto rčení lze přesným matematickým jazykem vyjádřit takto: “Existuje spojitě zobrazení $F : C \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow D$ takové, že $\forall X \in C$ platí: $F(X, 0) = X$ a $F(X, 1) = A$ ”.

V.2.6. Věta. (Potenciální pole v \mathbb{E}_2 – postačující podmínka.) *Nechť*

- a) D je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_2 a
- b) $\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D , jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojitě parciální derivace a splňují podmínku (V.2.1):

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak \mathbf{f} je potenciální pole v D .

D ů k a z : Ukážeme, že cirkulace vektorového pole \mathbf{f} po každé uzavřené křivce v D je nulová. Z toho již vyplývá, že \mathbf{f} je potenciální pole v D . (Viz větu V.1.7.) Buď tedy C libovolná uzavřená křivka v D . Jelikož D je jednoduše souvislá oblast, $\text{Int } C \subset D$. Užitím Greenovy věty dostáváme:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \pm \iint_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

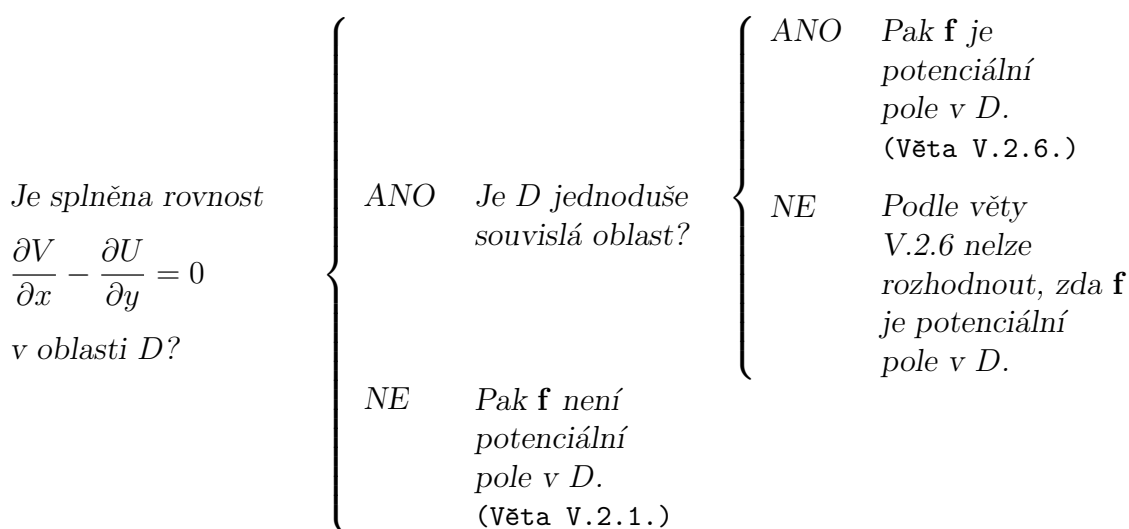
(Znaménko “+” platí, je-li křivka C orientovaná kladně a “−” platí, je-li křivka C orientovaná záporně. Jelikož ale integrál na pravé straně je roven nule, znaménko nehraje žádnou roli.)

V důkazu vidíte, k čemu potřebujeme, aby oblast D byla jednoduše souvislá: bez toho totiž nevíme, zda $\text{Int } C \subset D$ a zda můžeme použít Greenovu větu.

V.2.7. Příklad. Vektorové pole $\mathbf{f} = (U, V)$ z příkladu III.4.12 a z poznámky V.2.2 není potenciálním polem v oblasti $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 > 0\}$, a to přesto, že funkce U a V podmínce (V.2.1) v D vyhovují. (Důvod jsme uvedli v poznámce V.2.2.) Podle věty V.2.6 je však \mathbf{f} potenciálním polem v každé oblasti $D' \subset D$, která je jednoduše souvislá. Například, \mathbf{f} je potenciální pole v prvním kvadrantu.

Ačkoliv teď již víme, že \mathbf{f} je potenciální pole v prvním kvadrantu, neznáme jeho potenciál. Metodám, umožňujícím nalezení potenciálu, se budeme věnovat v odstavcích V.2.10 a V.2.11, kde se mimo jiné vrátíme k tomuto příkladu.

V.2.8. Jak poznáme, zda dané vektorové pole je potenciální. V tomto odstavci krátce shrneme, jak můžeme zjistit, zda dané vektorové pole $\mathbf{f} = (U, V)$ je potenciální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$. Předpokládejme pro jednoduchost, že souřadnicové funkce U a V mají spojité parciální derivace v D . Pak můžeme postupovat podle tohoto schématu:



V.2.9. Příklad. $\mathbf{f} = (y^2 + y \cos x + 6x, 2xy + \sin x + 5)$ Rozhodněme, zda \mathbf{f} je potenciální pole v \mathbb{E}_2 .

Řešení: Souřadnicové funkce $U(x, y) = y^2 + y \cos x + 6x$ a $V(x, y) = 2xy + \sin x + 5$ mají spojité parciální derivace v \mathbb{E}_2 . Snadno můžete ověřit, že splňují podmínku (V.2.1):

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 2y + \cos x - 2y - \cos x = 0$$

v \mathbb{E}_2 . Celá rovina \mathbb{E}_2 je jednoduše souvislá oblast. Podle věty V.2.6 je tudíž \mathbf{f} potenciální pole v \mathbb{E}_2 .

V.2.10. Jak nalézt potenciál. V tomto odstavci ukážeme dvě metody, kterými můžeme nalézt potenciál φ vektorového pole \mathbf{f} , o kterém víme, že je potenciální. Obě metody vysvětlíme na příkladu vektorového pole \mathbf{f} z předcházejícího odstavce.

