

Definice. *Maticí typu $m \times n$* nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m \cdot n$ reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v m řádcích a n sloupcích.

Značíme např. $A = (a_{ij})$, kde $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

Příklad

Předpokládejme, že $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$:

Hlavní diagonála je tvořena prvky a_{11}, a_{22}, \dots

Matice A se nazývá *horní trojúhelníkovou maticí*, jestliže všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule.

Matice A se nazývá *nulovou maticí*, jsou-li všechny její prvky rovny nule.

Maticí *transponovanou k matici A* nazýváme matici $A^T = (a_{ji})$.

Transponovanou matici A^T získáme "překlopením" matice A kolem hlavní diagonály. Z řádků matice A se stanou sloupce matice A^T .

Příklad.

Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí*.

Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí*. Tuto matici označujeme E .

Operace s maticemi

Sčítání matic. *Součtem* matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$ nazýváme matici $C = A + B$, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Násobení matice reálným číslem

Součinem reálného čísla λ a matice A (nebo také *λ -násobkem matice A*) nazýváme matici $C = \lambda \cdot A$, kde $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$).

Příklad:

Poznámka. Množina všech matic stejného typu $m \times n$ s těmito dvěma operacemi tvoří vektorový prostor dimenze $m \cdot n$. Navrhněte bázi tohoto prostoru.

Poznámka. Matice stejného typu lze také odčítat: *Rozdílem matic A a B* nazýváme matici $C = A + (-1) \cdot B$. Píšeme $C = A - B$.

Pro definici násobení matic se hodí následující pojem:

Skalárním součinem vektorů $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ z \mathbb{R}^n nazýváme číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Násobení matic.

Předpoklad: $A = (a_{ij})$ je typu $m \times n$, $B = (b_{ij})$ je typu $n \times p$.

Součinem matic A a B pak nazýváme matici $C = A \cdot B$ typu $m \times p$, jejíž prvek c_{ij} je skalárním součinem i -tého řádku z A a j -tého sloupce z B , ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, p$).

Poznámka. Je tedy $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$.

Pravidla pro operace s maticemi.

Předpokládejme, že α, β jsou reálná čísla a A, B a C jsou matice takové, že níže uvedené operace mají smysl. Pak platí:

a) $A + B = B + A,$

b) $(A + B) + C = A + (B + C),$

c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$

d) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$

e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$

f) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$

g) $A \cdot E = A,$

h) $E \cdot B = B,$

i) $(A + B)^T = A^T + B^T,$

j) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$

POZOR! Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A!$

Příklady.

Hodnost matice

Definice. *Hodností* matice A nazýváme maximální počet lin. nezávislých řádků matice A (jako aritmetických vektorů). Značíme ji $h(A)$.

Poznámka. $h(A)$ lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

Jednoduché příklady:

Postup při určení hodnosti dané matice:

Je-li $m = 2$ nebo $n = 2$, pak lze určit hodnost přímo podle definice.

Je-li $m > 2$ a $n > 2$, pak danou matici převedeme na horní trojúhelníkovou.

Věta 2.17.

Nechť A je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$, tj. počet nenulových řádků.

Příklad

Pro převod dané matice na horní trojúhelníkovou používáme tzv. **ekvivalentní úpravy**, které nemění hodnotu matice.

Ekvivalentní úpravy matice, které budeme používat

- 1) změna pořadí řádků,
- 2) vynásobení některého řádku nenulovým číslem,
- 3) přičtení násobku některého řádku k jinému řádku
- 4) vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného.

Úpravy z bodů 1) – 4) lze provádět i se sloupci matice, hodnota se rovněž nemění.

K vytvoření nulového prvku v požadovaném místě užíváme **zpravidla úpravu č. 3**.

Postup převedení libovolné matice pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkovou matici, se nazývá **Gaussův algoritmus**.

Gaussův algoritmus:

1. krok:

Je-li $a_{11} \neq 0$, pak první řádek **opíšeme** !

Pomocí prvku a_{11} vytvoříme pod ním nuly v prvním sloupci.

Je-li $a_{11} = 0$, zaměníme řádky nebo sloupce.

Pokud lze, zaměníme tak, aby $a_{11} = 1$ nebo $a_{11} = -1$.

2. krok:

Je-li prvek $a'_{22} \neq 0$ (v nové matici),

vytvoříme pomocí něho nuly ve druhém sloupci pod ním (druhý řádek opíšeme)

Postup opakujeme, až získáme horní trojúhelníkovou matici.

Příklad:

Další příklady jsou uvedeny **v textu Hodnost matice** na webu
”Kombinované studium”