1. metoda. Z definice potenciálu vektorového pole plyne, že $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$ v \mathbb{E}_2 , tj.

$$(V.2.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2 + y \cos x + 6x \quad \text{a} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy + \sin x + 5.$$

Integrujeme-li první rovnici v (V.2.2) podle x , obdržíme:

$$(V.2.3) \quad \varphi(x, y) = xy^2 + y \sin x + 3x^2 + c_1(y).$$

c_1 je integrační konstanta, která vznikla při integraci podle x . Je to tedy konstanta vzhledem k x , může však záviset na y . Integrací druhé rovnice v (V.2.2) podle y obdržíme:

$$(V.2.4) \quad \varphi(x, y) = xy^2 + y \sin x + 5y + c_2(x).$$

c_2 je integrační konstanta, která vznikla při integraci podle y . Je to tedy konstanta vzhledem k y , může však obecně záviset na x . Nyní zbývá určit $c_1(y)$ a $c_2(x)$. Proto porovnáme pravé strany (V.2.3) a (V.2.4). Dostaneme:

$$\begin{aligned} xy^2 + y \sin x + 3x^2 + c_1(y) &= xy^2 + y \sin x + 5y + c_2(x), \\ 3x^2 + c_1(y) &= 5y + c_2(x). \end{aligned}$$

Toto je splněno například, položíme-li $c_1(y) = 5y$ a $c_2(x) = 3x^2$. Nyní můžeme dosadit do (V.2.3) nebo do (V.2.4) a vyjádřit φ . Uvědomíme-li si ještě, že potenciál je určen jednoznačně až na aditivní konstantu, získáváme:

$$(V.2.5) \quad \varphi(x, y) = xy^2 + y \sin x + 3x^2 + 5y + konst.$$

2. metoda. Tato metoda vychází z důkazu věty V.1.6, části b), a potenciál je konstruován pomocí formule (V.1.4). Vyberme bod $A \in \mathbb{E}_2$, například $A = O = [0, 0]$. Souřadnice bodu X , ve kterém vypočítáme hodnotu potenciálu, označme x_0 a y_0 . Na A a X během výpočtu hledíme jako na pevné body, tj. x_0 a y_0 považujeme za konstanty. Položme $\varphi(X) = \varphi(x_0, y_0) = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, kde C je křivka v \mathbb{E}_2 s počátečním bodem A a koncovým bodem X . Vyberme křivku C tak, aby výpočet křivkového integrálu na ní byl co nejjednodušší. Například takto: $C = \overline{AB} \cup \overline{BX}$, kde \overline{AB} je úsečka, vedoucí z bodu $A = O = [0, 0]$ do bodu $B = [x_0, 0]$ a \overline{BX} je úsečka, vedoucí z bodu $B = [x_0, 0]$ do bodu $X = [x_0, y_0]$. Pro $\varphi(x_0, y_0)$ platí:

$$\varphi(x_0, y_0) = \int_{\overline{AB}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\overline{BX}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Úsečku \overline{AB} můžeme parametrizovat zobrazením $x = t, y = 0; t \in \langle 0, x_0 \rangle$. Proto je na této úsečce $dx = dt, dy = 0$ a

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\overline{AB}} (y^2 + y \cos x + 6x) dx + (2xy + \sin x + 5) dy \\ &= \int_0^{x_0} 6t dt = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Úsečku \overline{BX} lze parametrizovat zobrazením $x = x_0, y = t; t \in \langle 0, y_0 \rangle$. Na této úsečce je tudíž $dx = 0, dy = dt$ a

$$\begin{aligned} \int_{\overline{BX}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\overline{BX}} (y^2 + y \cos x + 6x) dx + (2xy + \sin x + 5) dy \\ &= \int_0^{y_0} (2x_0 t + \sin x_0 + 5) dt = x_0 y_0^2 + y_0 \sin x_0 + 5y_0. \end{aligned}$$

Hodnota funkce φ v bodě X proto je

$$\varphi(x_0, y_0) = 3x_0^2 + x_0 y_0^2 + y_0 \sin x_0 + 5y_0.$$

Píšeme-li x místo x_0 , y místo y_0 a vezmeme-li v úvahu, že potenciál je určen jednoznačně až na aditivní konstantu, obdržíme stejné vyjádření potenciálu, jako ve (V.2.5).

V.2.11. Příklad. Vraťme se k vektorovému poli

$$\mathbf{f} = (U, V) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

o kterém z příkladu V.2.7 víme, že je potenciální pole v prvním kvadrantu $D' = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0\}$. Jaký je potenciál φ pole \mathbf{f} v oblasti D' ?

Řešení: K nalezení φ použijme například první metodu z odstavce V.2.10. Vyjdeme z rovnic

$$(V.2.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Integrací první rovnice podle x obdržíme:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\int \frac{y}{x^2 + y^2} dx = -\frac{1}{y} \int \frac{1}{(x/y)^2 + 1} dx \stackrel{1)}{=} -\int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \operatorname{arccotg} t + c_1(y) \stackrel{2)}{=} \operatorname{arctg} \frac{1}{t} + c_1(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_1(y). \end{aligned}$$

1) Použili jsme substituci $t = x/y$.

2) Použili jsme vzorec $\operatorname{arccotg} t = \operatorname{arctg}(1/t)$, který platí pro $t > 0$.

Integrací druhé rovnice podle y dostáváme:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{x} \int \frac{1}{1 + (y/x)^2} dy \stackrel{3)}{=} \int \frac{dr}{r^2 + 1} \\ &= \operatorname{arctg} r + c_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_2(x). \end{aligned}$$

3) Použili jsme substituci $r = y/x$.

Integrační konstanty $c_1(y)$ a $c_2(x)$ určíme porovnáním obou vyjádření $\varphi(x, y)$. Je patrné, že můžeme volit $c_1(y) = c_2(x) = c$, kde c je konstanta nezávislá na x i na y . Dosazením do kteréhokoliv vyjádření $\varphi(x, y)$ dostáváme: $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x) + c$. Funkce $\operatorname{arctg}(y/x)$ má názorný geometrický význam: je to úhel mezi kladnou částí osy x a polopřímkou vycházející z počátku a procházející bodem $[x, y]$.

V.3. Potenciální pole v \mathbb{E}_3 .

V.3.1. Věta. (Potenciální pole v \mathbb{E}_3 – nutná podmínka.) Předpokládejme, že \mathbf{f} je potenciální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$, které má spojité parciální derivace v D . Pak

$$(V.3.1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{v } D.$$

Důkaz: Je-li φ potenciál \mathbf{f} v D , pak $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$ v D a podmínka (V.3.1) bezprostředně vyplývá z formule (IV.5.1).

V.3.2. Poznámka. V odstavci V.1.7 jsme uvedli, proč se o potenciálním poli říká, že je nevěřivé. Podmínka (V.3.1) ukazuje další důvod pro toto označení.

V.3.3. Poznámka. Podmínka (V.3.1) je nutnou podmínkou pro to, aby pole \mathbf{f} mohlo být v oblasti D potenciální. Není však podmínkou postačující. To znamená, že nevíme-li dopředu, zda \mathbf{f} je potenciální pole v D , pak pouze z platnosti podmínky (V.2.1) se to odvodit nedá. Lze to ukázat na příkladu vektorového pole

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

v oblasti $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 > 0\}$. (D je celý prostor \mathbb{E}_3 s výjimkou osy z .) Snadným výpočtem můžete ověřit, že vektorová funkce \mathbf{f} vyhovuje podmínce (V.3.1) v D . Přesto však pole \mathbf{f} není v D potenciálním polem. Podobně jako v příkladu III.4.12 lze totiž vypočítat, že cirkulace \mathbf{f} po kružnici $C : x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $z = 0$ (tj. kružnici se středem v počátku a poloměrem r v rovině xy), orientované po směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy z , je rovna -2π . Pole \mathbf{f} tedy není v D potenciální. (Jinak by musela jeho cirkulace po každé uzavřené křivce v D být nulová – viza větu V.1.7.)

Jestliže však nějaké vektorové pole podmínce (V.3.1) nevyhovuje, znamená to, že není potenciální.

V.3.4. Příklad. Rozhodněme, zda vektorové pole $\mathbf{f}(x, y, z) = (y + z, x^2 + z^2, x^3 + y^3)$ je potenciálním polem v \mathbb{E}_3 .

Ř e š e n í : Výpočtem rotace \mathbf{f} dostáváme:

$$\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z, & x^2 + z^2, & x^3 + y^3 \end{vmatrix} = (3y^2 - 2z, 1 - 3x^3, 2x - 1).$$

Jelikož výsledkem není nulové vektorové pole v \mathbb{E}_3 , vektorové pole \mathbf{f} není potenciální pole v \mathbb{E}_3 .

V dalších odstavcích budeme formulovat postačující podmínku, jejíž platnost již zajišťuje, že dané třírozměrné vektorové pole \mathbf{f} je potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. K tomu budeme potřebovat pojem “jednoduše souvislé oblasti” v \mathbb{E}_3 .

V.3.5. Jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_3 . Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D , aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Příklady jednoduše souvislých oblastí v \mathbb{E}_3 jsou celý prostor \mathbb{E}_3 , poloprostor, \mathbb{E}_3 minus polopřímka, vnitřek koule, kvádrů, krychle nebo jakékoliv jiné uzavřené plochy atd. Příklady oblastí v \mathbb{E}_3 , které nejsou jednoduše souvislé, jsou \mathbb{E}_3 minus celá přímka, vnějšek válcové plochy $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), vnitřek nebo vnějšek tzv. anuloidu atd.

Již několikrát jsme se zmínili o tom, že v \mathbb{E}_3 se vyskytují množiny podstatně rozmanitějších tvarů i vlastností, než v \mathbb{E}_2 . To je také důvodem, proč v \mathbb{E}_3 lze definovat ještě jiný a odlišný typ jednoduše souvislých oblastí. Pojednáváme o tom v odstavci V.4.8.

V.3.6.* Poznámka. V definici V.3.5, podobně jako v definici V.2.4, se opět spoléháme na intuici čtenářů a pomáháme si výrokem “spojitě stáhnout v bod v oblasti D , aniž přitom opustíme D ”, jehož význam nebyl přesně definován. Náročnější čtenáři mohou přesnou definici nalézt v odstavci V.2.5.

V.3.7. Věta. (Potenciální pole v \mathbb{E}_3 – postačující podmínka.) *Nechť*

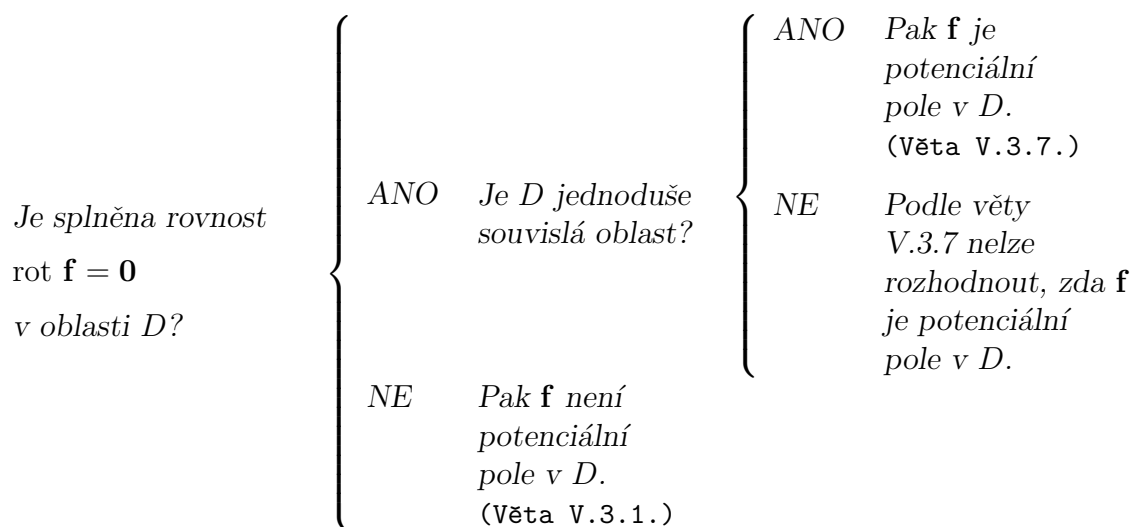
Podle věty V.2.6 nelze rozhodnout, zda \mathbf{f} je potenciální pole v D .

a) D je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_3 a
b) \mathbf{f} je vektorové pole v D , které má v D spojitě parciální derivace a které splňuje podmínku (V.3.1): $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ v D .

Pak \mathbf{f} je potenciální pole v D .

Důkaz této věty neukazujeme. Jeho ideou je, stejně jako v důkazu věty V.2.6, demonstrace toho, že cirkulace vektorového pole \mathbf{f} po každé uzavřené křivce v D je nulová. Postup je však komplikovanější, než v případě věty V.2.6 a místo Greenovy věty je založen na užití Stokesovy věty.

V.3.8. Jak poznáme, zda dané vektorové pole je potenciální. Předpokládejme, že pole \mathbf{f} má spojitě parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. Pak můžeme postupovat podle následujícího schématu:



V.3.9. Jak nalézt potenciál. Až na malé a zřejmé modifikace můžeme použít obě metody, vysvětlené v odstavci V.2.10. Užití první metody ukážeme v příkladu V.3.10.

V.3.10. Příklad – gravitační pole. Intenzita gravitačního pole, vytvořeného hmotným bodem hmotnosti m , umístěným v \mathbb{E}_3 v počátku souřadného systému, je

$$\mathbf{g}(x, y, z) = -\frac{\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{pro } x^2 + y^2 + z^2 > 0),$$

kde κ je Newtonova gravitační konstanta. Oblast $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 >$

0} (\mathbb{E}_3 minus počátek souřadného systému) je jednoduše souvislá. Výpočtem rotace \mathbf{g} zjistíme, že $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{0}$ v D . Podle věty V.3.7 je pole \mathbf{g} potenciálním polem v D .

Vypočítejme potenciál φ pole \mathbf{g} . Z rovnosti $\mathbf{g} = \text{grad } \varphi$ vyplývají tři rovnice:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\kappa m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\kappa m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\kappa m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Integrací první rovnice podle x obdržíme:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= -\int \frac{\kappa m x \, dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = {}^1) -\int \frac{\kappa m}{2t^{3/2}} dt = \frac{\kappa m}{t^{1/2}} + c_1(y, z) \\ &= \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_1(y, z). \end{aligned}$$

¹⁾ Použili jsme substituci $t = x^2 + y^2 + z^2$.

Podobně, integrací druhé rovnice podle y a třetí rovnice podle z , získáme:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_2(x, z) \quad \text{a} \quad \varphi(x, y, z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c_3(x, y).$$

Porovnáním všech tří vyjádření $\varphi(x, y, z)$ zjistíme, že integrační konstanty je možné volit tak, že $c_1(y, z) = c_2(x, z) = c_3(x, y) = c$, kde c je konstanta, nezávislá na x , y a z . Potenciálem gravitačního pole \mathbf{g} v oblasti D tudíž je funkce

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c.$$

Vektorová funkce $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv (x, y, z)$ bývá ve fyzice často nazývána “radius vektor” a označována \mathbf{r} . Pomocí této funkce můžeme \mathbf{g} i φ zapsat:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa m \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\kappa m}{\|\mathbf{r}\|} + c.$$

Analogický tvar jako \mathbf{g} má i elektrostatické pole, vytvořené bodovým nábojem, umístěným v počátku. Takové elektrostatické pole je rovněž potenciálním polem v D a jeho potenciál má opět podobný tvar, jako φ .

V.4.* Solenoidální pole.

Původem řecké slovo “solenoid” ve fyzice označuje cívku. V matematice se “solenoidálním polem” začalo nazývat vířivé, rotační vektorové pole. Později se termín “solenoidální pole” ustálil jako označení pole, které je v jistém smyslu protikladem potenciálního pole: Zatímco potenciální pole může obsahovat zdroje (zřídla), ale nikoliv víry (viz odstavce V.1.7 a V.3.2), solenoidální pole může obsahovat víry, nikoliv však zřídla. (To poznáte v odstavci V.4.3.)

V tomto textu se omezíme na studium solenoidálního pole v \mathbb{E}_3 . Dvourozměrného solenoidálního pole se týká poznámka V.4.13.

V.4.1. Solenoidální vektorové pole v \mathbb{E}_3 . Vektorové pole \mathbf{f} v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *solenoidální pole* v D , jestliže existuje vektorové pole (= vektorová funkce) \mathbf{w} v D takové, že

$$(V.4.1) \quad \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

v D . Vektorovou funkci \mathbf{w} pak nazýváme *vektorový potenciál* pole \mathbf{f} v D .

Jistě jste si všimli jisté podobnosti definice potenciálního pole a solenoidálního pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$: Pole \mathbf{f} je potenciální, je-li je možné vyjádřit ve tvaru $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$, a solenoidální, dá-li se zapsat ve tvaru $\mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$. (Funkce φ , respektive \mathbf{w} , se pak nazývají potenciál, respektive vektorový potenciál, pole \mathbf{f} .) S další podobností se seznámíme v následující větě: zatímco pole \mathbf{f} je potenciální v oblasti D právě když cirkulace \mathbf{f} po každé uzavřené křivce v D je nulová (viz větu V.1.7), pole \mathbf{f} je solenoidální v oblasti D právě když jeho tok každou uzavřenou plochou v D je nulový.

V.4.2. Věta. *Předpokládejme, že \mathbf{f} je spojitě vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

Podle věty a) \mathbf{f} je solenoidální pole v D .

V.3.7 nelze

rozhodnout, zda \mathbf{f}

je potenciální

pole v D .

b) Tok pole \mathbf{f} každou uzavřenou plochou v D je nulový.

Důkaz a z : Implikace a) \implies b) je okamžitým důsledkem poznámky IV.5.11: Předpokládejme, že pole \mathbf{f} je solenoidálním polem v D a \mathbf{w} je jeho vektorový potenciál. Tok pole \mathbf{f} uzavřenou plochou σ v D je roven

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{p} = 0.$$

Důkaz opačné implikace, tj. b) \implies a), je náročnější a v tomto textu jej neuvádíme.

V.4.3 Poznámka. Solenoidální pole se též často označuje termínem **nezřídlové pole**. Věta V.4.2 ukazuje důvod pro toto označení. Kdyby totiž uvnitř pole \mathbf{f} existovala nějaká zřídla (zdroje), pak by tok pole \mathbf{f} uzavřenou plochou, obklopující tato zřídla, nemohl být nulový a pole by tudíž nebylo solenoidální.

V.4.4. Věta. (Solenoidální pole – nutná podmínka.) *Předpokládejme, že \mathbf{f} je solenoidální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$, které má spojitě parciální derivace v D . Pak*

$$(V.4.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \quad \text{v } D.$$

Důkaz a z : Je-li \mathbf{w} vektorový potenciál \mathbf{f} v D , pak $\mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$ v D a podmínka (V.4.2) je okamžitým důsledkem formule (IV.5.2).

V.4.5. Poznámka. Podmínka (V.4.2) je nutnou podmínkou pro to, aby pole \mathbf{f} mohlo být v oblasti D solenoidální. Není však podmínkou postačující. To znamená, že pouze z platnosti podmínky (V.4.2) nelze odvodit, zda pole \mathbf{f} v oblasti D solenoidální je nebo není. Toto je možné ilustrovat na příkladu gravitačního pole

$$\mathbf{g}(x, y, z) = -\frac{\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{pro } x^2 + y^2 + z^2 > 0)$$

v oblasti $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$ z odstavce V.3.10. Výpočtem divergence \mathbf{g} můžete zjistit, že

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{g} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\kappa m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\kappa m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\kappa m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{3\kappa m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3\kappa m (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned}$$

v D . Nyní počítejme tok pole \mathbf{g} kulovou plochou $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$), orientovanou směrem vně. Gaussovu–Ostrogradského větu nemůžeme použít, neboť vektorové pole nemá spojité parciální derivace, dokonce ani není definované, v bodě $[0, 0, 0]$, který se nachází v $\operatorname{Int} \sigma$. Nicméně, tok pole \mathbf{g} plochou σ můžeme snadno vypočítat, uvědomíme-li si, že na ploše σ je normálový vektor

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R},$$

vektorová funkce \mathbf{g} má na ploše σ tvar

$$\mathbf{g}(x, y, z) = -\frac{\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{R^3}$$

a skalární součin $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ tudíž je:

$$\mathbf{g}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = -\frac{\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{R^3} \cdot \frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{R} = -\frac{\kappa m}{R^2}.$$

Nyní dostáváme:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{p} = \iint_{\sigma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dp = -\frac{\kappa m}{R^2} \iint_{\sigma} dp = -\frac{\kappa m}{R^2} 4\pi R^2 = -4\kappa m\pi.$$

(Využili jsme známého vzorce pro obsah kulové plochy.) Jelikož tok pole \mathbf{g} uzavřenou plochou σ , nacházející se v oblasti D , je nenulový, pole \mathbf{g} nemůže být solenoidální v D . (Bylo by to ve sporu s tvrzením věty V.4.2.)

Podmínku (V.4.2) však můžeme využít takto: Jestliže nějaké vektorové pole v oblasti D podmínce (V.4.2) nevyhovuje, znamená to, že není solenoidální v D .

V.4.6. Příklad. Rozhodněme, zda vektorové pole $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y, y^2 + z^2, z^3 + x^3)$ je solenoidálním polem v \mathbb{E}_3 .

Ř e š e n í : Výpočtem divergence \mathbf{f} dostáváme:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3 + x^3) = 1 + 2y + 3z^2.$$

Jelikož výsledkem není nulová funkce v \mathbb{E}_3 , vektorové pole \mathbf{f} není solenoidální v \mathbb{E}_3 .

V dalších odstavcích zformulujeme postačující podmínku, jejíž platnost již zajišťuje, že dané vektorové pole \mathbf{f} je solenoidální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. K tomu budeme potřebovat pojem “plošně jednoduše souvislá oblast” v \mathbb{E}_3 .

V.4.7. Plošně jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_3 . Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme plošně jednoduše souvislou, pokud každou uzavřenou plochu σ v D je možné spojitě změnit (stáhnout) v bod v D , aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Plošně jednoduše souvislou oblast v \mathbb{E}_3 by také bylo možné definovat jako oblast D s tou vlastností, že vnitřek každé uzavřené plochy v D je podmnožinou D .

Příklady plošně jednoduše souvislých oblastí v \mathbb{E}_3 jsou celý prostor \mathbb{E}_3 , poloprostor, \mathbb{E}_3 minus polopřímka, \mathbb{E}_3 minus celá přímka, vnitřek anuloidu, koule, kvádrů, krychle nebo jakékoliv jiné uzavřené plochy atd. Příklady oblastí v \mathbb{E}_3 , které nejsou plošně jednoduše souvislé, jsou \mathbb{E}_3 minus bod, \mathbb{E}_3 minus omezená uzavřená množina, vnějšek jakékoliv uzavřené plochy atd.

V.4.8. Poznámka. Upozorňujeme čtenáře, že termín “plošně jednoduše souvislá oblast” není ustálený. Někteří autoři vynechávají slovo “plošně”. Pak ovšem může dojít k záměně s “jednoduše souvislou oblastí”, definovanou v odstavci V.3.6.

V definici V.4.7, stejně jako v definicích V.2.4 a V.3.6, opět spoléháme na intuici čtenářů a věříme, že správně pochopí, co přesně míníme výrokem “spojitě stáhnout v bod v D , aniž přitom opustíme D ”.

V.4.9. Věta. (Solenoidální pole – postačující podmínka.) *Nechť*

- a) D je plošně jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_3 a
- b) \mathbf{f} je vektorové pole v D , které má v D spojitě parciální derivace a které splňuje podmínku (V.4.2): $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ v D .

Pak \mathbf{f} je solenoidální pole v D .

Důkaz : Ukážeme, že tok vektorového pole \mathbf{f} každou uzavřenou plochou v D je nulový. Z toho již vyplývá, že \mathbf{f} je solenoidální pole v D . (Viz větu V.4.2.) Buď tedy σ libovolná uzavřená plocha v D . Jelikož D je plošně jednoduše souvislá oblast, $\operatorname{Int} \sigma \subset D$. Užitím Gaussovy–Ostrogradského věty dostáváme:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \pm \iiint_{\operatorname{Int} \sigma} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 0.$$

(Znaménko “+” platí, je-li plocha σ orientovaná směrem vně a “−” platí, je-li plocha σ orientovaná směrem dovnitř. Jelikož integrál na pravé straně je ale roven nule, znaménko není důležité.)

Z důkazu je patrné, proč předpokládáme, že oblast D je plošně jednoduše souvislá: bez toho nevíme, zda $\operatorname{Int} \sigma \subset D$ a zda můžeme použít Gaussovu–Ostrogradského větu.

V.4.10. Jak poznáme, zda dané vektorové pole je solenoidální. Předpokládejme, že vektorová funkce \mathbf{f} má spojitě parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$. Chceme-li poznat, zda \mathbf{f} je solenoidální pole v D , můžeme postupovat podle následujícího schématu:

Je splněna rovnost $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ v oblasti D ?	}	ANO Je D plošně jednoduše souvislá oblast?	}	ANO Pak \mathbf{f} je solenoidální pole v D . (Věta V.4.9.)
		NE Pak \mathbf{f} není solenoidální pole v D . (Věta V.4.4.)		NE Podle věty V.4.9 nelze rozhodnout, zda \mathbf{f} je solenoidální pole v D .

V.4.11. Příklad. $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - y, z - y, x - z)$ Vyšetřeme, zda \mathbf{f} je solenoidální pole v \mathbb{E}_3 .

Řešení: Podmínka (V.4.2) je splněna, neboť

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(z - y) + \frac{\partial}{\partial z}(x - z) = 2 - 1 - 1 = 0$$

v \mathbb{E}_3 . Celý prostor \mathbb{E}_3 je plošně jednoduše souvislá oblast. Pole \mathbf{f} je tudíž podle věty V.4.9 solenoidální v \mathbb{E}_3 .

V.4.12. Příklad – elektrostatické a magnetické pole. Představme si, že oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ je vyplněna homogenním prostředím s permitivitou ϵ a permeabilitou μ . V D protéká elektrický proud s hustotou \mathbf{J} a elektrické náboje jsou rozloženy s hustotou ρ . Označme \mathbf{E} intenzitu elektrického pole a \mathbf{B} intenzitu magnetického pole v D . Předpokládejme, že \mathbf{E} ani \mathbf{B} nezávisí na čase a jsou tudíž vektorovými funkcemi pouze prostorových proměnných x, y a z . V takovém případě místo “elektrické pole” častěji používáme označení “elektrostatické pole”. V teorii elektromagnetického pole se dokazuje, že vektorová pole \mathbf{E} a \mathbf{B} vyhovují v oblasti D tzv. *Maxwellovým rovnicím*:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho/\epsilon, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Zamysleme se nad tím, co Maxwellovy rovnice vypovídají o charakteru polí \mathbf{E} a \mathbf{B} . Předpokládejme pro jednoduchost, že oblast D je jednoduše souvislá i plošně jednoduše souvislá.

Z rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ vyplývá, že \mathbf{E} je potenciálním polem v D . (Věta V.3.7.) Rovnice $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ ukazuje, že \mathbf{E} obecně nemusí být v D solenoidálním polem. (Věta V.4.3.) \mathbf{E} je solenoidálním polem v D tehdy, je-li $\rho = 0$ v D . (Věta V.4.9.)

Rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ ukazuje, že pole \mathbf{B} obecně není v oblasti D potenciální. (Věta V.3.1.) \mathbf{B} je potenciálním polem v D pouze tehdy, je-li hustota \mathbf{J} elektrického proudu v oblasti D nulová. (Věta V.3.7.) Z rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ vyplývá, že \mathbf{B} je solenoidálním polem v D . (Věta V.4.9.)

Pole \mathbf{E} je tedy nevířivé v D a pole \mathbf{B} nemá v D zřídla (= zdroje). Pokud je $\rho = 0$ v D , nemá ani pole \mathbf{E} zřídla v D . Pokud je hustota elektrického proudu v D nulová, je pole \mathbf{B} také nevířivé v D .

V.4.13. Dvourozměrné solenoidální pole. Je-li D oblast v \mathbb{E}_2 a vektorový potenciál \mathbf{w} v oblasti $\mathcal{D} = D \times \mathbb{E}_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D, z \in \mathbb{E}_1\}$ má tvar $\mathbf{w} = (0, 0, \psi(x, y))$, pak odpovídajícím solenoidálním vektorovým polem v \mathcal{D} je

$$\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{w} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y), 0 \right).$$

Vidíme, že \mathbf{f} má třetí souřadnicovou funkci nulovou a první dvě souřadnicové funkce závisí pouze na proměnných x a y . Takové vektorové pole můžeme považovat za dvourozměrné pole, neboli za vektorové pole v oblasti D v \mathbb{E}_2 . Označíme-li U a V první dvě souřadnicové funkce \mathbf{f} , pak

$$(V.4.3) \quad U(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y), \quad V(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$$

pro $[x, y] \in D$. Vektorové pole (U, V) , jehož souřadnicové funkce U a V je možné vyjádřit tímto způsobem (tj. existuje skalární funkce ψ v D taková, že U a V vyhovují rovnicím (V.4.3)) nazýváme *solenoidálním polem* v oblasti D v \mathbb{E}_2 .

Z rovnic (V.4.3) je okamžitě patrné, že pole (U, V) je solenoidální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ právě tehdy, je-li odpovídající kolmé pole $(-V, U)$ potenciální v téže oblasti D . (Potenciálem pole $(-V, U)$ pak je evidentně funkce ψ .) Na otázky jak se pozná zda zadané pole (U, V) je v oblasti D solenoidální, jaká je nutná podmínka pro to, aby pole (U, V) mohlo být v D solenoidální, jaká je postačující podmínka atd., lze nyní snadno odpovědět. Prostě zaměníme pole (U, V) za $(-V, U)$, termín “solenoidální” za “potenciální” a použijeme výsledky z kapitoly V.2 o dvourozměrném potenciálním poli. Spokojíme-li se pro jednoduchost s vektorovým polem (U, V) , jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojitě parciální derivace, pak konkrétně obdržíme:

Podle věty V.4.9 a) Nutnou podmínkou pro to, aby pole (U, V) mohlo být v D nelze rozhodnout,

zda \mathbf{f} je solenoidální

pole v D .

solenoidální, je platnost rovnice

$$(V.4.4) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

b) Postačující podmínkou, která zaručuje, že pole (U, V) je solenoidální v D , je současná platnost rovnice (V.4.4) a předpokladu o tom, že oblast D je jednoduše souvislá.

Na závěr se ještě zmiňme o jiné vlastnosti, která charakterizuje dvourozměrné solenoidální pole (U, V) . Z věty V.1.7 víme, že pole $(-V, U)$ je potenciální v D právě když jeho cirkulace po každé uzavřené křivce C v D je nulová, neboli

$$(V.4.5) \quad 0 = \oint_C (-V, U) \cdot \vec{\tau} ds = \oint_C (U, V) \cdot \vec{\nu} ds,$$

kde $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ je jednotkový tečný vektor ke křivce C a $\vec{\nu} = (\tau_2, -\tau_1)$ je jednotkový kolmý vektor ke křivce C . Poslední integrál na pravé straně (V.4.5) lze, v analogii s názvem plošného integrálu na pravé straně (IV.4.1), nazvat *tokem vektorového pole (U, V) křivkou C* . Odvodili jsme tedy tvrzení: *Vektorové pole (U, V) je v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$*

solenoidální právě když jeho tok každou uzavřenou křivkou C v D je nulový. (Jinými slovy a ne zcela přesně: Co do vnitřku křivky C přitéká, to také odtéká.)

V.5. Cvičení.

1. Najděte maximální oblasti v \mathbb{E}_2 , ve kterých je vektorové pole \mathbf{f} definované. V každé nalezené oblasti ověřte, zda je v ní \mathbf{f} potenciálním polem. V kladném případě najděte potenciál φ a vypočítejte integrál $\int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. (Viz odstavce V.2.8, V.2.10 a V.1.5.)

a) $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$, $A = [1, 3]$, $B = [3, 2]$,

b) $\mathbf{f}(x, y) = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j}}{(x - y)^2}$, $A = [1, 2]$, $B = [4, 1]$,

c) $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, y^2)$, $A = [0, 0]$, $B = [3, 5]$,

d) $\mathbf{f}(x, y) = \left(y^2 - \frac{x}{\sqrt{y - x^2}} - 1, 2xy + \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \right)$, $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$,

e) $\mathbf{f}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \mathbf{i} + 4y\sqrt{x} \mathbf{j}$, $A = [1, 2]$, $B = [4, -2]$,

f) $\mathbf{f}(x, y) = \left(1 - y^2 + \frac{1}{2\sqrt{y^2 + x}}, \frac{y}{\sqrt{y^2 + x}} - 2xy \right)$, $A = [-3, 2]$, $B = [3, 1]$,

g) $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y)$, $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$,

h) $\mathbf{f}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{(x - y)^2}$, $A = [2, 1]$, $B = [6, 2]$,

i) $\mathbf{f}(x, y) = (x^3y^2 + x, y^2 + yx^4)$, $A = [3, -1]$, $B = [1, 5]$,

j) $\mathbf{f}(x, y) = (1 + y^2 \sin 2x, -2y \cos^2 x)$, $A = [\pi, 1]$, $B = [\pi/2, 2]$,

k) $\mathbf{f}(x, y) = \left(\ln y - \frac{e^y}{x^2}, \frac{e^y}{x} + \frac{x}{y} \right)$, $A = [1, 1]$, $B = [1, 2]$,

l) $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x, \frac{y}{(y - x)^2} - y^2 \right)$, $A = [0, 1]$, $B = [1, 4]$,

m) $\mathbf{f}(x, y) = \frac{4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4x^2 + y^2 - 4}$, $A = [0, 0]$, $B = [0, 2]$,

n) $\mathbf{f}(x, y) = (y \sin x, y - \cos x)$, $A = [0, 1]$, $B = [5, 2]$,

o) $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(2y) + y + x, y - 2x \sin(2y) + x)$, $A = [0, 0]$, $B = [-2, 2]$.

2. V jaké maximální oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ je funkce φ potenciálem vektorového pole \mathbf{f} ? Určete pole \mathbf{f} ? Vypočítejte práci, vykonanou působením síly \mathbf{f} po křivce vedoucí od bodu A do bodu B . (Viz odstavce V.1.3 a V.1.5.)

a) $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz$, $A = [-1, 2, -1]$, $B = [3, 4, 1]$,

b) $\varphi(x, y, z) = \ln |x^2 + y^2 + z^2 - 1|$, $A = [-1, 1, 2]$, $B = [-3, 4, -1]$.

3. Najděte maximální oblasti v \mathbb{E}_3 , ve kterých je vektorové pole \mathbf{f} definované. V každé oblasti ověřte, zda je v ní pole \mathbf{f} potenciální. V kladném případě určete potenciál. (Viz odstavce V.3.8 a V.2.10.)

$$\text{a) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{z}, \frac{2xy}{z}, -\frac{xy^2}{z^2} \right), \quad \text{b) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 2z \right),$$

$$\text{c) } \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}/2}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}, \quad \text{d) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{2x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}, \ln z \right),$$

$$\text{e) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sin z - y^2, -2xy, 2\sqrt{x} \cos z \right),$$

$$\text{f) } \mathbf{f}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k},$$

$$\text{g) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x - y}, \frac{z}{y - x}, \ln(x - y) + \frac{1}{\sqrt{z}} \right),$$

$$\text{h) } \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\text{i) } \mathbf{f}(x, y, z) = (e^x(y + z^2), e^x, ze^x),$$

$$\text{j) } \mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, y^2, x + z),$$

$$\text{k) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 2z \right),$$

$$\text{l) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{z} \right).$$

4.* V jakých maximálních oblastech v \mathbb{E}_3 je vektorové pole \mathbf{f} definované? V každé nalezené oblasti ověřte, zda je v ní pole \mathbf{f} solenoidální. (Viz V.4.11.)

$$\text{a) } \mathbf{f}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2), \quad \text{b) } \mathbf{f}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - z),$$

$$\text{c) } \mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, -2z), \quad \text{d) } \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, \sqrt{z - x^2}, -\frac{z}{y} \right),$$

$$\text{e) } \mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x^2), \quad \text{f) } \mathbf{f}(x, y, z) = (xy, 1 - y^2, yz),$$

$$\text{g) } \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{(yz, xz, -xy)}{y^2 + z^2 - 1}, \quad \text{h) } \mathbf{f}(x, y, z) = (5x^2, y - z, \ln z).$$

$$5.* \mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{x - y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{x + y - z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

a) Ukažte, že $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ v $\mathbb{E}_3 - \{[0, 0, 0]\}$. (Viz odstavec IV.5.1.)

b) Vypočítejte tok pole \mathbf{f} kulovou plochou se středem v počátku a poloměrem $r = 1$, orientovanou směrem vně. (Viz odstavec V.4.5.)

c) Rozhodněte, zda \mathbf{f} je solenoidální pole v $\mathbb{E}_3 - \{[0, 0, 0]\}$. Odpověď zdůvodněte. (Viz odstavec V.4.5.)

d) Určete oblast v \mathbb{E}_3 , ve které je pole \mathbf{f} solenoidální. (*Viz odstavec V.4.11.*)

Rejstřík

bod hraniční	str. 5	– zdola omezená	14
– hromadný	9	graf funkce n proměnných	11
– izolovaný	9	gradient	31, 107
– koncový křivky	78	hmotnost	53, 63, 83, 84, 103
– kritický	38	hranice množiny	6
– počáteční křivky	78	integrál dvojný	52
– stacionární	38	– křivkový skalární funkce	80, 81
– vnitřní	5	– křivkový 1. druhu	81
cirkulace po uzavřené křivce	88	– křivkový vektorové funkce	85
čára lomená v \mathbb{E}_n	7	– křivkový 2. druhu	85
dělení obdélníku	50	– objemový	63
– kvádrů	61	– plošný skalární funkce	99
derivace parciální	23	– plošný 1. druhu	100
– parciální 2. řádu	34	– plošný vektorové funkce	104
– ve směru	30, 31	– plošný 2. druhu	104
determinant Jacobiho	72	– trojný	62
diferenciál	28, 29	integrand	52, 63
– totální	29	izokřivka	12
divergence	107	izoplocha	13
extrém absolutní	40	jakobián	72
– funkce na množině	40	křivka jednoduchá hladká	77
– globální	40	– jednoduchá po č. hladká	79
– lokální	37	– kladně orientovaná uzavřená	89
– ostrý lokální	37	– orientovaná	77
– vázaný	43	– – souhlasně s parametrizací	78
funkce definovaná implicitně	44	– – nesouhlasně s parametrizací ...	78
– diferencovatelná v bodě	26	– uzavřená	79
– diferencovatelná na množině	26	– záporně orientovaná uzavřená ...	89
– implicitní	44	limita funkce n proměnných	16
– integrovatelná . 52, 63, 81, 85, 99, 104		– funkce vzhledem k množině	17
– n proměnných	11	– posloupnosti v \mathbb{E}_n	8
– omezená	14	maximum absolutní	40
– shora omezená	14	– funkce na množině	40
– skalární	15	– globální	40
– složená	13	– lokální	37
– souřadnicová	14	– ostré lokální	37
– spojitá na množině	20	minimum absolutní	40
– spojitá v bodě	19	– funkce na množině	40
– spojitá v bodě vzhledem		– globální	40
k množině	19	– lokální	37
– vektorová	14	– ostré lokální	37
– vnější	13	míra dvourozměrná Jordanova	53
– vnitřní	13	– třírozměrná Jordanova	63

množina měřitelná	53, 63	– potenciální	116
– míry nula	54, 63	– skalární	15
– neomezená	8	– solenoidální	127
– omezená	8	– vektorové	15
– otevřená	5	posloupnost v \mathbb{E}_n	8
– souvislá	7	– konvergentní	8
– uzavřená	6	potenciál	116
moment setrvačnosti ..	61, 71, 84, 103	– vektorový	127
– statický	60, 70, 83, 84, 103	práce síly po křivce	86
multiplikátor Lagrangeův	43	prostor Euklidův	4
nadrovina tečná	28	rotace	107
nezávislost křivkového		rovina tečná	27
integrálu na cestě	115	součet Riemannův	52, 62
norma dělení	50, 61	souřadnice cylindrické	67
normála	28	– polární	58
objem	53, 63	– sférické	68
oblast	7	– těžiště	61, 71, 84, 103
– jednoduše souvislá v \mathbb{E}_2	120	– zobecněné cylindrické	69
– jednoduše souvislá v \mathbb{E}_3	125	– zobecněné polární	59
– plošně jednoduše souvislá	129	– zobecněné sférické	70
obor definiční	11	tok vektorového pole (funkce)	
– hodnot funkce	11	– plochou	104
– integrace	52, 63	– křivkou	131
– – elementární vzhledem k ose x ..	56	úsečka v \mathbb{E}_n	7
– – – vzhledem k ose y	56	uzávěr množiny	6
– – – vzhledem k rovině xy	65, 66	vektor normálový	95
– – – vzhledem k rovině xz	65, 66	– tečný	77
– – – vzhledem k rovině yz	65, 66	věta Fubiniho	57, 66
obsah množiny v \mathbb{E}_2	54	– Gaussova–Ostrogradského	108
– plochy	100	– Greenova	89
okraj plochy	94, 97	– Jordanova	89, 108
operátor nabla	107	– Stokesova	110
okolí bodu v \mathbb{E}_n	5	vnějšek uzavřené křivky	89
– – prstencové	5	– uzavřené plochy	108
parametrizace		vnitřek množiny	5
– jednoduché hladké křivky	77	– uzavřené křivky	89
– jednoduché hladké plochy	94	– uzavřené plochy	108
plocha jednoduchá hladká	94	zobrazení prosté	72
– jednoduchá po č. hladká	96, 97	– regulární	72
– orientovaná	95	– vzájemně jednoznačné	72
– – souhlasně se svým okrajem	95		
– – nesouhlasně s parametrizací ...	95		
– – souhlasně s parametrizací	95		
– – uzavřená	97		
pole konzervativní	118		
– nezřídlové	127		

Seznam vybraných symbolů

\mathbb{E}_n	str. 4	\mathbb{R}^*	15	$p.b. C, k.b. C$...	78
$X, [x_1, \dots, x_n]$...	4	$\lim_{X \rightarrow A} f(X)$...	16	\int_C	80, 81
$\ Y - X\ $	4	$\lim_{X \rightarrow A} \lim_{\epsilon \in M} f(X)$..	17	$l(C)$	81
$\mathbf{a}, (a_1, \dots, a_n)$	5	$\partial f / \partial x_i$	23	ds	86
$\ \mathbf{a}\ $	5	df	28	\oint_C	88
$\mathcal{U}_R(A), \mathcal{U}(A)$	5	$\partial f / \partial \mathbf{u}$	31	$Int C, Ext C$	89
$\mathcal{P}_R(A), \mathcal{P}(A)$	5	$grad$	31, 107	$P(u, v)$	93, 94
M°	5	$\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$	34	$P_u(u, v), P_v(u, v)$	93
∂M	6	$\partial^2 f / \partial x_i^2$	34	$\sigma, -\sigma$	94, 97
\overline{M}	6	$\max_M f, \min_M f$	40	\mathbf{n}	95
$\lim X_k$	8	$D, \ D\ $	50, 61	\iint_σ	99
$X_k \rightarrow A$	8	\iint_M	52	$p(\sigma)$	100
$D(f)$	11	μ_2	53	$d\mathbf{p}$	104, 105
$H(f)$	11	\iiint_M	62, 63	∇	107
$gr(f)$	11	μ_3	63	div	107
\mathbf{f}	14	$P(t), \dot{P}(t)$	76	rot	107
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$	14	$C, -C$	77, 79	$Int \sigma, Ext \sigma$...	108
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	15	τ	77	\int_A^B	117

Doporučená literatura

1. E.Brožíková, M.Kittlerová: *Sbírka řešených příkladů z Matematiky II*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2001. (Sbírka řešených i neřešených příkladů, určená pro práci na cvičení i pro samostatné studium.)
2. B.Budínský, J.Charvát: *Matematika II*. Vydavatelství ČVUT. Praha 2002. (Podrobná učebnice pro stavební fakulty.)
3. J.Neustupa: *Matematika I*. Vydavatelství ČVUT, 6. vydání, Praha 2014. (Doporučené skriptum ke studiu Matematiky I.)

Z další literatury

4. R.L.Finney, G.B.Thomas, Jr.: *Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1990, 1994, atd. (Jedna z mnoha učebnic základů diferenciálního a integrálního počtu, používaných zejména na amerických univerzitách.)
5. K.Rektorys: *Přehled užití matematiky*, SNTL, Praha 1963, 1968, atd. (Rozsáhlý přehled klasických partií aplikované matematiky.)